Exercices de trigonométrie

1 Soit a, b, c trois réels quelconques tels que $a+b+c=\pi$.
Démontrer que $\sin a+\sin b+\sin c=4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$.

2 Soit a, b, c trois réels quelconques différents de $\frac{\pi}{2}+k\pi$, pour tout entier relatif k.

1°) On suppose que $a+b+c$ est différent de $\frac{\pi}{2}+k\pi$, pour tout entier relatif k.

Exprimer $\tan(a+b+c)$ en fonction de $\tan a$, $\tan b$, $\tan c$.

2°) Démontrer que : $\tan a+\tan b+\tan c=\tan a\tan b\tan c$ si et seulement si $a+b+c=0\ [\pi]$.

3 Résoudre dans l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ l'équation $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$.

4 Résoudre dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation $\sin 2x\geqslant\sin x$.

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin 3x=\cos 2x$.

6 1°) Soit a un réel fixé.
Discuter la résolution de l'équation $\sin x+\cos x=a$ (E) suivant les valeurs de a.
2°) Résoudre l'équation (E) pour $a=1$.

7 Soit a, b, c trois réels quelconques.

1°) Démontrer que l'on a : $\sin a+\sin b+\sin c-\sin(a+b+c)=4\sin\frac{a+b}{2}\ \sin\frac{b+c}{2}\ \sin\frac{c+a}{2}$.

En déduire que si $a+b+c=\pi$, alors :

- $\sin a+\sin b+\sin c=4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$;
- $\sin 2a+\sin 2b+\sin 2c=4\sin a\ \sin b\ \sin c$.

2°) Démontrer que l'on a : $\cos a+\cos b+\cos c+\cos(a+b+c)=4\cos\frac{a+b}{2}\ \cos\frac{b+c}{2}\ \cos\frac{c+a}{2}$.

En déduire que si $a+b+c=\pi$, alors :

- $\cos a+\cos b+\cos c=1+4\sin\frac{a}{2}\ \sin\frac{b}{2}\ \sin\frac{c}{2}$;
- $\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c=-4\cos a\ \cos b\ \cos c-1$.

7bis Soit x, y, z trois réels

Démontrer que $4\sin\frac{x+y}{2}\ \sin\frac{y+z}{2}\ \sin\frac{z+x}{2}=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$.

En déduire que $\sin x+\sin y+\sin z=4\sin\frac{x+y}{2}\ \sin\frac{y+z}{2}\ \sin\frac{z+x}{2}\iff x+y+z=k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}=1$.

Indication : on pourra étudier la fonction $f : x\mapsto\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}$.

9 Soit p et q deux réels tels que $\cos p+\cos q\neq 0$.
Simplifier l'expression $\mathrm{A}=\frac{\sin p+\sin q}{\cos p+\cos q}$.

En déduire $\tan\frac{7\pi}{24}$.

10 Soit x et y deux réels quelconques.
Démontrer que l'on a : $\sin^2(x+y)=\sin^2 x+\sin^2 y+2\sin x\sin y\cos(x+y)$.

11 **Questions préliminaires :**
1°) Rappeler la formule donnant $\tan(a+b)$ où a et b sont deux réels tels que a, b, $a+b$ soient différents de $\frac{\pi}{2}+k\pi$, pour tout entier relatif k.

2°) Rappeler la formule donnant $\tan 2a$ où a est un réel différent de $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ et de $\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2}$, pour tout entier relatif k.

Applications :

1°) Calculer $\tan\frac{\pi}{12}$.

2°) Calculer $\tan\frac{\pi}{24}$. On pourra observer que $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2=4\left(2+\sqrt{3}\right)$.

12 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $1+3\sin x<\sqrt{3-4\cos^2 x}$.

13 Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^n\sin(k\theta)$ où n est un entier naturel et θ un réel fixé.

14 Soit a, b, A, B quatre réels.
On considère la fonction f définie par $f(x)=1-a\cos x-b\sin x-\mathrm{A}\cos 2x-\mathrm{B}\sin 2x$.
1°) Démontrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)\geqslant 0\right)\Rightarrow\left(a^2+b^2\leqslant 2\ \text{ et }\ \mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2\leqslant 1\right)$.

On pourra considérer $f(x)+f(x+\pi)$ et $f(x)+f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

2°) Étudier la réciproque.

15 Soit a, b, c trois réels quelconques.
Linéariser les expressions $\mathrm{A}=\cos a\cos b\sin c$ et $\mathrm{B}=\cos^2 a\sin b\sin c$.

16 Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose $P_n(x)=\prod_{k=0}^{n}\sin\left(2^k x\right)$.

1°) Démontrer, après avoir exprimé $P_1(x)$ en fonction de $\cos x$, que pour tout réel x, on a $\left|P_1(x)\right|\leqslant\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$.

