$1^{\text{ère}}$ S — Exercices sur les polynômes de degré quelconque

1 Déterminer la forme développée, réduite et ordonnée suivant les puissances décroissantes de x les polynômes suivants :

$A(x)=(x^2-1)^2-(x^2+x)^2$; $B(x)=(x+2)^3(x-2)$; $C(x)=(5-x)^3(x+5)^2$; $D(x)=(x^5-1)^2(x^5+1)^2$;

$E(x)=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$.

Essayer de trouver chaque fois la solution la plus astucieuse, c'est-à-dire la plus économique en calculs.
Vérifier avec la calculatrice en utilisant l'astuce qui consiste à remplacer x par π (ou e ou ln 2) et/ou avec logiciel de calcul formel ou le site dcode.

2 Les fonctions polynômes $f : x \mapsto (4x-3)^2+5x-7$ et $g : x \mapsto 2(8x^2+1)-19x$ sont-elles égales ?

3 On considère les polynômes $P(x)=2x^2-x+1$ et $Q(x)=x^3+2$.
Donner l'écriture développée réduite de $f(x)=P(x)Q(x)$ et $g(x)=Q(x+1)-Q(x)$.

4 1°) On considère la fonction f définie par $f(x)=\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)^2+\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)^2$.
La fonction f est-elle une fonction polynôme ?

2°) Même question avec la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2+1}$.

5 On considère le polynôme $f(x)=(x+1)^{2n}-x^{2n}-2x-1$ où n est un entier naturel quelconque non nul.

Vérifier que 0, -1 et $-\dfrac{1}{2}$ sont racines de $f(x)$.

6 On considère le polynôme $f(x)=2x^3-9x^2-8x+15$.

1°) Déterminer une racine « évidente » de $f(x)$.

2°) En déduire une factorisation de $f(x)$.

On veillera à rédiger très soigneusement.

3°) Déterminer les racines de $f(x)$. Vérifier en utilisant la calculatrice (rubrique « Equations »).

On peut aussi vérifier en utilisant un logiciel de calcul formel ou le site dcode.

7 On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)(x+3)}$.

1°) Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

2°) Déterminer deux réels a et b tels que $\forall x\in\mathcal{D}\quad f(x)=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+3}$.

8 Soit n un entier naturel non nul.
Développer, réduire et ordonner suivant les puissances décroissantes de x.

$P(x)=(x^n+2)(x^n-2)^2+2(x^n-2)(x^n+2)-(x^n-2)(x^n+2)$

$Q(x)=(x^{2n}-x^n)^2-(x^n-x)+(x^{2n}+1)^2$

9 Dans chaque cas, existe-t-il un réel m tel que

1°) 1 soit racine du polynôme $P(x)=2x^3-mx^2+x+1$?

2°) 2 soit racine du polynôme $Q(x)=x^4+5x^2-mx+6$?

10 On considère la fonction f définie par $f(x)=\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)^3+\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)^3$.

La fonction f est-elle une fonction polynôme ?

11 Quel est le degré du polynôme $P(x)=(m^2-1)x^3+(1-m)x^2+mx+2-m$? On discutera suivant les valeurs du paramètre m.

Réponses

$\boxed{1}$ Pour vérifier les résultats, on peut utiliser un logiciel de calcul formel.
$\mathrm{A}(x)=-2x^3-3x^2+1$; $\mathrm{B}(x)=x^4+4x^3-16x-16$; $\mathrm{C}(x)=-x^5+5x^4+50x^3-250x-625x+3125$;
$\mathrm{D}(x)=x^{20}-2x^{10}+1$; $\mathrm{E}(x)=x^4+1$.

Quelques réécritures pour simplifier les calculs :

Pour $\mathrm{B}(x)$, écrire : $\mathrm{B}(x)=\underbrace{(x+2)^2}_{\text{id. remarquable}}\underbrace{(x+2)(x-2)}_{\text{id. remarquable}}$ ou utiliser l'identité remarquable cubique $(a+b)^3$ pour développer $(x+2)^3$ mais cette dernière méthode est un peu plus longue et donc moins astucieuse.

Pour $\mathrm{C}(x)$, écrire : $\mathrm{C}(x)=(5-x)\left[(5-x)(5+x)\right]^2=(5-x)\left(25-x^2\right)^2=\ldots$

Pour $\mathrm{D}(x)$, penser à écrire : $\mathrm{D}(x)=\left[\left(x^5-1\right)\left(x^5+1\right)\right]^2=\left(x^{10}-1\right)^2$
« englober » tout dans un carré puis
appliquer l'identité remarquable
$(a+b)(a-b)$

Pour $\mathrm{E}(x)$, penser à écrire : $\mathrm{E}(x)=\left[\left(x^2+1\right)+x\sqrt{2}\right]\left[\left(x^2+1\right)-x\sqrt{2}\right]=\left(x^2+1\right)^2-\left(x\sqrt{2}\right)^2=\ldots$ (identité remarquable).

