TS

Exercices sur la fonction exponentielle (1)

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x = e^{\frac{1}{x}}$.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$.

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} - 3e^{x+1} + 2e^2 = 0$.

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x + 4e^{-x} \leq 5$.

5 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ 2e^x - e^y = 3 \end{cases}$.

6 On considère la fonction $f : x \mapsto e^{x+4} - 2$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ à partir de la courbe Γ d'équation $y = e^x$. Expliquer.

2°) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et Γ.

7 On considère la fonction $f : x \mapsto e^{|x|}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Etudier la parité de f.

2°) Tracer $\mathcal{C}$.

8 On considère la fonction $f : x \mapsto e^x$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer l'équation réduite de la tangente T_a à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a (a réel quelconque).

2°) Déterminer l'abscisse du point A de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente passe par le point B(1, 0).

On rédigera ainsi

« $B \in T_a$ si et seulement si… ».

Tracer cette tangente.

9 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

2°) Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer $f'(x)$.

10 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

2°) Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer $f'(x)$.

11 Démontrer que, pour tout réel x, on a : $e^x \geqslant 1 + x$ en étudiant les variations d'une fonction auxiliaire.

12 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$.

1°) Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

2°) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en 0 en rédigeant convenablement (on détaillera bien les calculs en veillant à la présentation).

13 On considère la fonction $f : x \mapsto x + 3 - 2e^x$.

1°) Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f sans donner de détail.

2°) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ en précisant s'il s'agit d'une forme indéterminée.

14 On considère la fonction $f : x \mapsto e^{2x} - e^x + 1$.

1°) Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f sans donner de détail.

2°) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ en précisant s'il s'agit d'une forme indéterminée.

15 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x} - 1}{2x}$.

1°) Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

2°) Déterminer la limite de f en 0.

16 On considère la fonction $f : x \mapsto x + 1 + 4e^{-x}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique Δ ; étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.

Vérifier sur la calculatrice graphique.

17 On considère la fonction $f : x \mapsto (3 - x)e^x$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Étudier f (dérivée en donnant le résultat sous forme factorisée, limites et conséquences graphiques éventuelles, tableau de variations).

2°) Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous avec la calculatrice.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	2,5	3	3,25
$f(x)$ (valeur arrondie au centième)											

Tracer $\mathcal{C}$ et la tangente horizontale (par une double flèche) en prenant 1 cm pour unité graphique.

On placera avec précision les points où $\mathcal{C}$ coupe les axes de coordonnées.

18 On considère la fonction $f : x \mapsto e^{|\ln x|}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Exprimer $f(x)$ sans barres de valeur absolue.

2°) Tracer $\mathcal{C}$. Vérifier le tracé en utilisant une calculatrice graphique ou un logiciel de tracé de courbe sur ordinateur.

19 On considère la fonction $f : x \mapsto 3e^{-2x+5}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

2°) Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer $f'(x)$.

20 On considère la fonction $f : x \mapsto e^{3x} - 3e^{x} + 1$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Étudier f (ensemble de définition sans détailler, dérivée en donnant le résultat sous forme factorisée, tableau de variation, limites et conséquences graphiques éventuelles).
2°) Déterminer le point d'intersection A de $\mathcal{C}$ avec son asymptote horizontale Δ.
Calculer le coefficient directeur de la tangente T en ce point.
3°) Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à l'asymptote Δ.
4°) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous grâce à la calculatrice.

x	– 4	– 3,5	– 3	– 2,5	– 2	– 1,5	– 1	– 0,5	0	0,5	1
$f(x)$ (valeur arrondie au centième)											

Tracer $\mathcal{C}$, la tangente horizontale, Δ et la tangente T en prenant 2 cm pour unité graphique.
Vérifier le tracé en utilisant une calculatrice graphique ou un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.
On admettra sans démonstration que la courbe $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en + ∞.

21 On considère la fonction $f : x \mapsto x + 1 + \dfrac{4}{e^{x} + 1}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Étudier f (dérivée sous forme d'un seul quotient avec numérateur et dénominateur factorisés, tableau de variation, limites).
2°) a) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique Δ en +∞.
b) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ' d'équation réduite $y = x + 5$ pour asymptote oblique en – ∞.
3°) Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ et Δ'.
4°) Tracer $\mathcal{C}$, Δ, Δ' et la tangente horizontale (on observera qu'il s'agit d'ailleurs d'une tangente d'inflexion).
Pour le tracé de $\mathcal{C}$, on commencera par faire un tableau de valeurs avec la calculatrice (par exemple pour les valeurs de x allant de – 7 à 7 avec un « pas » de 1).

22 Soit a et b deux réels strictement positifs. Comparer $a^{\ln b}$ et $b^{\ln a}$.

23 Écrire plus simplement les nombres $A = 3^{-\frac{1}{\ln 3}}$ et $B = 2^{\frac{1}{\ln 4}}$.

24 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3^{x} \geqslant 4$.

25 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3^{x} = 4^{2x+1}$.

26 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2^{x+1} - 10 \times 2^{x} + 12 = 0$.

Corrigé

1 $S = \{1 ; -1\}$

Solution détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x} = e^{\frac{1}{x}}$ (1).

Conditions d'existence :

On doit avoir $x \neq 0$.

On résout l'équation dans $\mathbb{R}^*$.

(1) $\Leftrightarrow \ln e^{x} = \ln e^{\frac{1}{x}}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{x}$

$\Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

Soit S l'ensemble des solutions de l'équation (1).

$S = \{1 ; -1\}$

Ecrire les barres fraction horizontalement.

2 Faire le changement d'inconnue $X = e^{x}$; l'équation s'écrit $X^2 - 3X + 2 = 0$.
Les racines de cette équation sont évidentes ; on n'est pas obligé de passer par le discriminant.
$S = \{0 ; \ln 2\}$

Solution détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$ (1).

On pose $X = e^{x}$.

L'équation s'écrit $X^2 - 3X + 2 = 0$.

Considérons le polynôme $X^2 - 3X + 2$.
C'est un polynôme du second degré.
Les racines sont 1 et 2 (racines évidentes).

Or $X = e^{x}$.

Donc

$(1) \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 2 \text{ ou } \mathrm{e}^x = 1$

$\Leftrightarrow \ln \mathrm{e}^x = \ln 2 \text{ ou } \ln \mathrm{e}^x = \ln 1$

$\Leftrightarrow x = \ln 2 \text{ ou } x = 0$

***S* = {0 ; ln 2}**

$\boxed{3}$ Écrire l'équation sous la forme $\left(\mathrm{e}^x\right)^2 - 3\mathrm{e} \times \mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^2 = 0$ puis utiliser le changement de variable $X = \mathrm{e}^x$. On trouve : $S = \{1 + \ln 2 \,;\, 1\}$.