2°) Démontrer que pour tout réel x, on a : $\left|\sin^2 x\times\sin 2x\right|\leqslant\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

3°) a) Démontrer que $\left[P_{n+1}(x)\right]^2=\sin^2 x\sin 2x\, P_{n-1}(4x)\,P_n(2x)$.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n et tout réel x, on a : $\left|P_n(x)\right|\leqslant\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

17 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\cos x\times\cos 2x=1$ (1) et $\cos x\times\sin 2x=1$ (2).

18 Déterminer le réel a tel que pour tout réel x on ait : $\sin(3x)=a\sin x\times\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\times\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

19 Étant donné un réel a, déterminer le maximum et le minimum de la fonction $f : x\mapsto\sin x+\sin(a-x)$.

20 Démontrer que pour tout triplet (x, y, z) de réels on a :
$\cos x\times\sin(y-z)+\cos y\times\sin(z-x)+\cos z\times\sin(x-y)=0$.
En déduire que pour tout triplet (x, y, z) de réels on a :
$\sin x\times\sin(y-z)+\sin y\times\sin(z-x)+\sin z\times\sin(x-y)=0$.

21 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\cos^2 x=\sin^2 2x$ et $4\sin^2 x+\cos 2x+\cos x=0$.

22 Calculer $\tan 1°\times\tan 2°\times\tan 3°\times\ldots\times\tan 89°$.

23 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{2}$.

24 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x+\left(\sqrt{3}-1\right)\sin x+\sqrt{3}-1=0$.

25 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(\sin x)=\dfrac{1}{2}$.

26 Démontrer que pour tout triplet $(a\,;b\,;c)$ de réels on a :
$\cos(a+b)\cos(a-b)+\cos(b+c)\cos(b-c)+\cos(c+a)\cos(c-a)=\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c$.

27 1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\pi\,;\pi]$ l'équation $\sin 4x=\sin x$.

2°) Vérifier que pour tout réel x, on a $\sin 4x-\sin x=\sin x\left(2\cos x+1\right)\left(4\cos^2 x-2\cos x-1\right)$.

3°) En déduire la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{5}$ puis de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

Réponses

3 $S=\left\{\pi\,;-\pi\,;0\,;\frac{\pi}{2}\,;-\frac{\pi}{2}\,;-\frac{2\pi}{3}\,;\frac{2\pi}{3}\right\}$

4 $S=\left[-\frac{\pi}{2}\,;-\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$

5 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\;\;;\;\;-\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}$

6 2°) $S=\{2k\pi,\,k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi,\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

7

2°) $\cos a+\cos b+\cos c+\cos(a+b+c)=2\cos\frac{a+b}{2}\quad\cos\frac{a-b}{2}+2\cos\left(\frac{a+b}{2}+c\right)\quad\cos\frac{a+b}{2}$

$$\cos a+\cos b+\cos c+\cos(a+b+c)=2\cos\frac{a+b}{2}\left[\cos\frac{a-b}{2}+\cos\left(\frac{a+b}{2}+c\right)\right]$$

$$\cos a+\cos b+\cos c+\cos(a+b+c)=4\cos\frac{a+b}{2}\quad\cos\frac{a+c}{2}\quad\cos\frac{b+c}{2}$$

8 $S=\{2k\pi,\,k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2k'\pi,\,k'\in\mathbb{Z}\right\}$

La racine carrée d'un nombre compris entre 0 et 1 est supérieure ou égale à son carré.

11 1°) $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$; $\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$; 2°) $\tan\frac{\pi}{24}=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$

Autre méthode (meilleure) :

On écrit $\frac{\pi}{24}=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{8}$ et on utilise la formule $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$.

14 1°) Penser à la transformation de $a\cos x+b\sin x$ (cet exercice nécessite d'avoir vu cette transformation en cours)
2°) Réciproque fausse : $f(x)=1-\sqrt{2}\cos x-\cos 2x$

15

$$A=\frac{1}{4}\left[\sin(a+b+c)+\sin(c-a-b)+\sin(c+a-b)+\sin(c+b-a)\right]$$

$$B=\frac{1}{4}\left[\sin(b-c)+\sin(b+c)\right]+\frac{1}{8}\left[\sin(b-c-2a)+\sin(b-c+2a)\right]+\frac{1}{8}\left[\sin(b+c-2a)+\sin(b+c+2a)\right]$$

16

$$P_n(x)=\prod_{k=0}^{n}\sin\left(2^k x\right)$$

1°) $P_1(x)=\sin x\times\sin 2x=2\sin^2 x\times\cos x=2\left(1-\cos^2 x\right)\times\cos x=2\left(\cos x-\cos^3 x\right)$

Le plus simple est d'étudier les variations de la fonction $f:x\mapsto x-x^3$ sur l'intervalle $[-1\,;1]$.

On fait une étude de fonction (en calculant la dérivée).

2°) Démontrer que $\forall x\in\mathbb{R}\quad\left|\sin^2 x\times\sin 2x\right|\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

On considère la fonction $g:x\mapsto\;\sin^2 x\times\sin 2x=2\cos x\sin^3 x$.

