1ère L Option

Exercices sur calculs d'images et d'antécédents par une fonction

$\boxed{1}$ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-1)^2-9$.

Calculer les images par f des nombres : 2, –2 , 1, 0, 4, $1-\sqrt{3}$, $4-\sqrt{5}$.

$\boxed{2}$ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(3-2x)(x-1)$.

Calculer les images par f des nombres : 0, 1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$ et $1-\sqrt{2}$.

$\boxed{3}$ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\sqrt{2}-\frac{3}{2}$.

Calculer les images par f des nombres : 0, $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\boxed{4}$ On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{4-2x}{x+4}$.

Calculer lorsque c'est possible les images par f des nombres : –2, 2, –4, $-\frac{3}{2}$, 0, $-4+\sqrt{3}$, $\frac{7}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

$\boxed{5}$ On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{3x}{x^2-4}$.

Quelques erreurs se sont glissées dans le tableau de valeurs ci-après. Les découvrir et les rectifier.

x	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	5
$f(x)$	1,8	0	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{35}$	1	$\frac{9}{16}$	$-\frac{5}{7}$

$\boxed{6}$ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2-6x+4$.

1°) Calculer les images par f des nombres : –2, 0, 1, $\frac{1}{2}$ et 5.

2°) Déterminer s'il(s) existe(nt) le (ou les) antécédent(s) de 1 et 4 par f.

$\boxed{7}$ On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$.

1°) Calculer les images par f des nombres : 0, 1 et $\frac{1}{2}$.

2°) Déterminer s'il(s) existe(nt) le (ou les) antécédent(s) de $\frac{1}{2}$, 3 et 0 par f.

$\boxed{8}$ On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$.

1°) Calculer les images par f des nombres : 0, – 2 et 3.

2°) Déterminer s'il(s) existe(nt) le (ou les) antécédent(s) de –3, 3 et 1 par f.

Correction

$\boxed{1}$ $f(2)=-8$; $f(-2)=0$; $f(1)=-9$; $f(0)=-8$; $f(4)=0$; $f(1-\sqrt{3})=-6$; $f(4-\sqrt{5})=5-6\sqrt{5}$.

Solution détaillée :

$f(2)=(2-1)^2-9=1^2-9=1-9=-8$

$f(-2)=(-2-1)^2-9=9-9=0$

$f(1)=(1-1)^2-9=0-9=-9$

$f(0)=(0-1)^2-9=1-9=-8$

$f(4)=(4-1)^2-9=3^2-9=9-9=0$

$f(1-\sqrt{3})=\left[(1-\sqrt{3})-1\right]^2-9=(-\sqrt{3})^2-9=3-9=-6$

$f(4-\sqrt{5})=(4-\sqrt{5}-1)^2-9=(3-\sqrt{5})^2-9=9-6\sqrt{5}+5-9=5-6\sqrt{5}$

$\boxed{2}$ $f(0)=-3$; $f(1)=0$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$; $f\left(-\frac{3}{2}\right)=-15$; $f\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{8}$; $f(1-\sqrt{2})=-\sqrt{2}-4$

Solution détaillée :

$f(0)=(3-0)(0-1)=3\times(-1)=-3$

$f(1)=(3-2)(1-1)=1\times0=0$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=(3-1)\left(\frac{1}{2}-1\right)=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\left[3-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)\right]\left(-\frac{3}{2}-1\right)=(3+3)\times\left(-\frac{5}{2}\right)=6\times\left(-\frac{5}{2}\right)=-15$

$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(3-2\times\frac{5}{4}\right)\left(\frac{5}{4}-1\right)=\left(3-\frac{5}{2}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

$f(1-\sqrt{2})=(1+2\sqrt{2})\times(-\sqrt{2})=-\sqrt{2}+2\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=-\sqrt{2}-4$

$\boxed{3}$ $f(0)=-\frac{3}{2}$; $f(\sqrt{2})=\frac{1}{2}$; $f(\sqrt{8})=\frac{5}{2}$; $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{5}{2}$.