Solution détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{x+1} + 2\mathrm{e}^2 = 0 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^x\right)^2 - 3\mathrm{e} \times \mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^2 = 0 \quad (1')$

On pose $X = \mathrm{e}^x$.

(1') s'écrit $X^2 - 3\mathrm{e}X + 2 = 0$.

Considérons le polynôme $X^2 - 3\mathrm{e}X + 2$.

C'est un polynôme du second degré.

Le discriminant est égal à :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-3\mathrm{e})^2 - 4 \times 2\mathrm{e}^2 \\ &= 9\mathrm{e}^2 - 8\mathrm{e}^2 \\ &= \mathrm{e}^2\end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

$$X_1 = \frac{-3\mathrm{e} + \sqrt{\mathrm{e}^2}}{2} \qquad X_2 = \frac{3\mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}^2}}{2}$$

$$X_1 = \frac{4\mathrm{e}}{2} \qquad X_2 = \frac{3\mathrm{e} - \mathrm{e}}{2}$$

$$X_1 = 2\mathrm{e} \qquad X_2 = \mathrm{e}$$

Or $X = \mathrm{e}^x$.

Donc

$(1) \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \mathrm{e} \text{ ou } \mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}$

$\Leftrightarrow x = \ln \mathrm{e} \text{ ou } x = \ln (2\mathrm{e})$

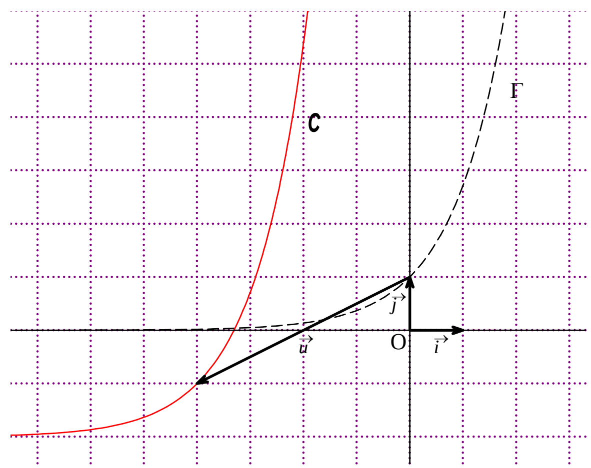
$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \ln 2 + 1$

***S* = {1 + ln 2 ; 1}**

$\boxed{4}$ $S = [0 \,;\, \ln 4]$ (voir correction détaillée plus loin) $\boxed{5}$ Le système n'est pas linéaire c'est-à-dire n'est pas de la forme $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ (à cause de la présence d'exponentielles). On effectue le changement d'inconnue $X = \mathrm{e}^x$ et $Y = \mathrm{e}^y$.
On se ramène ainsi à un système linéaire.

L'ensemble des solutions du système est $S = \left\{ \left(\ln \frac{8}{3}, \ln \frac{7}{3} \right) \right\}$ (bien noter la présence d'accolades et de parenthèses pour désigner le couple).

$\boxed{6}$ 1°) $\mathcal{C} = t_{-4\vec{i} - 2\vec{j}}(\Gamma)$; on passe de $\mathcal{C}$ à Γ par la translation de vecteur $-4\vec{i} - 2\vec{j}$.
Tracer Γ puis $\mathcal{C}$; faire apparaître le vecteur de la translation sur le graphique.



2°) Rédaction-type (à appendre) :
« Les coordonnées des points d'intersection éventuels de $\mathcal{C}$ et Γ sont solutions du système… ».
On peut conclure ainsi : $\mathcal{C} \cap \Gamma = \{\mathrm{A}\}$ avec $\mathrm{A}\left(\ln \frac{2}{\mathrm{e}^4 - 1}, \frac{2}{\mathrm{e}^4 - 1} \right)$.

$\boxed{7}$ 1°) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ est centré en 0 (il ne faut pas oublier cette condition importante) ;
$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = \mathrm{e}^{|-x|} = \mathrm{e}^{|x|} = f(x)$; la fonction f est donc paire.
2°) Comme le repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ est orthogonal, $\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

On peut vérifier le tracé sur la calculatrice graphique ou sur un ordinateur grâce à un logiciel de tracé de courbes.

$\boxed{8}$ 1°) L'équation réduite de T_a s'écrit $y = \mathrm{e}^a (x - a) + \mathrm{e}^a$. 2°) $x_{\mathrm{A}} = 2$.

9 1°) $\boldsymbol{D} = \mathbb{R}^*$; f n'est pas une fonction rationnelle car la fonction exponentielle n'est pas une fonction polynôme.

2°) $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ (formule : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$)

10 1°) $\boldsymbol{D} = \mathbb{R}^*$ 2°) $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = -\dfrac{e^x}{\left(e^x - 1\right)^2}$

11 Etudier le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto e^x - 1 - x$ (attention, pour étudier le signe de $f'(x)$, il faut résoudre une équation et deux inéquations) ; on établit ainsi que *f* admet un minimum global sur $\mathbb{R}$ égal à 0 obtenu pour $x = 0$. On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0$.

Par suite $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x - 1 - x \geq 0$ d'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq 1 + x$.

N.B. : Pour parler du maximum d'une fonction, on peut s'exprimer de plusieurs manières.

On peut dire que « *f* admet un maximum global sur $\mathbb{R}$ égal à 0 obtenu (ou atteint) pour $x = 0$ » ou que « 0 est le maximum global de *f* sur $\mathbb{R}$ obtenu (ou atteint) pour $x = 0$ ».

Rédaction en analyse :

Commencer en disant : « Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq 1 + x$. » (quantificateur $\forall$ bien utilisé).

12 1°) $\boldsymbol{D} = \mathbb{R}^*$ 2°) $\lim\limits_{-\infty} f = 0$; $\lim\limits_{0^+} f = +\infty$; $\lim\limits_{0^-} f = -\infty$

Rappel : Si $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = -\infty \end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

« $\dfrac{0}{\infty}$ » n'est pas une FI.

13 1°) $\boldsymbol{D} = \mathbb{R}$ 2°) $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ (mettre *x* en facteur dans l'expression de $f(x)$; attention de bien dire alors $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = ...$; on utilise la limite de référence $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$) ; $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ (il n'y a pas de forme indéterminée donc on ne transforme pas l'expression de $f(x)$).

