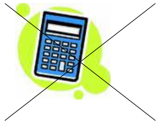
TS3

Interrogation écrite du vendredi 17 septembre 2010
(50 minutes)



Répondre très lisiblement et sans rature en écrivant au stylo à plume.

Prénom et nom : ………………………………………………….

Note : …… /20

I. (2 points) On note *f* la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln x+(\ln x)^2$.

Calculer les images par *f* de e, 1, $\frac{1}{\text{e}}$, $\sqrt{\text{e}}$. Donner les résultats directement dans le tableau ci-dessous sans détailler les calculs.

$f(\text{e})=$……….	$f(1)=$……….	$f\left(\frac{1}{\text{e}}\right)=$……….	$f\left(\sqrt{\text{e}}\right)=$……….

II. (2 points) Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien dans un repère $(\text{O},\vec{i},\vec{j})$.

1°) Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 ? …………………………………

2°) Que peut-on dire de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse e ? ………………………………………………

III. (2 points) Comparer les réels suivants en détaillant la démarche : 1°) ln 5 et ln 2 + ln 3 2°) $3\ln 2$ et $2\ln 3$

………

………

………

………

………

………

………

………

IV. (3 points) Donner l'ensemble des solutions des équations et de l'inéquation données ci-contre sans justifier.

$\ln(x^2+1)=\ln(x+2)+\ln 2$ (1)	$\ln(1-3x)<1$ (2)	$\ln(x+1)+\ln(x-1)=\ln 3$ (3)
$S_1=$……………………………..	$S_2=$……………………………..	$S_3=$……………………………..

V. (1 point) Le double du logarithme népérien d'un nombre est égal au logarithme népérien de la moitié de ce nombre. Quel est ce nombre ? On ne demande pas de détailler les calculs.

………

VI. (2 points) Déterminer les dérivées des fonctions *f* et *g* définies respectivement sur les intervalles I et J par les expressions données ci-dessous. Donner les résultats sous la forme d'un seul quotient simplifié.
Faire les calculs au brouillon et tirer les traits de fraction à la règle.

$f(x)=x-2\ln x$; $\text{I}=]0\,;+\infty[$; $f'(x)=$……………… | $g(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$; $\text{J}=\mathbb{R}$; $g'(x)=$………………

VII. (2 points) Compléter sans détailler les calculs : $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)^2=$………….. ; $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln x-(\ln x)^2\right]=$…………..

VIII. (4 points) Donner sans justifier les ensembles de définition des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 précisées ci-dessous. L'ensemble de définition de la fonction f_i pour $i\in\{1,\,2,\,3,\,4\}$ est noté $\mathcal{D}_i$.

$f_1(x)=2\ln(1+x)-\ln(2-x)$	$f_2(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$	$f_3(x)=\ln(9-x^2)$	$f_4(x)=\ln x+\sqrt{4-x}$
$\mathcal{D}_1=$…………………	$\mathcal{D}_2=$…………………	$\mathcal{D}_3=$…………………	$\mathcal{D}_4=$…………………

IX. (1 point) On considère la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln x-\sqrt{x}$.
Démontrer que le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $2-\sqrt{x}$. On ne demande pas d'étudier ce signe.

………

………

………

………

………

X. (1 point) Compléter l'égalité : $\log_2(16)=$…….. .

Corrigé de l'interrogation écrite du 17-9-2010

I.

$f(\text{e})=2$	$f(1)=0$	$f\left(\dfrac{1}{\text{e}}\right)=0$	$f\left(\sqrt{\text{e}}\right)=\dfrac{3}{4}$

$f(\text{e})=\ln\text{e}+(\ln\text{e})^2=1+1^2=2$

$f(1)=\ln 1+(\ln 1)^2=0+0^2=0$

$f\left(\dfrac{1}{\text{e}}\right)=\ln\dfrac{1}{\text{e}}+\left(\ln\dfrac{1}{\text{e}}\right)^2=-1+1^2=0$

$f\left(\sqrt{\text{e}}\right)=\ln\sqrt{\text{e}}+\left(\ln\sqrt{\text{e}}\right)^2=\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

II. Il s'agit de deux questions de cours.

1°) Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est égal à 1.

2°) La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse e passe par l'origine du repère.

On pouvait aussi dire que la tangente au point d'abscisse e est au-dessus de $\mathcal{C}$ (sécante au point d'abscisse e) mais cette propriété n'est pas propre à cette tangente puisque cette propriété est valable pour toutes les tangentes.

III.

1°) On a $\ln 2+\ln 3=\ln(2\times 3)=\ln 6$

On a $5<6$ donc comme la fonction ln est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $\ln 5<\ln 6$ d'où $\ln 5<\ln 2+\ln 3$.

2°) On a $3\ln 2=\ln 2^3=\ln 8$ et $2\ln 3=\ln 3^2=\ln 9$.
On a $8<9$ donc comme la fonction ln est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $\ln 8<\ln 9$ d'où $3\ln 2<2\ln 3$.

Remarque : On pouvait aussi procéder par différence (en étudiant le signe de la différence) mais c'était un peu maladroit.

IV.

$\ln\left(x^2+1\right)=\ln(x+2)+\ln 2 \quad (1)$	$\ln(1-3x)<1 \quad (2)$	$\ln(x+1)+\ln(x-1)=\ln 3 \quad (3)$
$S_1=\{3\,;-1\}$	$S_2=\left]\dfrac{1-\text{e}}{3}\,;\dfrac{1}{3}\right[$	$S_3=\{2\}$

Résolution de (1)

Conditions d'existence :

On doit avoir : $\begin{cases} x^2+1>0 \\ x+2>0 \end{cases}$ soit $x>-2$ (la 1ère condition est toujours réalisée).