Solution détaillée :

$f(0)=0\sqrt{2}-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$

$f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2-\frac{3}{2}=2-\frac{3}{2}=\frac{4-3}{2}=\frac{1}{2}$

$f(\sqrt{8})=\sqrt{8}\times\sqrt{2}-\frac{3}{2}=\sqrt{16}-\frac{3}{2}=\sqrt{4^2}-\frac{3}{2}=4-\frac{3}{2}=\frac{8-3}{2}=\frac{5}{2}$

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}\right)-\frac{3}{2}=-1-\frac{3}{2}=\frac{-2-3}{2}=-\frac{5}{2}$.

$\boxed{4}$ $f(-2)=4$; $f(2)=0$; il n'est pas possible de calculer l'image de – 4 par *f* ; $f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{14}{5}$; $f(0)=1$;
$f\left(-4+\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}-2$; $f\left(\frac{7}{2}\right)=-\frac{2}{5}$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}$.

Solution détaillée :

$$f(-2)=\frac{4-2(-2)}{-2+4}=\frac{8}{2}=4$$
$$f(2)=\frac{4-2\times 2}{2+4}=\frac{0}{6}=0$$

Il n'est pas possible de calculer l'image de – 4 par *f*. En effet, un quotient ne peut avoir 0 pour dénominateur.

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{4-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)}{-\frac{3}{2}+4}=\frac{4+3}{\frac{-3+8}{2}}=\frac{7}{\frac{5}{2}}=\frac{14}{5}$$
$$f(0)=\frac{4-2\times 0}{0+4}=\frac{4}{4}=1$$
$$f\left(-4+\sqrt{3}\right)=\frac{4-2\left(-4+\sqrt{3}\right)}{-4+\sqrt{3}+4}=\frac{12-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\left(12-2\sqrt{3}\right)\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{12\sqrt{3}-6}{3}=\frac{\cancel{3}\times\left(4\sqrt{3}-2\right)}{\cancel{3}}=4\sqrt{3}-2$$
$$f\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{4-2\times\frac{7}{2}}{\frac{7}{2}+4}=\frac{4-7}{\frac{15}{2}}=\frac{-3}{\frac{15}{2}}=-3\times\frac{2}{15}=-\frac{3\times 2}{5\times 3}=-\frac{2}{5}$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4-2\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+4}=\frac{4-1}{\frac{9}{2}}=3\times\frac{2}{9}=\frac{3\times 2}{3\times 3}=\frac{2}{3}.$$

$\boxed{5}$ Erreurs pour $f(0)=0\neq\frac{3}{4}$, $f(-2)$ n'existe pas, $f\left(\frac{3}{2}\right)\neq\frac{9}{16}$, $f(5)\neq-\frac{5}{7}$.

$\boxed{6}$ 1°) $f(-2)=28$; $f(0)=4$; $f(1)=1$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}$; $f(5)=49$.

2°) L'antécédent de 1 par *f* est 1.
Les antécédents de 4 par *f* sont 0 et 2.

Solution détaillée :

1°)

$$f(-2)=3\times(-2)^2-6\times(-2)+4=12+12+4=28$$
$$f(0)=3\times 0^2-6\times 0+4=0-0+4=4$$
$$f(1)=3\times 1^2-6\times 1+4=3-6+4=1$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-6\times\left(\frac{1}{2}\right)+4=\frac{3}{4}-3+4=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}$$
$$f(5)=3\times 5^2-6\times 5+4=75-30+4=49$$

2°)

Pour déterminer le (ou les) antécédent(s) éventuel(s) de 1 par *f*, on résout l'équation $f(x)=1$.

$$3x^2-6x+4=1$$
$$3x^2-6x+3=0$$
$$3\left(x^2-2x+1\right)=0$$
$$3(x-1)^2=0$$
$$x-1=0$$
$$x=1$$

Pour déterminer le (ou les) antécédent(s) éventuel(s) de 4 par *f*, On résout l'équation $f(x)=4$.

$$3x^2-6x+4=4$$
$$3x^2-6x=0$$
$$3x^2-6x=0$$
$$3x(x-2)=0$$
$$x-2=0 \text{ ou } 3x=0$$
$$x=2 \text{ ou } x=0$$

$\boxed{7}$ 1°) $f(0)=-\frac{1}{2}$; $f(1)=\frac{2}{3}$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{5}$.