Bien préciser le <u>domaine de validité</u> de l'expression lorsque l'on met *x* en facteur. *x* doit être non nul puisqu'il apparaît au dénominateur.
On doit toujours préciser le domaine de validité des expressions que l'on écrit.

14 1°) $\boldsymbol{D} = \mathbb{R}$

2°) En + ∞, on rencontre une FI du type « ∞ – ∞ ».

Il y a deux réécritures possibles : $f(x) = e^x\left(e^x - 1\right) + 1$ (factorisation partielle) ou $f(x) = e^{2x}\left(1 - \dfrac{1}{e^x} + \dfrac{1}{e^{2x}}\right)$ (factorisation totale).
La deuxième réécriture est cependant préférable.

On trouve $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
On peut aussi utiliser la technique du changement de variable en posant $X = e^x$.
Cette technique sera étudiée dans le chapitre sur les limites ; attendre donc pour faire cette méthode.

En – ∞, on ne rencontre pas de FI ; on trouve : $\lim\limits_{-\infty} f = 1$

15 1°) $\boldsymbol{D} = \mathbb{R}^*$; 2°) On rencontre une F.I. du type « $\dfrac{0}{0}$ ». On fait une réécriture $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{2} \times \dfrac{e^x - 1}{x}$.

On trouve : $\lim\limits_{0} f = 1$ (on utilise la limite de référence $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$).
On pourrait aussi utiliser le changement de variable *X* =2*x* mais mieux vaut attendre le chapitre qui permettra d'appliquer cette technique.

16 $f : x \mapsto x + 1 + 4e^{-x}$

Reconnaissance d'asymptote oblique :

On observe d'abord la forme de l'expression de la fonction de manière à déterminer l'asymptote oblique.

$$f(x) = \underbrace{x+1}_{\text{partie affine}} + \underbrace{4e^{-x}}_{\text{partie qui tend vers 0 quand } x \text{ tend vers } +\infty}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (x+1)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(4e^{-x}\right) = 0$ donc la courbe $\boldsymbol{C}$ admet la droite Δ d'équation *y* = *x* + 1 pour asymptote oblique en + ∞.

Attention : la droite Δ n'est pas asymptote $\boldsymbol{C}$ en – ∞ car $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (x+1)\right] = +\infty$ contrairement à ce que l'on rencontrait en 1ère S dans les études de fonctions où, en général, lorsqu'une courbe admettait une asymptote oblique en + ∞ elle admettait la même en – ∞ (la plupart des fonctions étaient des fonctions rationnelles).

Position de $\boldsymbol{C}$ par rapport à Δ :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - (x+1) = 4e^{-x}$
$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x} > 0$ (l'exponentielle de n'importe quoi est toujours strictement positive) et 4 > 0 donc
$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - (x+1) > 0$.

Donc $\boldsymbol{C}$ est toujours strictement au-dessus de Δ.

On peut vérifier ce résultat sur la calculatrice graphique ou sur un ordinateur à l'aide d'un logiciel de tracé de courbes.

Autre méthode (qui complique un peu) : transformer e^{-x} en $\dfrac{1}{e^x}$ à chaque fois

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (x+1)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(4e^{-x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4}{e^x}\right) = 0$ donc la courbe $\boldsymbol{C}$ admet la droite Δ d'équation *y* = *x* + 1 pour asymptote oblique en + ∞.

Position de $\boldsymbol{C}$ par rapport à Δ :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)-(x+1)=4\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{4}{\mathrm{e}^x}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^x>0$ et $4>0$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)-(x+1)>0$.

Donc $\mathcal{C}$ est toujours strictement au-dessus de Δ.

Quelques mots du vocabulaire usuel pour parler de la position d'une courbe par rapport à une droite :

$\mathcal{C}$ **« se trouve »** toujours strictement au-dessus de Δ.

$\mathcal{C}$ **« se situe »** toujours strictement au-dessus de Δ.

17 1°) $\mathcal{D}=\mathbb{R}$; $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)=(2-x)\mathrm{e}^x$ (pour calculer la dérivée, on utilise la formule de dérivation d'un produit : $(uv)'=u'v+uv'$) ; f est strictement croissante sur $]-\infty\,;2]$ et strictement décroissante sur $[2\,;+\infty[$; $\lim\limits_{+\infty} f=-\infty$; $\lim\limits_{-\infty} f=0$ (on rencontre une F.I. ; on fait une réécriture $f(x)=3\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x$) ; $f(2)=\mathrm{e}^2$; $\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $-\infty$; $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2 ; 2°) $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse 3 et l'axe des ordonnées au point B d'ordonnées 3. On admettra que $\mathcal{C}$ présente une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$, tournée vers le bas. On a : $\mathrm{e}^2=7,3890...$ (sur le graphique, mettre des pointillés et les valeurs exactes sur les axes).

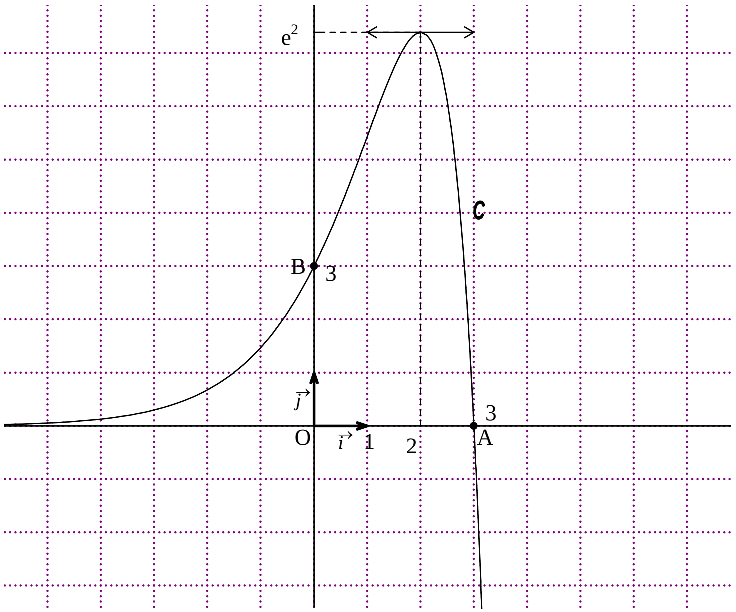
x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	2,5	3	3,25
$f(x)$ (valeur arrondie au centième)	0,05	0,1	0,3	0,7	1,5	3	5,4	7,4	6,1	0	–6,4

2 points à respecter

• Tracer la tangente au point d'abscisse 2 avec une double flèche.