Solutions détaillées : voir plus loin.

$\boxed{3}$ $f(x)=2x^5-x^4+x^3+4x^2-2x+2$; $g(x)=3x^2+3x+1$ (remarque : $Q(x)=x^3+2$ donc
$Q(x+1)=(x+1)^3+2=x^3+3x^2+3x+1+2=x^3+3x^2+3x+3$; on utilise l'identité remarquable
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$)

$\boxed{4}$ Dans les deux cas, il faut commencer par donner l'ensemble de définition de *f*. C'est $\mathbb{R}$ dans les deux cas.

1°) On utilise les identités remarquables $(a+b)^2$ et $(a-b)^2$. On trouve : $f(x)=2x^2+4$ (polynôme du second degré incomplet en *x*).
2°) A priori, *g* est une fonction rationnelle (c'est-à-dire le quotient de deux fonctions polynômes).
On trouve : $g(x)=x^2-1$ (polynôme du second degré incomplet en *x*).
Ainsi, on peut dire que *g* est une fonction polynôme (ce qui n'était pas du tout évident à priori ; toute fonction polynôme est une fonction rationnelle mais la réciproque est fausse).

$\boxed{5}$ D'abord une tentation à laquelle il faut résister : chercher à développer $(1+x)^{2n}$ avec l'identité remarquable $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ c'est-à-dire écrire $(1+x)^{2n}=1+2x+x^{2n}$.
L'exposant est $2n$: ce n'est pas 2 ; l'identité remarquable ne s'applique pas (si $n=1$, l'exposant $2n$ est égal à 2, si $n=2$, l'exposant $2n$ est égal à 4, si $n=3$, l'exposant $2n$ est égal à 6 etc.).
Sinon, on trouve que $f(x)=0$ ce qui est évidemment faux.

On verra seulement l'année prochaine (avec la formule du binôme de Newton) comment développer $(1+x)^{2n}$.

Résolution proprement dite :

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=(x+1)^{2n}-x^{2n}-2x-1$

• **Vérifions que 0 est une racine (ou un zéro) du polynôme.**

On calcule $f(0)$.

$f(0)=(0+1)^{2n}-0^{2n}-2\times0-1=1^{2n}-1=1-1=0$ donc 0 est une racine du polynôme $f(x)$.

$1^{2n}=1$ car 1 élevé à n'importe quelle puissance est égale à 1 : $1\times1\times1\times\ldots\times1=1$.

• **Vérifions que – 1 est une racine du polynôme.**

On calcule $f(-1)$.

$f(-1)=(-1+1)^{2n}-(-1)^{2n}-2\times(-1)-1=0^{2n}-1+2-1=-1+2-1=0$ donc **– 1** est une racine du polynôme $f(x)$.

Explication pour $(-1)^{2n}$:
Il y a deux façons.
① On peut écrire $(-1)^{2n}=\left[(-1)^2\right]^n=1^n=1$.

② $2n$ est un entier pair (en effet, par définition, un entier pair est un multiple de 2).
On utilise le principe d'absorption des – par les exposants pairs.
$(-1)^{2n}=1$ (– 1 élevé à n'importe quelle puissance d'exposant pair donne 1)

• **Vérifions que $-\frac{1}{2}$ est une racine du polynôme.**

On calcule $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}+1\right)^{2n}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1=\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}-\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}\cancel{+1}-\cancel{1}=0$ donc – 1 est une racine du polynôme $f(x)$.

Comme $2n$ est un entier naturel pair, on peut enlever le signe –.

Attention aux problèmes de syntaxe : parenthèses pour les nombres négatifs et pour les fractions élevés à une puissance.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}=\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$$ (on peut même mettre $\frac{1}{4^n}$)

Conclusion : On peut dire que 0, 1 et $-\frac{1}{2}$ sont racines (ou des zéros) de $f(x)$.

Sur une feuille photocopiée, tous les calculs étaient notés en colonnes.

Il y avait aussi écrit :

Le nombre 2*n* est pair. En effet, c'est un multiple de 2.
Par conséquent :
$\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$: principe absorption des – par puissances paires.