On résout dans l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.

$(1) \Leftrightarrow \ln\left(x^2+1\right)=\ln\left[(x+2)\times 2\right]$

$\Leftrightarrow \ln\left(x^2+1\right)=\ln(2x+4)$

$\Leftrightarrow x^2+1=2x+4$

$\Leftrightarrow x^2-2x-3=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ (racine évidente) ou $x=3$ (racine obtenue par produit)

On a $-1\in\,]-2\,;+\infty[$ et $3\in\,]-2\,;+\infty[$.

L'ensemble des solutions de l'équation (1) est $S_1=\{3\,;-1\}$.

Résolution de (2)

Conditions d'existence :

On doit avoir : $1-3x>0$ soit $x<\dfrac{1}{3}$.

On résout dans l'intervalle $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{3}\right[$.

$(2) \Leftrightarrow \ln(1-3x)<\ln\text{e}$

$\Leftrightarrow 1-3x<\text{e}$

$\Leftrightarrow x>\dfrac{1-\text{e}}{3}$

L'ensemble des solutions de l'inéquation (2) est l'intersection des intervalles $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{3}\right[$ et $\left]\dfrac{1-\text{e}}{3}\,;+\infty\right[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation (2) est $S_2=\left]\dfrac{1-\text{e}}{3}\,;\dfrac{1}{3}\right[$.

Résolution de (3)

Conditions d'existence :

On doit avoir : $\begin{cases} x+1>0 \\ x-1>0 \end{cases}$ soit $x>1$.

On résout dans l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

$$\begin{aligned}(3) &\Leftrightarrow \ln\left[(x+1)(x-1)\right]=\ln 3\\ &\Leftrightarrow \ln\left(x^2-1\right)=\ln 3\\ &\Leftrightarrow x^2-1=3\\ &\Leftrightarrow x^2=4\\ &\Leftrightarrow x=2 \text{ ou } x=-2\end{aligned}$$

$2\in\,]1\,;+\infty[$ et $-2\in\,]1\,;+\infty[$.

L'ensemble des solutions de l'équation (3) est $S_3=\{2\}$.

V. On doit résoudre l'équation : $2\ln x=\ln\dfrac{x}{2}$ (1).

Condition d'existence : On résout l'équation dans $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow \ln\left(x^2\right)=\ln\frac{x}{2}\\ &\Leftrightarrow x^2=\frac{x}{2}\\ &\Leftrightarrow 2x^2-x=0\\ &\Leftrightarrow x(2x-1)=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ (impossible) ou } 2x-1=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ (impossible) ou } 2x-1=0\\ &\Leftrightarrow 2x=1\\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Conclusion : Le nombre cherché est $\mathbf{\dfrac{1}{2}}$.

VI.

$f(x)=x-2\ln x$	$\mathrm{I}=\,]0\,;+\infty[$	$f'(x)=1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-2}{x}$
$g(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$	$\mathrm{J}=\mathbb{R}$	$g'(x)=\dfrac{1}{\cancel{2}}\times\dfrac{\cancel{2}x}{1+x^2}=\dfrac{x}{1+x^2}$

VII.

$\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln x-(\ln x)^2\right]=-\infty$ (pas de forme indéterminée)

VIII.

On analyse les types de problèmes qui se posent pour chaque fonction.

$f_1(x)=2\ln(1+x)-\ln(2-x)$	$f_2(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$	$f_3(x)=\ln\left(9-x^2\right)$	$f_4(x)=\ln x+\sqrt{4-x}$
$D_1=\,]-1\,;2[$	$D_2=\,]-1\,;1[$	$D_3=\,]-3\,;3[$	$D_4=[0\,;4[$

$f_1(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases}1+x>0\\2-x>0\end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases}x>-1\\x<2\end{cases}$

si et seulement si $-1<x<2$

$f_2(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases}\dfrac{1+x}{1-x}>0\\1-x\neq 0\end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases}\dfrac{1+x}{1-x}>0\\x\neq 1\end{cases}$

On fait un tableau de signes.

$f_3(x)$ existe si et seulement si $9-x^2>0$

si et seulement si $(3-x)(3+x)>0$

On fait un tableau de signes.

$f_4(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases}x>0\\4-x\geqslant 0\end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases}x>0\\x\leqslant 4\end{cases}$

si et seulement si $0<x\leqslant 4$

IX. $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1 \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \times \sqrt{x}}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{x}}{2x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad 2x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $2 - \sqrt{x}$.

(On peut aussi dire comme l'a écrit un élève dans sa copie que « $2x$ n'a aucune influence sur le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ »).

X.

$\log_2(16) = 4$

$$\log_2(16) = \frac{\ln 16}{\ln 2} = \frac{\ln\left(2^4\right)}{\ln 2} = \frac{4\cancel{\ln 2}}{\cancel{\ln 2}} = 4$$

Attention : $\dfrac{\ln 16}{\ln 2}$ n'est pas égal à ln 8 (il n'y a pas de formule pour $\dfrac{\ln a}{\ln b}$, en particulier $\dfrac{\ln a}{\ln b}$ n'est pas égal à $\ln \dfrac{a}{b}$).