• Mettre les valeurs 2 et e^2 du point en lequel la tangente est horizontale.

Cet exercice fournit un exemple de fonction dont la courbe représentative admet une asymptote horizontale mais qui n'est valable qu'en $-\infty$ alors qu'en première, la plupart du temps, lorsqu'une courbe admettait une asymptote horizontale, cette asymptote horizontale était valable aussi bien en $-\infty$ qu'en $+\infty$.



On vérifie le tracé en utilisant une calculatrice graphique ou un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur (attention : une calculatrice graphique ou un logiciel de tracé de courbe ne trace pas les tangentes !).

18 $f : x \mapsto \mathrm{e}^{|\ln x|}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$

Cet exercice est l'occasion de revoir la notion de valeur absolue.

$$|X| = \begin{cases} X \text{ si } X \geqslant 0 \\ -X \text{ si } X \leqslant 0 \end{cases}$$

On doit exprimer $|\ln x|$ sans barres de valeur absolue. On doit donc étudier le signe de $\ln x$ suivant les valeurs de x.

• Si $x \geq 1$, alors $\ln x \geq 0$ d'où $f(x)=\mathrm{e}^{\ln x}=x$.

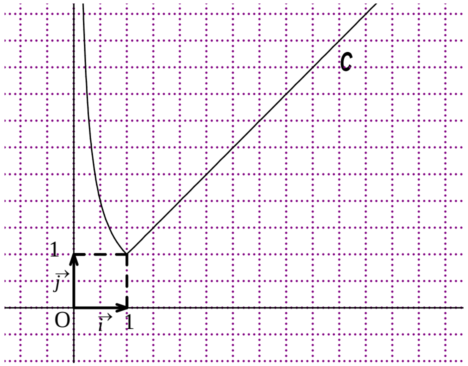
• Si $0<x\leq 1$, alors $\ln x \leq 0$ d'où $f(x)=\mathrm{e}^{-\ln x}=\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{x}$.

Détailler le tracé de $\mathcal{C}$:

$\mathcal{C}$ est confondue avec la courbe de la fonction inverse sur l'intervalle]0 ; 1] et avec la droite d'équation $y=x$ sur l'intervalle [1; +∞[.

On trace la droite d'équation $y=x$ et la courbe de la fonction inverse.

En repère orthonormé, la droite d'équation $y = x$ est la première bissectrice du repère.



Détailler le tracé de la courbe à l'aide d'un graphique.

La courbe C est la réunion d'un morceau d'hyperbole et d'une demi-droite.

19 1°) $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

2°) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les règles d'opérations algébriques sur les fonctions dérivables.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3\times\left(-2\,\mathrm{e}^{-2x+5}\right) = -6\,\mathrm{e}^{-2x+5}$ (on utilise la formule $\left(\mathrm{e}^{u}\right)' = u'\mathrm{e}^{u}$ ou $\left(\mathrm{e}^{ax+b}\right)' = a\mathrm{e}^{ax+b}$)

20 $\boldsymbol{f : x \mapsto \mathrm{e}^{3x} - 3\mathrm{e}^{x} + 1}$

1°) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3\mathrm{e}^{3x} - 3\mathrm{e}^{x} = 3\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right)$ (ou encore $f'(x) = 3\mathrm{e}^{3x} - 3\mathrm{e}^{x} = 3\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)$)

Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $\mathrm{e}^{2x} - 1$; il faut résoudre deux inéquations et une équation ($\mathrm{e}^{2x} - 1 > 0 \ldots$).

$\mathrm{e}^{2x} - 1 > 0$ (1)	$\mathrm{e}^{2x} - 1 < 0$ (2)	$\mathrm{e}^{2x} - 1 = 0$ (3)
(1) $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} > 1$ $\Leftrightarrow \ln \mathrm{e}^{2x} > \ln 1$ $\Leftrightarrow x > 0$	(2) $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} < 1$ $\Leftrightarrow \ln \mathrm{e}^{2x} < \ln 1$ $\Leftrightarrow x < 0$	(3) $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} = 1$ $\Leftrightarrow \ln \mathrm{e}^{2x} = \ln 1$ $\Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $3\mathrm{e}^{x}$		+		+	
Signe de $\mathrm{e}^{2x} - 1$		–	0	+	
Signe de $f'(x)$		–	0	+	
Variation de f	1	↘	-1	↗	$+\infty$

$f(0) = \mathrm{e}^{0} - 3\mathrm{e}^{0} + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$

La dérivée s'annule pour $x = 0$.

f est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;0\right]$ et strictement croissante sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

Limite en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{3x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-3\mathrm{e}^{x}+1\right) = +\infty\end{array}\right\}$$ donc en $+\infty$, on rencontre une FI du type « $\infty - \infty$ ».

Pour lever l'indétermination, il y a deux méthodes :

- mettre e^{3x} en facteur dans l'expression de f ce qui fait des fractions : $f(x) = \mathrm{e}^{3x}\left[1 - \dfrac{3}{\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{2}} + \dfrac{1}{\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{3}}\right]$

ou

- faire une factorisation partielle de l'expression de f : $f(x) = \mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{2x} - 3\right) + 1$ ce qui donne le résultat un peu plus simplement

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{2x} - 3\right) + 1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{2x}-3\right) = +\infty\end{array}\right\}$$ donc par limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{2x}-3\right)\right] = +\infty$.

Per suite, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

Limite en $-\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{3x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-3\mathrm{e}^{x}+1\right) = 1\end{array}\right\}$$ donc par limite d'une somme, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1}$.

On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = 1$ pour asymptote horizontale en $-\infty$.

Encore une fois, cet exercice fournit un exemple de fonction dont la courbe représentative admet une asymptote horizontale valable uniquement en $-\infty$.

2°) L'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de Δ est solution de l'équation $f(x) = 1$ (1).

