TS

Équations différentielles (1)

Plan du chapitre :

I. Introduction : relation liant une fonction et sa dérivée

1°) Exemple 1

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\quad x \mapsto e^x$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(x)\left(= e^x\right)$.

On dit que f vérifie l'équation différentielle $y' = y$.

(différentiel < dérivée)

2°) Exemple 2

a réel fixé

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\quad x \mapsto k e^{ax}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = k \times a e^{ax}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = a \times f(x)$.

On dit que f vérifie l'équation différentielle $y' = ay$.

II. Vocabulaire

1°) Définition

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I (souvent notée *y*) donnée sous la forme d'une égalité liant cette fonction et sa dérivée.

2°) Exemple

$$y' - \frac{3}{2}y = 0$$

Résoudre (ou intégrer) cette équation différentielle signifie déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) - \frac{3}{2} f(x) = 0$.

$f : x \mapsto e^{\frac{3}{2}x}$ est <u>une</u> solution particulière.

3°) Cas simples

- $y'=3$

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x+k \quad (k\in\mathbb{R})$.

- $y'=0$

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k \quad (k\in\mathbb{R})$.

- $y'=2x+3$

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+3x+k$ $(k\in\mathbb{R})$.

III. Solutions particulières

1°) Exemple 1

$y'-2y=7-2x^2 \quad (\mathrm{E})$

Démontrer que la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+x-3$ est une solution particulière de (E).

La fonction *f* est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=2x+1$

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)-2f(x)&=2x+1-2x^2-2x+6\\&=7-2x^2\end{aligned}$$

Donc la fonction *f* est une solution particulière de (E).

2°) Exemple 2

$y'+y=x+1 \quad (\mathrm{E})$

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x-1$.

La fonction *f* est-elle une solution particulière de (E) ?

La fonction *f* est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction affine).

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=2$

Par conséquent, $\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)+f(x)=2+2x-1$
$$\qquad =1+2x$$

Donc la fonction *f* n'est pas une solution particulière de (E).

(En effet, deux fonctions polynômes sont égales si et seulement si elles ont le même degré et les monômes de même degré sont égaux).

IV. Équations différentielles de la forme $y'=ay$ (a : réel fixé)

1°) Théorème fondamental

Les solutions de l'équation différentielle $y'=ay$ $(a\in\mathbb{R})$ sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ke^{ax}$ $(k\in\mathbb{R})$.

2°) Exercice

Résoudre (intégrer) l'équation différentielle $y'-2y=0 \quad (\mathrm{E})$.

Rédaction-type :

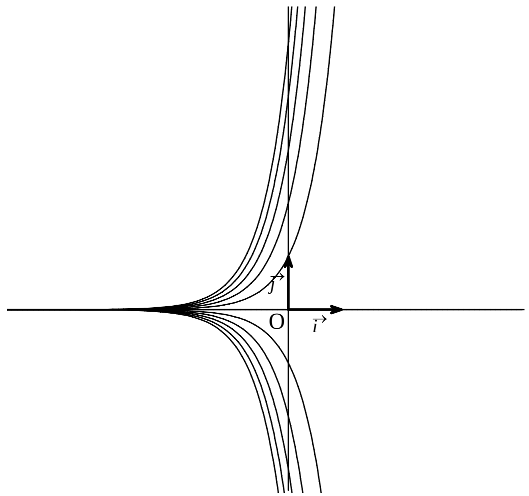
(E) s'écrit $y'=2y$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec $a=2$.

D'après le théorème fondamental, les solutions de (E) sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ke^{2x}$ $(k\in\mathbb{R})$.

On a une famille de solutions qui dépendent d'un paramètre *k*.
Il s'agit de fonctions associées à la fonction exponentielle.

Dans le plan muni d'un repère, on obtient un réseau de courbes intégrales.



Les courbes représentatives ont la même allure que la fonction exponentielle.

3°) Démonstration

$y' = ay$ (E) [a est un réel fixé]

Résoudre (E) consiste à déterminer les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que
$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = af(x) \quad (1)$.

On peut observer aisément que la fonction constante nulle est bien solution de (E).

On peut aussi vérifier aisément que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ est solution de (E).
Il en est de même des fonctions $x \mapsto k\mathrm{e}^{ax}$ où k est un réel.

$(1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) - af(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^{-ax} \times f'(x) + \left(-a\mathrm{e}^{-ax}\right) \times f(x) = 0$

On multiplie les deux membres de l'égalité par e^{-ax} ; on a bien équivalence car e^{-ax} est non nul.

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \left[f(x) \times \mathrm{e}^{-ax}\right]' = 0$

On observe que $\mathrm{e}^{-ax} \times f'(x) + \left(-a\mathrm{e}^{-ax}\right) \times f(x)$ est l'expression de la dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-ax} \times f(x)$ (dérivée d'un produit).

