TS

Exercices sur les équations différentielles (1)

1 On considère l'équation différentielle $\frac{y'}{3}+y=x^3$ (E).

Démontrer que la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}$ est une solution particulière de (E).

2 On considère l'équation différentielle $y'+5y=9\mathrm{e}^{-2x}$ (E).

Démontrer que la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3\mathrm{e}^{-2x}$ est une solution particulière de (E).

3 Résoudre l'équation différentielle $y'=3y$.

4 Résoudre l'équation différentielle $2y'=-y$.

5 Résoudre l'équation différentielle $2y'=5y$.

6 Déterminer la solution *f* de l'équation différentielle $y'+2y=0$ telle que $f(0)=1$.

7 Déterminer la solution *f* de l'équation différentielle $y'=7y$ telle que $f(1)=\mathrm{e}$.

Corrigé des exercices sur les équations différentielles (1)

1

$\dfrac{y'}{3}+y=x^3 \quad (\mathrm{E})$

Démontrons que la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-x^2+\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{9}$ est une solution particulière de (E).

Méthode : on commence par dériver *f*.

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=3x^2-2x+\dfrac{2}{3}$

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \frac{f'(x)}{3}+f(x)=\frac{3x^2-2x+\frac{2}{3}}{3}+x^3-x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}$$

$$=\cancel{x^2}-\cancel{\frac{2}{3}x}+\frac{2}{9}+x^3-\cancel{x^2}+\cancel{\frac{2}{3}x}-\frac{2}{9} \quad \text{(on simplifie aussi les } \frac{2}{9}\text{)}$$

$$=x^3$$

Donc la fonction *f* est une solution particulière de (E).

Attention à ne pas dire :
« $f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ » ou « $f(x)$ est une solution particulière de (E) ».

2

$y'+5y=9\mathrm{e}^{-2x} \quad (\mathrm{E})$

Démontrons que la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3\mathrm{e}^{-2x}$ est une solution particulière de (E).

La fonction *f* est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=3\times\left(-2\mathrm{e}^{-2x}\right)$$
$$=-6\mathrm{e}^{-2x}$$

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)+5f(x)=-6\mathrm{e}^{-2x}+5\times3\mathrm{e}^{-2x}$$
$$=-6\mathrm{e}^{-2x}+15\mathrm{e}^{-2x}$$
$$=9\mathrm{e}^{-2x}$$

Donc la fonction *f* est une solution particulière de (E).

$\boxed{\mathbf{3}}$

$y' = 3y \quad (\mathrm{E})$

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y' = ay$ avec $a = 3$.
D'après le théorème fondamental, les solutions de (E) sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{3x}$ $(k \in \mathbb{R})$.

N.B. : Ne pas écrire $S = \dots$

$\boxed{\mathbf{4}}$

$2y' = -y \quad (\mathrm{E})$

(E) s'écrit $y' = -\dfrac{1}{2}y$.
On reconnaît une équation différentielle de la forme $y' = ay$ avec $a = -\dfrac{1}{2}$.

D'après le théorème fondamental, les solutions de (E) sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ $(k \in \mathbb{R})$.

$\boxed{\mathbf{5}}$

$2y' = 5y \quad (\mathrm{E})$

(E) s'écrit $y' = \dfrac{5}{2}y$.
On reconnaît une équation différentielle de la forme $y' = ay$ avec $a = \dfrac{5}{2}$.

D'après le théorème fondamental, les solutions de (E) sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x}$ $(k \in \mathbb{R})$.

$\boxed{\mathbf{6}}$

$y' + 2y = 0 \quad (\mathrm{E})$
(E) s'écrit $y' = -2y$.
On reconnaît une équation différentielle de la forme $y' = ay$ avec $a = -2$.
D'après le théorème fondamental, les solutions de (E) sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{-2x}$ $(k \in \mathbb{R})$.

On cherche k tel que $f(0)=1 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow k\mathrm{e}^{-2\times 0}=1$$
$$\Leftrightarrow k\times 1=1$$
$$\Leftrightarrow k=1$$

La fonction f solution de (E) vérifiant $f(0)=1$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-2x}$.

$\boxed{\mathbf{7}}$

$y'=7y \quad (\mathrm{E})$

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec $a=7$.
D'après le théorème fondamental, les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\mathrm{e}^{7x}$ $(k\in\mathbb{R})$.

On cherche k tel que $f(1)=\mathrm{e} \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow k\mathrm{e}^{7\times 1}=\mathrm{e}$$
$$\Leftrightarrow k\times\mathrm{e}^{7}=\mathrm{e}$$
$$\Leftrightarrow k=\mathrm{e}^{-6}$$

La fonction f solution de (E) vérifiant $f(1)=\mathrm{e}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-6}\times\mathrm{e}^{7x}$ soit $f(x)=\mathrm{e}^{7x-6}$.

Commentaires sur les exercices $\boxed{\mathbf{6}}$ et $\boxed{\mathbf{7}}$:
La résolution s'effectue en 2 étapes : recherche de la solution générale d'abord ; recherche de la solution particulière sous la forme d'une chaîne d'équivalences ; enfin conclusion.

Classification des exercices par compétences

- Comprendre ce que signifie résoudre une équation différentielle (c'est déterminer toutes les fonctions …).

- Savoir déterminer si une fonction donnée est solution d'une équation différentielle.

- Savoir résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$.

- Savoir déterminer une solution d'équation différentielle du type $y' = ay$ vérifiant une condition initiale.

Ce chapitre sur les équations différentielles permet de travailler la rédaction en analyse (il est demandé d'apprendre les phrases de rédaction mot pour mot).