La conclusion était rédigée ainsi :
Nous pouvons dire que 0, 1 et $-\frac{1}{2}$ sont racines de $f(x)$.

18-9-2020 (Terminale spécialité)

Une autre manière d'écrire peut être : $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n+1-1=0$.

$\boxed{6}$

1°) 1 est une racine évidente de $f(x)$ car $f(1)=2-9-8+15=0$
2°) On peut utiliser l'une des trois méthodes du cours : méthode des coefficients indéterminés, méthode par division euclidienne ou schéma de Hörner. On trouve : $f(x)=(x-1)(2x^2-7x-15)$.

3°) Les racines du polynôme sont $-\frac{3}{2}$, 1, 5.

Solution détaillée :

$\forall x\in\mathbb{R}\quad \boldsymbol{f(x)=2x^3-9x^2-8x+15}$

1°)

$$\begin{aligned}f(1)&=2-9-8+15\\&=0\end{aligned}$$

Donc 1 est une racine évidente (ou un zéro évident) de $f(x)$.

2°)
Comme 1 est racine de $f(x)$, $f(x)$ est factorisable par $x-1$.
Il existe donc un polynôme $P(x)$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=(x-1)P(x)$.
Comme $\deg\left[f(x)\right]=3$, on a : $\deg\left[P(x)\right]=2$.

Point à développer avec la règle du cours :

$\deg(PQ)=\deg P+\deg Q$

Ou : si $\deg P=n$ et $\deg Q=m$, alors $\deg(PQ)=n+m$.

On pose $P(x)=ax^2+bx+c$ où *a*, *b*, *c* sont trois réels tels que $a\neq 0$.

On pose $g(x)=(x-1)P(x)$.

$$\begin{aligned}g(x)&=(x-1)P(x)\\&=ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c\\&=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c\end{aligned}$$

$f=g$ si et seulement si $\begin{cases}a=2 & (1)\\ b-a=-9 & (2)\\ c-b=-8 & (3)\\ -c=15 & (4)\end{cases}$ (par identification des coefficients)

(4) donne $c=-15$.

Compte tenu de (1), (2) donne $b=-7$.

Pour les valeurs de *b* et *c* trouvées, l'équation (3) est vérifiée.

Le système est donc vérifié pour $a=2$, $b=-7$, $c=-15$.

On en déduit que $P(x)=2x^2-7x-15$.

Par suite, $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=(x-1)(2x^2-7x-15)$.

2e méthode :
On peut « deviner » le polynôme.
On effectue une petite recherche par calcul mental (et éventuellement au brouillon) et on écrit tout de suite $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=(x-1)(2x^2-7x-15)$.

3e méthode :

On effectue une division euclidienne de polynômes.

On vérifie avec le site dcode.

3°) Déterminons les racines de $f(x)$ dans $\mathbb{R}$.

On doit résoudre l'équation $f(x)=0 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow x-1=0$ ou $2x^2-7x-15=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $2x^2-7x-15=0$

Rédaction de début de 1ère :

Cette équation est successivement équivalente à :

$x-1=0$ ou $2x^2-7x-15=0$

$x=1$ ou $2x^2-7x-15=0$

Considérons le polynôme $2x^2-7x-15$ (on peut poser $a=\ldots$, $b=\ldots$, $c=\ldots$ mais cela n'est pas forcément utile, d'autant plus que cela introduit des lettres).
C'est un polynôme du second degré.

Son discriminant est égal à $\Delta=49+4\times15\times2=169$.

$\Delta>0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: x_1 et x_2.

$x_1=\dfrac{7+13}{4} \qquad x_2=\dfrac{7-13}{4}$

$x_1=5 \qquad x_2=-\dfrac{3}{2}$

Les racines (ou les zéros) du polynôme du polynôme $f(x)$ sont $-\dfrac{3}{2}$, 1, 5.

On effectue une vérification en résolvant l'équation $f(x)=0$, c'est-à-dire $2x^3-9x^2-8x+15=0$ avec la calculatrice.

Complément (question non posée dans l'énoncé) :

On peut donner une expression factorisée de $f(x)$ en polynômes du premier degré :

$$f(x)=2(x-1)(x-5)\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

On peut associer le 2 avec le dernier facteur de sorte que l'on n'ait plus de fraction (les facteurs sont des polynômes du premier degré dont les coefficients sont des entiers).

$$f(x)=(x-1)(x-5)(2x+3)$$

7 A revoir pour les contrôles

$$f : x \mapsto \frac{1}{(x-2)(x+3)}$$

1°) Déterminons l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de *f*.