(1) $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x} - 3\mathrm{e}^{x} + 1 = 1$
$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x} = 3\mathrm{e}^{x}$
$\Leftrightarrow \ln\left(\mathrm{e}^{3x}\right) = \ln\left(3\mathrm{e}^{x}\right)$
$\Leftrightarrow 3x = \ln 3 + x$
$\Leftrightarrow 2x = \ln 3$

(1) $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x} - 3\mathrm{e}^{x} + 1 = 1$
$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x} - 3\mathrm{e}^{x} = 0$
$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{2x} - 3\right) = 0$
$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x} = 0$ (impossible) ou $\mathrm{e}^{2x} - 3 = 0$
$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} = 3$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 3}{2}$

$\Leftrightarrow \ln e^{2x} = \ln 3$
$\Leftrightarrow 2x = \ln 3$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 3}{2}$

$A \in \Delta$ donc $y_A = 1$

$A\left(\dfrac{\ln 3}{2} ; 1\right)$

La tangente en A à $\mathcal{C}$ a pour coefficient directeur $f'\left(\dfrac{\ln 3}{2}\right)$.

$$f'\left(\frac{\ln 3}{2}\right) = 3e^{3\frac{\ln 3}{2}} - 3e^{\frac{\ln 3}{2}} = 3\left[\left(e^{\frac{\ln 3}{2}}\right)^3 - e^{\frac{\ln 3}{2}}\right] = 3\left[\left(e^{\ln\sqrt{3}}\right)^3 - e^{\ln\sqrt{3}}\right] = 3\left[\left(\sqrt{3}\right)^3 - \sqrt{3}\right] = 3\left(3\sqrt{3} - \sqrt{3}\right) = 6\sqrt{3}.$$

On utilise $\dfrac{\ln 3}{2} = \ln\sqrt{3}$ (règle sur le logarithme népérien d'une racine carrée : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad \ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$).

Autre façon :

$$f'\left(\frac{\ln 3}{2}\right) = 3e^{\frac{\ln 3}{2}}\left(e^{2\frac{\ln 3}{2}} - 1\right) = 3e^{\ln\sqrt{3}}\left(e^{\ln 3} - 1\right) = 3\sqrt{3}(3-1) = 6\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\ln 3}{2}\right) &= 3e^{\frac{\ln 3}{2}}\left(e^{2\frac{\ln 3}{2}} - 1\right) \\ &= 3e^{\frac{\ln 3}{2}}\left(e^{\ln 3} - 1\right) \\ &= 3e^{\frac{\ln 3}{2}}(3-1) \\ &= 6e^{\frac{\ln 3}{2}} \\ &= 6e^{\ln\sqrt{3}} \\ &= 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

Le coefficient directeur de la tangente en A à $\mathcal{C}$ est égal à $6\sqrt{3}$.

$\dfrac{\ln 3}{2} \approx 0{,}549$

3°) Étudions la position de $\mathcal{C}$ par rapport à l'asymptote Δ.

1ère façon : par calcul
$\Delta : y = 1$
On pose : $g(x) = f(x) - 1$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = e^x\left(e^{2x} - 3\right)$

$e^{2x} - 3 > 0$ (1)	$e^{2x} - 3 < 0$ (2)	$e^{2x} - 3 = 0$ (3)
(1) $\Leftrightarrow e^{2x} > 3$ $\Leftrightarrow \ln e^{2x} > \ln 3$ $\Leftrightarrow 2x > \ln 3$ $\Leftrightarrow x > \dfrac{\ln 3}{2}$	(2) $\Leftrightarrow e^{2x} < 3$ $\Leftrightarrow \ln e^{2x} < \ln 3$ $\Leftrightarrow 2x < \ln 3$ $\Leftrightarrow x < \dfrac{\ln 3}{2}$	(3) $\Leftrightarrow e^{2x} = 3$ $\Leftrightarrow \ln e^{2x} = \ln 3$ $\Leftrightarrow 2x = \ln 3$ $\Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 3}{2}$

x	$-\infty$		$\dfrac{\ln 3}{2}$		$+\infty$
Signe de $e^{2x} - 3$		–	0	+	
Signe de $g(x)$		–	0	+	

Rappel : $f(x)$ « correspond » à $\mathcal{C}$; 1 « correspond » à Δ.

- $\forall x \in \left]-\infty ; \dfrac{\ln 3}{2}\right[$ $\quad f(x) < 1$ donc $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de Δ sur l'intervalle $\left]-\infty ; \dfrac{\ln 3}{2}\right[$.
- $\forall x \in \left]\dfrac{\ln 3}{2} ; +\infty\right[$ $\quad f(x) > 1$ donc $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de Δ sur l'intervalle $\left]\dfrac{\ln 3}{2} ; +\infty\right[$.
- $\mathcal{C}$ et Δ sont sécantes au point d'abscisse $\dfrac{\ln 3}{2}$.

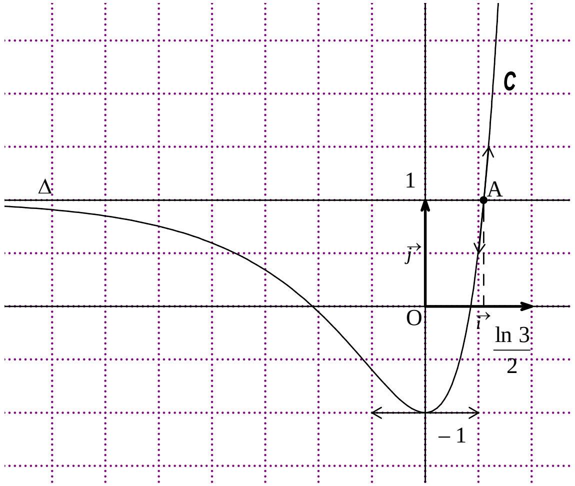
2e façon : plus simple

D'après le tableau de variation,

- $f(x) < 1$ pour $x \in \left]-\infty ; \dfrac{\ln 3}{2}\right[$ donc $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de Δ sur l'intervalle $\left]-\infty ; \dfrac{\ln 3}{2}\right[$.
- $f(x) > 1$ pour $x \in \left]\dfrac{\ln 3}{2} ; +\infty\right[$ donc $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de Δ sur l'intervalle $\left]\dfrac{\ln 3}{2} ; +\infty\right[$.

4°) On utilise la calculatrice (table).

x	–4	–3,5	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1
$f(x)$ (valeur arrondie au centième)	0,95	0,91	0,85	0,75	0,60	0,34	–0,05	–0,60	–1	0,54	12,93



La courbe **C** admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0 (représentée par une double flèche).
Cette tangente a pour équation $y = -1$.

On admettra que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions α et β dans $\mathbb{R}$ dont il n'est pas possible de donner de valeur exacte.
La calculatrice permet d'obtenir, comme on le verra plus tard, $\alpha = -1{,}05757...$ et $\beta = 0{,}4266320...$.
On place ainsi avec précision les deux points d'intersection de la courbe **C** avec l'axe des abscisses.

$\boxed{21}$ 1°) $\forall x \in \mathbb{R}\quad f'(x) = 1-\dfrac{4e^x}{\left(e^x+1\right)^2} = \left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$; la dérivée de f est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$ et s'annule en 0.