La fonction est impaire et périodique de période π.

On peut donc limiter l'étude de g à l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\quad g'(x)&=2\sin^2 x\left(3\cos^2 x-\sin^2 x\right)\\&=2\sin^2 x\left(4\cos^2 x-1\right)\\&=2\sin^2 x(2\cos x-1)(2\cos x+1)\end{aligned}$$

g' s'annule en 0 et en $\frac{\pi}{3}$.

$g(0)=0$; $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin^2\frac{\pi}{3}\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$; $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin^2\frac{\pi}{2}\times\sin\frac{2\pi}{2}=0$

3°)

a) Démontrer que $\forall x\in\mathbb{R}\quad\left[P_{n+1}(x)\right]^2=\sin^2 x\sin 2x\,P_{n-1}(4x)\,P_n(2x)$.

$$P_n(2x)=\prod_{k=0}^{n}\sin\left(2^k\times 2x\right)=\prod_{k=0}^{n}\sin\left(2^{k+1}x\right)=\prod_{k=1}^{n+1}\sin\left(2^k x\right)$$

$$P_{n-1}(4x)=\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(2^{k+2}x\right)=\prod_{k=2}^{n+1}\sin\left(2^k x\right)$$

$$\begin{aligned}\sin^2 x\sin 2x\,P_{n-1}(4x)\,P_n(2x)&=\sin^2 x\times\sin 2x\times\sin 2x\times\prod_{k=2}^{n+1}\sin^2\left(2^k x\right)\\&=\sin^2 x\times\sin^2 2x\times\prod_{k=2}^{n+1}\sin^2\left(2^k x\right)\\&=\left[P_{n+1}(x)\right]^2\end{aligned}$$

b) Démontrer que pour tout entier naturel n et tout réel x, on a : $\left|P_n(x)\right| \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

On effectue une récurrence double.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $Q(n)$: « $\forall x \in \mathbb{R} \quad \left|P_n(x)\right| \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

On démontre que $Q(0)$ est vraie.

$P_0(x) = \sin x$

On démontre que $Q(1)$ est vraie.

D'après la question 1°), on a : $\left|P_1(x)\right| \leqslant \frac{4}{3\sqrt{3}}$

$\frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{6\sqrt{3}} \qquad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^1 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{9}{6\sqrt{3}} \geqslant \frac{8}{6\sqrt{3}}$

$\left|P_1(x)\right| \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^1$

On suppose que $Q(n)$ et $Q(n-1)$ sont vraies.
On démontre que $Q(n+1)$ est vraie.

$$\left[P_{n+1}(x)\right]^2 \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n+2}$$

Donc $\left|P_{n+1}(x)\right| \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$.

$\boxed{17}$ On utilise le lemme suivant :

Soit x et y deux réels tels que $|x| \leqslant 1$ et $|y| \leqslant 1$.

$xy = 1 \Rightarrow x = y = 1$ ou $x = y = -1$

$S_1 = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \quad S_2 = \varnothing$

$\boxed{18}$ On transforme le membre de droite en somme.

On pose $A = \sin x \times \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \times \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\sin x \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos(2x+\pi)\right) \\ &= \frac{1}{4} \times \left(\sin x + \sin(3x) + \sin(-x)\right) \\ &= \frac{1}{4}\sin(3x) \end{aligned}$$

On a donc $a = 4$.

$\boxed{19}$ On transforme la somme en produit.

Le maximum de la fonction f est égal à $\left|2\sin\frac{a}{2}\right|$.

Le minimum de la fonction f et égal à $-\left|2\sin\frac{a}{2}\right|$.

$\boxed{22}$

$\mathrm{A} = \tan 1° \times \tan 2° \times \tan 3° \times ... \times \tan 89°$
On calcule A^2. On associe les termes deux par deux.
On trouve $\mathrm{A} = 1$.

$\boxed{26}$ Démontrer que pour tout triplet $(a\,; b, c)$ de réels on a :
$\cos(a+b)\cos(a-b) + \cos(b+c)\cos(b-c) + \cos(c+a)\cos(c-a) = \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c$.

On utilise les formules de transformations de produits en sommes.

Simplifier de même $\sin(a+b)\sin(a-b) + \sin(b+c)\sin(b-c) + \sin(c+a)\sin(c-a)$.

On pose $\mathrm{B} = \sin(a+b)\sin(a-b) + \sin(b+c)\sin(b-c) + \sin(c+a)\sin(c-a)$.

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$2\mathrm{B} = \cos 2b - \cos 2a + \cos 2c - \cos 2b + \cos 2a - \cos 2c$

$\mathrm{B} = 0$

QUESTIONS DE COURS

$\boxed{\mathbf{1}}$ Transformation de la somme $a\cos x + b\sin x$ en produit (a et b étant deux réels qui ne sont pas tous les deux nuls).

$\boxed{\mathbf{2}}$ Formules de transformations de sommes et de différence en produits.