On résout mentalement l'équation $(x-2)(x+3)=0$ (qui correspond aux valeurs interdites du quotient).

La résolution est évidente (résolution mentale ; il s'agit d'une équation produit nul) de sorte que l'on peut tout de suite donner la réponse.

$\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\,;-3\}$ (*f* est une fonction rationnelle)

- On donne $\mathcal{D}$ directement car on est dans un cas très simple où on peut résoudre l'équation de tête.
- *f* est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\,;-3\}$.

2°) Déterminons deux réels *a* et *b* tels que $\forall x\in\mathcal{D} \quad f(x)=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+3}$.

On utilise la méthode des coefficients indéterminés.

Utiliser une règle pour les traits de fractions.

On pose : $g(x)=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+3}$.

$$\forall x\in\mathcal{D} \quad g(x)=\frac{a(x+3)+b(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$
$$=\frac{ax+3a+bx-2b}{(x-2)(x+3)}$$
$$=\frac{x(a+b)+3a-2b}{(x-2)(x+3)}$$

On compare avec l'expression de $f(x)$.
Les dénominateurs sont égaux.
Pour que les numérateurs soient égaux, il faut et il suffit que le polynôme du numérateur soit le polynôme constant égal à 1.
Le polynôme du numérateur s'écrit aussi $0x+1$.

2 possibilités pour rédiger ensuite :

On identifie les coefficients des monômes de même degré au numérateur.
On obtient le système :

Ou

Par identification des coefficients, on obtient le système :

$\begin{cases} a+b=0 \\ 3a-2b=1 \end{cases}$ (système linéaire de deux équations à deux inconnues)

$\begin{cases} a=-b \\ 3a-2b=1 \end{cases}$ (résolution par substitution, c'est l'une des méthodes possibles)

$\begin{cases} a=-b \\ -5b=1 \end{cases}$

$\begin{cases} a=-b \\ b=-\dfrac{1}{5} \end{cases}$

$\begin{cases} a=\dfrac{1}{5} \\ b=-\dfrac{1}{5} \end{cases}$

On trouve : $a=\frac{1}{5}$; $b=-\frac{1}{5}$.

Ainsi : $\forall x \in \mathcal{D} \quad f(x)=\dfrac{1}{5(x-2)}-\dfrac{1}{5(x+3)}$.

En effet, $\forall x \in \mathcal{D} \quad f(x)=\dfrac{\frac{1}{5}}{x-2}+\dfrac{\frac{1}{5}}{x+3}$ d'où $\forall x \in \mathcal{D} \quad f(x)=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{x+3}$.

(ou éventuellement $\forall x \in \mathcal{D} \quad f(x)=\dfrac{5\times\frac{1}{5}}{5\times(x-2)}-\dfrac{5\times\frac{1}{5}}{5\times(x+3)}$) ce qui donne

$\forall x \in \mathcal{D} \quad f(x)=\dfrac{1}{5(x-2)}-\dfrac{1}{5(x+3)}$.

On fait ensuite la vérification (importante à faire pour détecter d'éventuelles erreurs).

Remarque concernant la forme $f(x)=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+3}$.

La forme sera toujours donnée.
Ce n'est pas à l'élève de la trouver.

Explication d'élève :

$f(x)=\dfrac{1}{(x-2)(x+3)}$ Là, y a 1.

Il n'y a aucun *x*.

On peut voir le 1 du numérateur comme égal à $0x+1$.

$g(x)=\dfrac{x(a+b)+3a-2b}{(x-2)(x+3)}$

Donc $a+b=0$ et $3a-2b$ ça fait 1.

$\boxed{8}$ $P(x)=x^{3n}-x^{2n}-4x^n+4$; $Q(x)=2x^{4n}-2x^{3n}+3x^{2n}-x^n+x+1$

Solution détaillée :

$P(x)=(x^n+2)(x^n-2)^2+2(x^n-2)(x^n+2)-(x^n-2)(x^n+2)$

$Q(x)=(x^{2n}-x^n)^2-(x^n-x)+(x^{2n}+1)^2$

Développement de $P(x)$

1ère méthode : méthode brutale

$$\begin{aligned}
P(x)&=(x^n+2)(x^n-2)^2+2(x^n-2)(x^n+2)-(x^n-2)(x^n+2)\\
&=(x^n+2)(x^n-2)^2+2(x^{2n}-4)-(x^n-2)(x^n+2)\\
&=(x^n+2)(x^{2n}-4x^n+4)+2x^{2n}-8-(x^{2n}-4)\\
&=x^{3n}-4x^{2n}+4x^n+2x^{2n}-8x^n+8+2x^{2n}-8-x^{2n}+4\\
&=x^{3n}-x^{2n}-4x^n+4
\end{aligned}$$