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Exemple de démarche possible au brouillon :

$$f(x) = \underbrace{x+1}_{\to +\infty} + \underbrace{\dfrac{4}{\underbrace{e^x+1}_{\to+\infty}}}_{\to 0}$$

Reste à faire la mise en forme au propre.

2°) a) $\Delta : y = x+1$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+5)\right]=0$

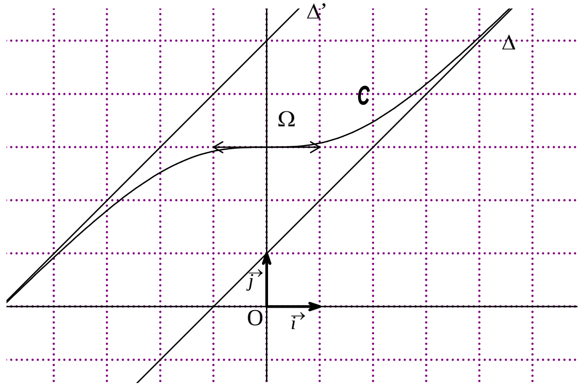
3°) **C** est au-dessus de Δ et au-dessous de Δ'.

4°) La courbe **C** admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

On commence par tracer les deux asymptotes obliques Δ et Δ' sans tracer **C**.

x	– 7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	– 2 ,00	– 1,01	– 0 ,03	0,93	1,81	2,52	2,92	3	3,08	3,48	4,19	5,07	6,03	7,01	8,00

valeurs arrondies au centièmes



Question supplémentaire :

Démontrer que **C** admet le point $\Omega(0, 3)$ pour centre de symétrie.

Utilisation du tableau de valeurs pour localiser le changement de signe.
On admettra que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
La calculatrice permet d'écrire : $\alpha = -4{,}97248...$

$\boxed{22}$ On doit utiliser la définition de x^α lorsque α est un réel quelconque et x un réel strictement positif : $x^\alpha = e^{\alpha\ln x}$. On obtient ainsi $a^{\ln b} = e^{\ln a\times\ln b}$ et $a^{\ln b} = e^{\ln b\times\ln a}$. On en déduit que l'on a : $a^{\ln b} = b^{\ln a}$.

$\boxed{23}$ $A = \dfrac{1}{e}$; $B = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ $\boxed{24}$ $S = \left[2\dfrac{\ln 2}{\ln 3};+\infty\right[$ $\boxed{25}$ $S = \left\{\dfrac{2\ln 2}{\ln 3 - 4\ln 2}\right\}$ $\boxed{26}$ $S = \left\{\dfrac{\ln 3}{\ln 2}-1\right\}$

Solutions détaillées :

4 Solution détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x + 4e^{-x} \leq 5$ (1).

On pose $X = e^x$.

L'inéquation (1) s'écrit $X + \dfrac{4}{X} \leq 5$ (1') (car $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$)

(1') $\Leftrightarrow \dfrac{X^2 + 4 - 5X}{X} \leq 0$

Considérons le polynôme $X^2 - 5X + 4$.

Son discriminant est égal à $\Delta = 25 - 16 = 9$.

Les racines de ce polynôme sont $X_1 = \dfrac{5+3}{2} = 4$ et $X_2 = \dfrac{5-3}{2} = 1$.

(On peut aussi voir que 1 est une racine évidente ou voir directement que $X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$).

X	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
SGN de X^2+4-5X *		$+$		$+$	0^{num}	$-$	0^{num}	$+$	
SGN de X		$-$	$0^{\text{déno}}$	$+$		$+$		$+$	
SGN de $\dfrac{X^2+4-5X}{X}$		$-$	$\Vert$	$+$	0^{num}	$-$	0^{num}	$+$	

Donc (1') $\Leftrightarrow X \in \left]-\infty\,;0\right[\cup [1\,;4]$.

Or $X = e^x$.

Donc (1) $\Leftrightarrow \underbrace{e^x < 0}_{\text{impossible}}$ ou $1 \leq e^x \leq 4$

$\Leftrightarrow \ln 1 \leq \ln e^x \leq \ln 4$

$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \ln 4$

L'ensemble des solutions de l'inéquation ***S* = [0 ; ln 4]**.

(On peut aussi écrire $S = [0\,;2\ln 2]$ car $\ln 4 = 2\ln 2$).

6 Solution détaillée :

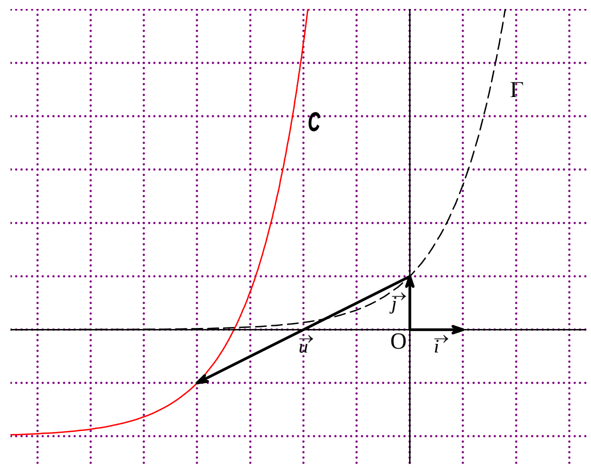
$f : x \mapsto e^{x+4} - 2$

1°) Traçons la courbe $\mathcal{C}$ à partir de la courbe Γ d'équation $y = e^x$.

On constate que $\forall\, x \in \mathbb{R}\quad f(x) = \exp(x+4) - 2$.

D'après le cours sur les fonctions associées, $\mathcal{C}$ est l'image de Γ par la translation de vecteur $-4\vec{i} - 2\vec{j}$.

On trace Γ puis $\mathcal{C}$; faire apparaître le vecteur de la translation sur le graphique.



2°) Déterminons les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et Γ.

Les coordonnées des points d'intersection éventuels de $\mathcal{C}$ et Γ sont solutions du système $\begin{cases} y = e^{x+4} - 2 & (1) \\ y = e^x & (2) \end{cases}$.

$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x+4} - 2 = e^x & (1') \\ (2) \end{cases}$

(1') $\Leftrightarrow e^x \times e^4 - e^x = 2$

$\Leftrightarrow e^x \times (e^4 - 1) = 2$

$\Leftrightarrow e^x = \dfrac{2}{e^4 - 1}$

$\Leftrightarrow x = \ln \dfrac{2}{e^4 - 1}$

$$\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\ln\dfrac{2}{e^4-1}\\ y=e^{\ln\frac{2}{e^4-1}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\ln\dfrac{2}{e^4-1}\\ y=\dfrac{2}{e^4-1}\end{cases}$$

Conclusion : $\mathcal{C} \cap \Gamma = \{A\}$ avec $A\left(\ln\dfrac{2}{e^4-1}, \dfrac{2}{e^4-1}\right)$.