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \times \mathrm{e}^{-ax} = k$

On sait qu'une fonction dérivable sur un intervalle a une dérivée nulle si et seulement si cette fonction est constante sur cet intervalle.

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \dfrac{k}{\mathrm{e}^{-ax}}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = k\mathrm{e}^{ax}$

On utilise la propriété $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-ax}} = \mathrm{e}^{ax}$.

On en déduit que les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions $x \mapsto k\mathrm{e}^{ax}$ $(k \in \mathbb{R})$.

Comme on a raisonné par équivalences, on est certain d'avoir déterminé toutes les solutions de l'équation différentielle.

4°) Solution prenant une valeur donnée

• Propriété

Pour tout couple $(x_0\,;\,y_0)$ de réels, il existe une unique fonction f solution de l'équation différentielle $y' = ay$ telle que $f(x_0) = y_0$.

• Interprétation graphique

Il existe une unique fonction f solution de l'équation différentielle dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $(x_0\,;\,y_0)$.

• Démonstration

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{ax}$ $(k \in \mathbb{R})$.

On cherche k tel que $f(x_0) = y_0$ (1).

$(1) \Leftrightarrow k \times \mathrm{e}^{ax_0} = y_0$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{y_0}{\mathrm{e}^{ax_0}}$

$\Leftrightarrow k = y_0\mathrm{e}^{-ax_0}$

Il existe une unique fonction f solution de (E) telle que $f(x_0) = y_0$.
L'expression de f est donnée par $f(x) = \left(y_0\mathrm{e}^{-ax_0}\right) \times \mathrm{e}^{ax} = y_0\mathrm{e}^{a(x-x_0)}$.

N.B. : Cette règle correspond aux « conditions initiales » en physique ($t = 0$).

• Exemple

Déterminer la solution f de l'équation différentielle $y' = 3y$ (E) telle que $f(2) = 1$ (1).

Les solutions de (E) sont les fonctions $f : x \mapsto k\mathrm{e}^{3x}$ $(k \in \mathbb{R})$.

On cherche k tel que $f(2) = 1$ (1).

On a $f(2) = k\mathrm{e}^{3\times 2} = k\mathrm{e}^{6}$.

$(1) \Leftrightarrow ke^6 = 1$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{1}{e^6}$

$\Leftrightarrow k = e^{-6}$

La fonction cherchée a donc pour expression ke^{3x} pour $k = e^{-6}$ (autrement dit, on calcule ke^{3x} pour $k = e^{-6}$) c'est-à-dire $e^{-6} \times e^{3x}$. On peut écrire le résultat sous la forme d'une seule exponentielle en utilisant la propriété fondamentale de l'exponentielle, $e^{-6} \times e^{3x} = e^{3x-6}$.

La solution cherchée est la fonction $f : x \mapsto e^{3x-6}$.

On observera l'usage des articles « la » et « les ».
Il y a une infinité de solutions de l'équation différentielle (article « les ») mais il existe une seule solution qui vérifie la condition (article « la »).

V. Les équations différentielles en physique : la radioactivité

1°) Écriture

On considère une équation différentielle $y' = ay$ où a est une constante.

Si y est une fonction de la variable t, cette équation peut s'écrire $\dfrac{dy}{dt} = ay$ (notation différentielle de Leibniz).

2°) Exemple en radioactivité (transformation nucléaire)

On considère des noyaux d'un élément radioactif (exemple : datation au carbone 14).

À chaque instant t, on note $N(t)$ le nombre d'atomes qui restent (N dépend du temps t).

On considère alors la fonction $N : t \mapsto N(t)$.

On admet que cette fonction est dérivable.

On établit l'équation différentielle :

$\dfrac{dN}{dt} = -\lambda N$ où λ est la constante de radioactivité de l'élément radioactif considéré exprimée en s^{-1} si t est exprimé en secondes, ainsi que le montre une analyse dimensionnelle.

dérivée de N par rapport à t

Cette relation s'établit par des considérations physique en passant du macroscopique : $\dfrac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N$ au microscopique : $\dfrac{dN}{dt} = -\lambda N$.

La relation $\dfrac{dN}{dt} = -\lambda N$ est appelée loi de la radioactivité.

Cette relation s'écrit $N'(t) = -\lambda N(t)$, ou même $N' = -\lambda N$ en omettant la variable t.
Il s'agit d'une équation différentielle.

On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = ke^{-\lambda t}$ $(k \in \mathbb{R})$.

Donc, comme N vérifie cette équation différentielle, $N(t) = ke^{-\lambda t}$ $(k \in \mathbb{R})$.

On note N_0 le nombre d'atomes à l'instant $t = 0$, c'est-à-dire $N(0) = N_0$.

On a donc $k \times e^{-\lambda \times 0} = N_0$ soit $k \times 1 = N_0$, ce qui donne finalement $k = N_0$.