Il est judicieux de simplifier d'abord les deux derniers termes.

$$\begin{aligned}
P(x)&=(x^n+2)(x^n-2)^2+2(x^n-2)(x^n+2)-(x^n-2)(x^n+2)\\
&=(x^n+2)(x^n-2)^2+(x^n-2)(x^n+2)\\
&=(x^n+2)(x^{2n}-4x^n+4)+x^{2n}-4\\
&=x^{3n}-4x^{2n}+4x^n+2x^{2n}-8x^n+8+x^{2n}-4\\
&=x^{3n}-x^{2n}-4x^n+4
\end{aligned}$$

2e méthode : on factorise puis on développe

$$\begin{aligned}
P(x)&=(x^n+2)(x^n-2)^2+2(x^n-2)(x^n+2)-(x^n-2)(x^n+2)\\
&=(x^n+2)(x^n-2)\left[(x^n-2)+2-1\right] \quad \text{(on factorise puis on développe)}\\
&=(x^n+2)(x^n-2)(x^n-2+2-1)\\
&=(x^n+2)(x^n-2)(x^n-1)\\
&=\left[(x^n)^2-2^2\right](x^n-1)\\
&=(x^{2n}-4)(x^n-1)\\
&=x^{3n}-x^{2n}-4x^n+4
\end{aligned}$$

N. B. : Ordonner suivant les puissances décroissantes de *x* : la plus grande puissance est x^{3n}.

Développement de $Q(x)$

$$\begin{aligned} Q(x) &= \left(x^{2n}-x^n\right)^2-\left(x^n-x\right)+\left(x^{2n}+1\right)^2 \\ &= x^{4n}-2x^{3n}+x^{2n}-x^n+x+x^{4n}+2x^{2n}+1 \\ &= 2x^{4n}-2x^{3n}+3x^{2n}-x^n+x+1 \end{aligned}$$

$\boxed{9}$ 1°) $m=4$; 2°) $m=21$

Rédaction type :

« … est racine de $P(x)$ si et seulement si $P(....)=0$
si et seulement si ….. »

Solution détaillée :

1°) $P(x)=2x^3-mx^2+x+1 \quad (m\in\mathbb{R})$

Déterminons m tel que 1 soit une racine (ou un zéro) de $P(x)$.

1 est racine de $P(x) \Leftrightarrow P(1)=0 \quad (1)$

$$\begin{aligned} P(1) &= 2\times1^3-m\times1^2+1+1 \\ &= 2-m+2 \\ &= 4-m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 4-m=0 \\ &\Leftrightarrow m=4 \end{aligned}$$

Ancienne version :

On calcule $P(1)=2-m+1+1=4-m$.

On rédige ensuite par équivalences.

1 est racine de $P(x)$ si et seulement si $P(1)=0$
si et seulement si $m=4$

Variante :

1 est racine de $P(x)$ si et seulement si $P(1)=0$
si et seulement si $2-m+1+1=0$
si et seulement si $m=4$

2°) $Q(x)=x^4+5x^2-mx+6 \quad (m\in\mathbb{R})$

$Q(x)$ n'est pas un polynôme bicarré à cause du monôme $-mx$.
Un polynôme avec un monôme en x^4, un monôme en x^2 et un monôme constant.

Déterminons m tel que 2 soit une racine (ou un zéro) de $Q(x)$.

2 est racine de $Q(x) \Leftrightarrow Q(2)=0 \quad (2)$

$$\begin{aligned} Q(2) &= 2^4+5\times2^2-2m+6 \\ &= 16+20-2m+6 \\ &= 42-2m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow 42-2m=0 \\ &\Leftrightarrow 2m=42 \\ &\Leftrightarrow m=21 \end{aligned}$$

Ancienne version :

On calcule $Q(2)=2^4+5\times2^2-2m+6=16+20-2m+6=42-2m$.

2 est racine de $Q(x)$ si et seulement si $Q(2)=0$
si et seulement si $42-2m=0$
si et seulement si $2m=42$
si et seulement si $m=21$

Variante :

2 est racine de $Q(x)$ si et seulement si $Q(2)=0$
si et seulement si $2^4+5\times2^2-2m+6=0$
si et seulement si $16+20-2m+6=0$
si et seulement si $42-2m=0$
si et seulement si $2m=42$
si et seulement si $m=21$

$\boxed{10}$ $f(x)=\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)^3+\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)^3$

$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$ (condition importante à toujours vérifier pour avoir une fonction polynôme)

À priori il ne s'agit pas de l'expression d'une fonction polynôme à cause des racines carrées.