$\boxed{7}$ **Solution détaillée :**

$f : x \mapsto e^{|x|}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

1°) Étudions la parité de f.

> **Rappel de la définition d'une fonction paire :**
>
> On dit qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est **paire** lorsque $\forall\, x \in \mathbb{R}\;\; f(-x) = f(x)$.

$\forall\, x \in \mathcal{D}_f\;\; f(-x) = e^{|-x|} = e^{|x|} = f(x)$ (**rappel :** $|x| = x$ si $x \geqslant 0$ et $|x| = -x$ si $x \leqslant 0$)

$\forall\, x \in \mathcal{D}_f\;\; f(-x) = f(x)$

On en déduit que f est paire.

2°) Tracé de $\mathcal{C}$.

Comme le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthogonal, $\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

Or $\forall\, x \in \mathbb{R}_+\;\; |x| = x$ donc $\forall\, x \in \mathbb{R}_+\;\; f(x) = e^x$

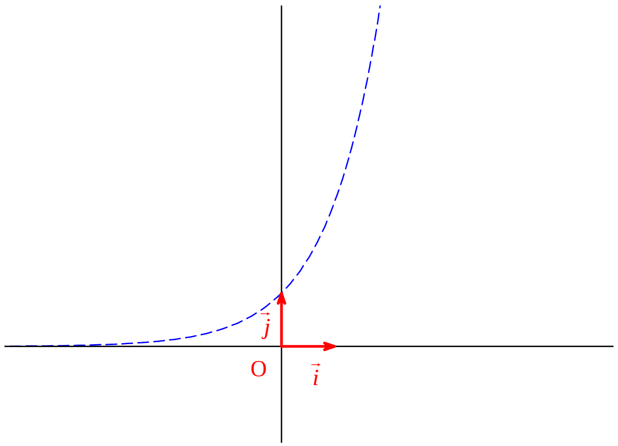
Donc la courbe $\mathcal{C}$ est confondue avec la courbe de la fonction exponentielle sur [0 ; +∞[.

Méthode pour tracer $\mathcal{C}$:

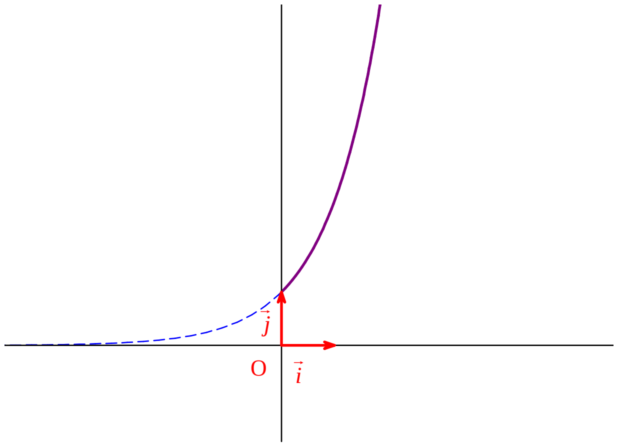
On trace la représentation graphique de la fonction exponentielle.
On sélectionne la partie de la courbe sur [0 ; +∞[.
On effectue la symétrie orthogonale de cette partie par rapport à l'axe des ordonnées.

La courbe $\mathcal{C}$ est la réunion des deux parties tracées précédemment sur [0 ; +∞[et sur]– ∞ ; 0].

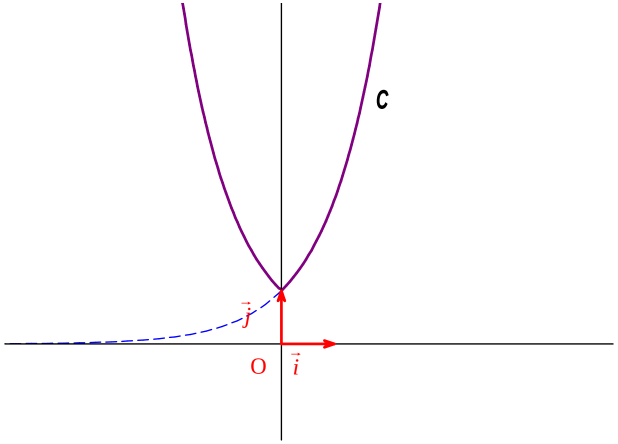
① On trace la courbe représentative de la fonction exponentielle (on place les points A(0 ; 1) et B(1 ; e) ; on peut ensuite placer d'autres points à l'aide de la calculatrice).



② On sélectionne la partie de la courbe pour $x \geqslant 0$.



③ On trace la symétrique de cette partie par rapport à l'axe des ordonnées.



La courbe représentative de la fonction *f* est la courbe en violet (on met le nom de la courbe en violet).

Cette courbe présente un « point anguleux » au point d'abscisse 0 (c'est-à-dire que la courbe admet deux demi-tangentes en ce point).

Pour obtenir la valeur absolue sur la calculatrice, on peut utiliser la touche Abs ou bien on utilise l'égalité $|x| = \sqrt{x^2}$ (mais c'est plus compliqué et moins intéressant).

On peut dire que la fonction *f* est décroissante sur l'intervalle sur]– ∞ ; 0] et croissante sur l'intervalle [0 ; + ∞[.

$\boxed{8}$ **Solution détaillée :**

$f : x \mapsto \mathrm{e}^x$

1°) Déterminons une équation de la tangente T_a à **C** au point M d'abscisse a ($a \in \mathbb{R}$).

On pourra noter que a est un paramètre.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \mathrm{e}^x$

Une équation de la tangente T_a à **C** au point M d'abscisse a $(a \in \mathbb{R})$ s'écrit

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

soit $y = \mathrm{e}^a(x-a) + \mathrm{e}^a$

soit $y = x\mathrm{e}^a - a\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^a$

soit $y = \mathrm{e}^a(x-a+1)$

2°) Déterminons l'abscisse du point A de **C** en lequel la tangente passe par le point B(1, 0).