On obtient $\boxed{N(t) = N_0 \times e^{-\lambda t}}$ (loi de décroissance radioactive).

Temps de demi-vie :

Définition :

On appelle **temps de demi-vie** de l'élément radioactif l'instant noté $t_{1/2}$ au bout duquel il reste la moitié du nombre d'atomes initial.

Calculons $t_{1/2}$.

On doit résoudre l'équation $N(t) = \dfrac{N_0}{2}$ (1).

$(1) \Leftrightarrow \cancel{N_0} \times e^{-\lambda t} = \dfrac{\cancel{N_0}}{2}$ ($N_0 > 0$, donc il est bien autorisé de simplifier les deux membres)

$\Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \ln e^{-\lambda t} = \ln \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -\lambda t = -\ln 2$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$ (comme ln 2 et λ sont deux réels strictement positifs, le quotient est bien strictement positif)

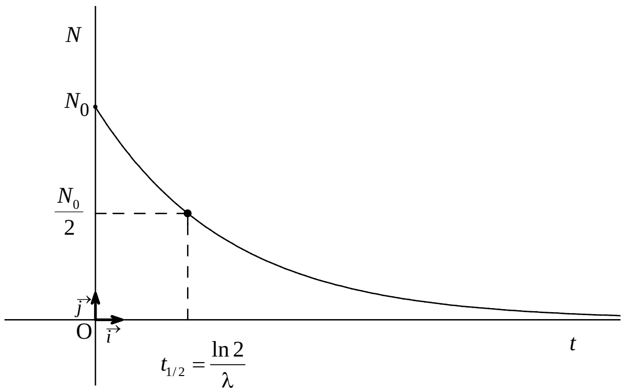
Formule du temps de demi-vie :

$$\boxed{t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}}$$

Illustration graphique :

On peut faire une étude rapide.
On utilise les fonctions du type $t \mapsto e^{-kt}$ (« modèle exponentiel »).
N est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ (décroissance exponentielle).

De plus, $N(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.
La courbe représentative de N admet donc l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en + ∞.



VI. Les équations différentielles en physique : cinétique chimique

Livre de sciences physiques pages 81 et 118 à 122

1°) Vitesse volumique de consommation d'un réactif et de formation d'un produit

Définitions :

On s'intéresse à une réaction chimique en solution de volume constant.
Les concentrations volumiques d'un réactif ou d'un produit sont des fonctions du temps *t*.
Les vitesses volumiques sont définies à l'aide de dérivées.

• La **vitesse volumique de consommation d'un réactif X** à un instant *t* est donnée par $v_{c,\,X} = -\dfrac{\mathrm{d}[X]}{\mathrm{d}t}$.

• La **vitesse volumique de formation d'un produit X** à un instant *t* est donnée par $v_{f,\,X} = \dfrac{\mathrm{d}[X]}{\mathrm{d}t}$.
Il s'agit d'une vitesse instantanée.

Il s'agit de vitesses instantanées.

Pour un réactif, [X] est une fonction décroissante du temps donc sa dérivée est négative.
La définition avec le signe – assure que la vitesse de consommation d'un réactif est un réel positif.

Graphiquement, ces vitesses s'interprètent facile à l'aide de coefficients directeurs (pentes) de tangente.

La vitesse de consommation d'un réactif X à un instant *t* est égale à l'opposé du coefficient directeur à la courbe représentative de [X] en fonction du temps au point d'abscisse *t*.

La vitesse de formation d'un produit X à un instant *t* est égale au coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de [X] en fonction du temps au point d'abscisse *t*.

2°) Cinétique d'ordre 1

Définition :

On dit que la vitesse de consommation d'un réactif X suit **la loi de vitesse d'ordre 1** lorsque cette vitesse à tout instant est proportionnelle à la concentration de X, c'est-à-dire qu'il existe une constante *k* strictement positive (constante volumique de vitesse) telle que $-\dfrac{\mathrm{d}[X]}{\mathrm{d}t} = k[X]$.

Propriété :

On a alors $[X](t) = [X](0)\mathrm{e}^{-kt}$.

$[X](0)$ désigne la concentration en X à l'instant 0.
Lorsque *t* tend vers + ∞, $[X](t)$ tend vers 0.

En passant au logarithme népérien, on obtient $\ln[X](t) = \ln[X](0) - kt$.
La fonction $t \mapsto \ln[X](t)$ est donc une fonction affine strictement décroissante et, par conséquent, sa représentation graphique dans un repère du plan est une droite de coefficient directeur strictement négatif.
Cette remarque permet de déterminer expérimentalement si une réaction chimique suit une loi cinétique d'ordre 1.

3°) Temps de demi-réaction

On utilise l'avancement.

On peut aussi parler de cinétique d'une épidémie comme on l'observe sur le site de l'IHU de Marseille aux alentours du 20 novembre 2020.