On pose $X=\sqrt{x^2+1}$.

En utilisant les identités remarquables cubiques $(a+b)^3$ et $(a-b)^3$ (et non a^3+b^3 qui donnerait des calculs plus longs), on obtient $f(x)=2+6X^2$ (c'est bien $f(x)$ qu'on exprime en fonction de x et non $f(X)$).

Donc, en remplaçant X par $\sqrt{x^2+1}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)&=2+6\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2\\&=2+6\left(x^2+1\right)\\&=6x^2+8\end{aligned}$$

f est donc une fonction polynôme du second degré (incomplète).

Solution détaillée :

À priori, d'après son expression, la fonction *f* est une fonction irrationnelle.
On va chercher si c'est une fonction polynôme.

Utiliser une règle pour les racines carrées.

On pose $X=\sqrt{x^2+1}$.

$$\begin{aligned}f(x)&=(1+X)^3+(1-X)^3\\&=1+3X+3X^2+X^3+1-3X+3X^2-X^3\\&=2+6X^2\end{aligned}$$

Or $X=\sqrt{x^2+1}$.

Donc

$$\begin{aligned}f(x)&=2+6\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2\\&=2+6\left(x^2+1\right)\\&=2+6x^2+6\\&=6x^2+8\end{aligned}$$

Donc *f* est une fonction polynôme incomplète.

• La calculatrice Numworks fournit $\left(1+\sqrt{\pi^2+1}\right)^3+\left(1-\sqrt{\pi^2+1}\right)^3=6\pi^2+8$ [on calcule en fait l'image de π par *f*] ce qui fournit une vérification du développement obtenu par calcul algébrique.
• On peut aussi utiliser des valeurs tests (ici la valeur 0).

Ancienne version :

On pose $y=\sqrt{x^2+1}$.

$$\begin{aligned}f(x)&=(1+y)^3+(1-y)^3\\&=1+3y+3y^2+y^3+1-3y+3y^2-y^3\\&=2+6y^2\\&=2+6\left(x^2+1\right)\\&=6x^2+8\end{aligned}$$

11

$$P(x)=\left(m^2-1\right)x^3+(1-m)x^2+mx+2-m$$

Il faut bien comprendre la question de l'exercice.

L'exercice ne consiste pas à chercher les racines de $P(x)$ (pas de racines évidentes de $P(x)$).

Le degré de $P(x)$ dépend de *m*.

On cherche à déterminer le degré de $P(x)$ suivant les valeurs de *m*.

On a une écriture développée réduite ordonnée suivant les puissances décroissantes de *x*.

On regarde les monômes en commençant par celui de plus grand exposant.

Le monôme de plus haut degré qui apparaît dans l'écriture développée de $P(x)$ est $\left(m^2-1\right)x^3$.
Le coefficient de x^3 est m^2-1.

Il y a donc deux cas :
soit $m^2-1=0$;
soit $m^2-1\neq 0$.

On cherche les cas quand $m^2-1=0$ ou $m^2-1\neq 0$.

$m^2-1=0$ si et seulement si $m=1$ ou $m=-1$

On va donc être obligé de distinguer les cas $m=1$ et $m=-1$.

On discute suivant les valeurs de *m*.

1er cas : $m\neq 1$ et $m\neq -1$

Dans ce cas, on a : $m^2-1\neq 0$.
Donc $\deg\left[P(x)\right]=3$.

2^e cas : $m=1$

Dans ce cas, on a $P(x)=(1^2-1)x^3+(1-1)x^2+1x+2-1$ soit $P(x)=0x^3+0x^2+x+1$ ce qui donne finalement $P(x)=x+1$.

Donc $\deg\left[P(x)\right]=1$.

3^e cas : $m=-1$

Dans ce cas, $P(x)=2x^2-x+3$.

Donc $\deg\left[P(x)\right]=2$.

- Le 1^er cas correspond au cas général.
- Les 2^e et 3^e cas sont des cas particuliers.

1^er cas : cas général

$\left.\begin{array}{l}2^{\text{e}}\ \text{cas}\\ 3^{\text{e}}\ \text{cas}\end{array}\right\}$: cas particuliers

Corrigé détaillé

1 Calculs de polynômes

On présente les calculs en colonnes.

On cherche la méthode la plus astucieuse à chaque fois.

On vérifie avec la calculatrice en utilisant l'astuce qui consiste à remplacer x par π (ou e ou ln 2).
On vérifie aussi en utilisant des valeurs tests.