2°) L'antécédent de $\frac{1}{2}$ par *f* est $\frac{4}{5}$.
3 n'a pas d'antécédent par *f*.
L'antécédent de 0 par *f* est $\frac{1}{3}$.

Solution détaillée :

1°) $f(0)=\frac{3\times 0-1}{0+2}=-\frac{1}{2}$; $f(1)=\frac{3\times 1-1}{1+2}=\frac{3-1}{3}=\frac{2}{3}$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\times\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+2}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{1}{5}$.

2°)

Pour déterminer le (ou les) antécédent(s) éventuel(s) de $\frac{1}{2}$ par *f*, on résout l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$.

$$\frac{3x-1}{x+2}=\frac{1}{2}$$
$$6x-2=x+2 \text{ (produit en croix)}$$
$$5x=4$$
$$x=\frac{4}{5}$$

Pour déterminer le (ou les) antécédent(s) éventuel(s) de 3 par *f*, on résout l'équation $f(x)=3$.

$\frac{3x-1}{x+2}=3$

$\cancel{3x}-1=\cancel{3x}+6$

3 n'a pas d'antécédent par *f*.

Pour déterminer le (ou les) antécédent(s) éventuel(s) de 0 par *f*, on résout l'équation $f(x)=0$.

$\frac{3x-1}{x+2}=0$

$3x-1=0$

$x=\frac{1}{3}$

$\boxed{8}$ 1°) $f(0)=-1$; $f(-2)=\frac{1}{3}$; $f(3)=\frac{1}{8}$.

2°) L'antécédent de –3 par f est $\sqrt{\frac{2}{3}}$ et $-\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Les antécédents de 3 par f sont $\frac{2}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Les antécédents de 1 par f sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

Solution détaillée :

1°) $f(0)=\frac{1}{0^2-1}=-1$; $f(-2)=\frac{1}{(-2)^2-1}=\frac{1}{3}$; $f(3)=\frac{1}{3^2-1}=\frac{1}{8}$.

2°)

Pour déterminer le (ou les) antécédent(s) éventuel(s) de – 3 par *f*, on résout l'équation $f(x)=-3$.

$\frac{1}{x^2-1}=-3$

$1=-3x^2+3$

$3x^2=2$

$x^2=\frac{2}{3}$

$x=\sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $x=-\sqrt{\frac{2}{3}}$

Pour déterminer le (ou les) antécédent(s) éventuel(s) de 3 par *f*, on résout l'équation $f(x)=3$.

$\frac{1}{x^2-1}=3$

$1=3x^2-3$

$3x^2=4$

$x^2=\frac{4}{3}$

$x=\sqrt{\frac{4}{3}}$ ou $x=-\sqrt{\frac{4}{3}}$

$x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ ou $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$

Pour déterminer le (ou les) antécédent(s) éventuel(s) de 1 par *f*, on résout l'équation $f(x)=1$.

$\frac{1}{x^2-1}=1$

$1=x^2-1$

$x^2=2$

$x^2=2$

$x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

Point-méthode

1. Pour trouver l’image d’un nombre par une fonction, on effectue un calcul.

Pour calculer l’image d’un nombre par une fonction, on remplace la variable par la valeur du nombre dont on cherche l’image.

2. Pour déterminer les antécédents d’un nombre par une fonction, on résout une équation.

Oubli : algorithmes et fonctions, utilisation de la calculatrice graphique pour obtenir une table de valeurs.