Dans cet exercice, il n'y a aucune rédaction. Il s'agit uniquement de calculs.

$$\begin{aligned}\mathrm{A}(x)&=(x^2-1)^2-(x^2+x)^2\\&=(x^4-2x^2+1)-(x^4+2x^3+x^2)\\&=-2x^3-3x^2+1\quad\text{(polynôme de degré 3)}\end{aligned}$$

On peut éventuellement utiliser l'identité remarquable a^2-b^2.

Pour $\mathrm{B}(x)$, il y a deux méthodes possibles : soit on utilise l'identité remarquable cubique $(a+b)^3=...$ soit on isole un facteur pour effectuer un regroupement astucieux.

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(x)&=(x+2)^3(x-2)\\&=(x^3+6x^2+12x+8)(x-2)\quad\text{(on utilise l'identité remarquable cubique : }(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)\\&=(x-2)(x^3+6x^2+12x+8)\\&=x^4+4x^3-16x-16\quad\text{(polynôme de degré 4)}\end{aligned}$$

Les coefficients de l'identité remarquable s'obtiennent grâce au triangle de Pascal :

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Autre méthode plus astucieuse :

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(x)&=(x+2)^3(x-2)\\&=(x+2)^2(x-2)(x-2)\\&=(x+2)^2(x^2-2^2)\\&=(x^2+4x+4)(x^2-4)\\&=...\\&=x^4+4x^3-16x-16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{C}(x)&=(5-x)^3(x+5)^2\\&=(125-75x+15x^2-x^3)(x^2+10x+25)\end{aligned}$$

(on utilise l'identité remarquable cubique : $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$)

$=-x^5+5x^4+50x^2-625x+3125$ (polynôme de degré 5)

Autre méthode plus astucieuse :

$$\begin{aligned}\mathrm{C}(x)&=(5-x)^3(x+5)^2\\&=(5-x)(5-x)^2(5+x)^2\\&=(5-x)\left[(5-x)(5+x)\right]^2 \quad \text{(astuce d'associativité pour regrouper deux facteurs)}\\&=(5-x)(5^2-x^2)^2\\&=(5-x)(25-x^2)^2\\&=(5-x)(625-50x^2+x^4)\\&=-x^5+5x^4+50x^3-250x^2-625x+3125\end{aligned}$$

$$\mathrm{D}(x)=(x^5-1)^2(x^5+1)^2$$

1^{ère} méthode	2^e méthode (plus astucieuse)
$\mathrm{D}(x)=(x^{10}-2x^5+1)(x^{10}+2x^5+1)$ $=....$ $=x^{20}-2x^{10}+1$ (polynôme de degré 20)	$\mathrm{D}(x)=\left[(x^5-1)(x^5+1)\right]^2$ $=(x^{10}-1)^2$ $=x^{20}-2x^{10}+1$

Pour la méthode astucieuse de calcul $\mathrm{D}(x)$ qui consiste à écrire $\mathrm{D}(x)=\left[(x^5-1)(x^5+1)\right]^2$, on utilise la technique $(a-b)^n(a+b)^n=\left[(a-b)(a+b)\right]^n=(a^2-b^2)^n$.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(x)&=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)\\&=\left[(x^2+1)+x\sqrt{2}\right]\left[(x^2+1)-x\sqrt{2}\right]\\&=(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2 \quad \text{(identité remarquable } (a+b)(a-b)=a^2-b^2\text{)}\\&=x^4+1 \quad \text{(polynôme de degré 4 en } x\text{)}\end{aligned}$$

On vérifie tous ces résultats grâce à un logiciel de calcul formel.

Remarque :

On pourrait aussi factoriser $\mathrm{A}(x)$ (ce n'est pas demandé dans l'énoncé).

1^{ère} méthode :

$$\begin{aligned}\mathrm{A}(x)&=(x^2-1)^2-(x^2+x)^2\\&=(2x^2+x-1)(-1-x)\\&=-(2x^2+x-1)(1+x)\end{aligned}$$

Puis on pourrait factoriser le trinôme du second degré.

$$\begin{aligned}\mathrm{A}(x)&=-(2x-1)(x+1)(1+x)\\&=-(2x-1)(x+1)^2\end{aligned}$$

2^e méthode :

$$\begin{aligned}\mathrm{A}(x)&=\left[(x-1)(x+1)\right]^2-\left[x(x+1)\right]^2\\&=(x+1)^2\left[(x-1)^2-x^2\right]\\&=(x+1)^2(-2x-1)\\&=-(2x-1)(x+1)^2\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Égalité de fonctions polynômes

$f : x \mapsto (4x-3)^2+5x-7$; $g : x \mapsto 2(8x^2+1)-19x$

$\mathcal{D}_f=\mathcal{D}_g=\mathbb{R}$

Pour déterminer si les polynômes sont $f(x)$ et $g(x)$, la meilleure méthode consiste à développer séparément les deux expressions.
On développe et on réduit les deux expressions.

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \begin{aligned}f(x)&=(4x-3)^2+5x-7\\&=16x^2-24x+9+5x-7\\&=16x^2-19x+2\end{aligned}$$

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \begin{aligned}g(x)&=2(8x^2+1)-19x\\&=16x^2-19x+2\end{aligned}$$

On constate que $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=g(x)$.

Donc $f=g$.

Pour cet exercice, il est inutile de faire appel à la règle d'égalité de deux polynômes.

$\boxed{3}$ Calculs de polynômes

$P(x)=2x^2-x+1$; $Q(x)=x^3+2$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=P(x)Q(x)$ (ligne à écrire)

$$=\left(2x^2-x+1\right)\left(x^3+2\right)$$
$$=2x^5-x^4+x^3+4x^2-2x+2$$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad g(x)=Q(x+1)-Q(x)$ (ligne à écrire)

$=\left[(x+1)^3+2\right]-\left(x^3+2\right)$ (attention aux parenthèses pour $\left(x^3+2\right)$)

$$=x^3+3x^2+3x+1+2-x^3-2$$
$$=3x^2+3x+1$$

$\boxed{4}$ Reconnaissance de fonctions polynômes

1°) $f(x)=\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)^2+\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)^2$

$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$ car les deux quantités présentes sous les radicaux sont positives ou nulles.
À priori, la fonction *f* est une fonction irrationnelle.
On va chercher si c'est une fonction polynôme.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)^2+\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)^2$

$=x^2+1\cancel{-2\sqrt{x^2+1}}+1+x^2+1\cancel{+2\sqrt{x^2+1}}+1$ (voir ci-dessous)

$$=2x^2+4$$

Donc *f* est une fonction polynôme (du second degré).

N.B. : L'expression est incomplète en *x*.

Explication pour le développement de $\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)^2$ et de $\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)^2$:

On applique les identités remarquables $(a+b)^2$ et $(a-b)^2$ avec $a=\sqrt{x^2+1}$ et $b=1$.

On a : $\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)^2=\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-2\times\sqrt{x^2+1}\times1+1^2$.

2°) $g(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2+1}$

$\mathcal{D}_g=\mathbb{R}$

À priori, *g* est une fonction rationnelle. Nous allons étudier si elle ne serait pas en plus polynôme.

On utilise l'égalité : $x^4=\left(x^2\right)^2$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad g(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2+1}$

$=\dfrac{\left(x^2\right)^2-1^2}{\cancel{x^2+1}}$ (étape de réécriture qui fait apparaître l'identité remarquable a^2-b^2)

$$=\frac{\left(x^2-1\right)\cancel{\left(x^2+1\right)}}{\cancel{x^2+1}}$$
$$=x^2-1$$

Donc *g* est une fonction polynôme (du second degré).

N.B. : L'expression est incomplète en *x*.

Travail personnel

Séquence bac p.41 Tous les exercices.

Exercices utilisant un logiciel de calcul formel

Pour les exercices suivants, on utilisera un logiciel de calcul formel, par exemple XCas ou le site dcode.

Dans chaque cas, donner une factorisation du polynôme $P(x)$.
Vérifier cette factorisation « à la main » sur papier.

1 $P(x)=x^3-x^2-3x+2$.

2 $P(x)=2x^3-2x^2-8x+8$.

3 $P(x)=6x^3-x^2-4x+3$.

4 $P(x)=x^3-15x-4$.

5 $P(x)=3x^4-4x^3+1$.

1 Donner une factorisation du polynôme $P(x)=x^3-x^2-3x+2$ (on vérifie que 2 est une racine).

2 Donner une factorisation du polynôme $P(x)=2x^3-2x^2-8x+8$ (1 et 2 sont racines).

3 Donner une factorisation du polynôme $P(x)=6x^3-x^2-4x+3$ (– 1 est racine).

4 Donner une factorisation du polynôme $P(x)=x^3-15x-4$ (4 est racine).
Résoudre l'inéquation $P(x)>0$.

5 Donner une factorisation du polynôme $P(x)=3x^4-4x^3+1$ (1 est racine évidente).