$\mathrm{B} \in T_a \Leftrightarrow \mathrm{e}^a(1-a+1) = 0$

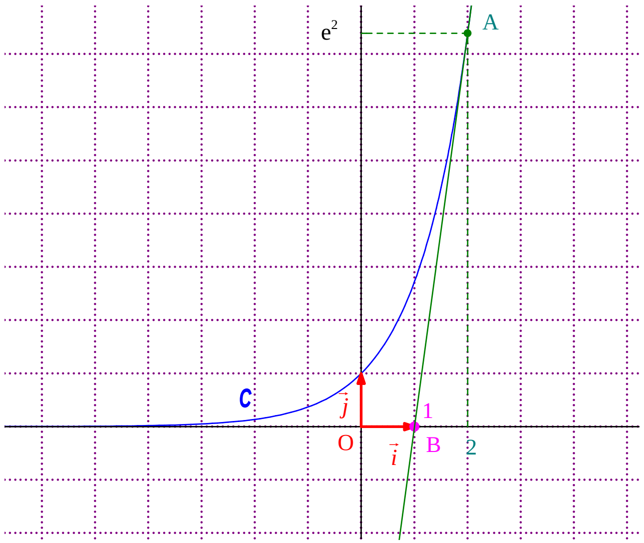
$\Leftrightarrow \mathrm{e}^a(2-a) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\mathrm{e}^a = 0}_{\text{impossible}} \text{ ou } a-2=0$

$\Leftrightarrow a = 2$

La tangente au point A de **C** d'abscisse 2 passe par le point B.

(Il faut bien comprendre que la valeur de a trouvée est en fait l'abscisse du point A.)



Version un peu plus courte :

1°) Déterminons une équation de la tangente T_a à **C** au point M d'abscisse a ($a \in \mathbb{R}$).

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \mathrm{e}^x$

Une équation de la tangente T_a à **C** au point M d'abscisse a $(a \in \mathbb{R})$ s'écrit $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

soit $y = \mathrm{e}^a(x-a) + \mathrm{e}^a$

2°) Déterminons l'abscisse du point A de **C** en lequel la tangente passe par le point B(1 ; 0).

$$\begin{aligned} B\in T_a &\Leftrightarrow y_B = e^a(x_B - a) + e^a \\ &\Leftrightarrow 0 = e^a(1-a)+e^a \\ &\Leftrightarrow e^a - ae^a + e^a = 0 \\ &\Leftrightarrow 2e^a - ae^a = 0 \end{aligned}$$

$a = 2$

La tangente au point A de $\mathcal{C}$ d'abscisse 2 passe par le point B.

(Il faut bien comprendre que la valeur de a trouvée est en fait l'abscisse du point A.)

$\boxed{9}$ $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$

1°) Déterminons l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de *f*.

$f(x)$ existe si et seulement si $x \neq 0$

L'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de *f* est $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$.

2°) Justifions que *f* est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculons $f'(x)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$, celle du dénominateur ne s'annulant pas.

.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$\boxed{10}$ $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

1°) Déterminons l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de *f*.

$f(x)$ existe si et seulement si $e^x - 1 \neq 0$

si et seulement si $e^x \neq 1$
si et seulement si $x \neq 0$

L'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de *f* est $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$.

2°) Justifions que *f* est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculons $f'(x)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$, celle du dénominateur ne s'annulant pas.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \frac{e^x \times (e^x - 1) - e^x \times e^x}{(e^x-1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$$

$\boxed{11}$ **Solution détaillée :**

Étudions le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto e^x - 1 - x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = e^x - 1$

Étudions le signe de $e^x - 1$ suivant les valeurs de *x*.

Méthode : Pour étudier le signe de cette expression, on résout deux inéquations et une équation.

$e^x - 1 > 0 \quad (1)$	$e^x - 1 < 0 \quad (2)$	$e^x - 1 = 0 \quad (3)$
$(1) \Leftrightarrow e^x > 1$ $\Leftrightarrow x > 0$	$(2) \Leftrightarrow e^x < 1$ $\Leftrightarrow x < 0$	$(3) \Leftrightarrow e^x = 1$ $\Leftrightarrow x = 0$

Faire les flèches de variations à la règle.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de *f*		$\searrow$	0	$\nearrow$	

La dérivée s'annule pour $x = 0$.
$f(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$ (on met cette valeur dans le tableau de variation).

On ne cherche pas les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition car elles ne servent pas pour répondre à la question.

D'après le tableau de variation, *f* admet un* minimum global sur $\mathbb{R}$ égal à 0 (obtenu pour $x = 0$).

On peut donc en conclure que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0$ soit $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x - 1 - x \geq 0$ ce qui équivaut à

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq 1 + x$.

N.B. : On emploie l'article « un ». L'article indéfini est parfaitement adapté ici même si son usage peut choquer. On voit que la fonction a un seul minimum sur IR.
Dans une phrase, il faudrait donc dire
« Le minimum global de f sur IR est égal à 0 ».

Cet exercice a valeur de méthode.

Retenir la méthode : on ne peut pas démontrer l'inégalité autrement (on peut essayer, on n'y arrivera pas).

$\boxed{12}$ $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$

1°) Déterminons l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de *f*.

$f(x)$ existe si et seulement si $x \neq 0$

L'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de *f* est $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$.

On peut aussi écrire : $\mathcal{D} =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.
Les bornes ouvertes de $\mathcal{D}$ sont $-\infty$, 0 et $+\infty$.

La fonction *f* est définie dans un voisinage de 0 à droite et à gauche.
On étudie donc la limite en 0^+ et en 0^-.

2°) Déterminons les limites de *f* en $-\infty$ et en 0.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} e^x = 1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} e^x = 1\\ \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0^-\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0\\ \lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0.$$

$\boxed{13}$ $f : x \mapsto x + 3 - 2e^x$

1°) L'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de *f* est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

2°)
Déterminons la limite de *f* en $+\infty$.

En $+\infty$, on rencontre une FI du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».
On procède à une réécriture de *f* (*x*) en mettant x en facteur de façon à utiliser une limite de référence.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = x\left(1 + \frac{3}{x} - 2\frac{e^x}{x}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right) = 1\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left(-2\dfrac{e^x}{x}\right) = -\infty \;\;{}^*\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'une somme } \lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{3}{x}-2\frac{e^x}{x}\right) = -\infty.$$

* On utilise la limite de référence $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}-2\dfrac{e^x}{x}\right) = -\infty\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un produit } \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Déterminons la limite de *f* en $-\infty$.

En $-\infty$, on ne rencontre pas de FI.
On travaille sur la forme de « base ».

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty}(x+3) = -\infty\\ \lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'une somme } \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty.$$

$\boxed{14}$ $f : x \mapsto e^{2x} - e^x + 1$

1°) L'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de *f* est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

2°)

Déterminons la limite de *f* en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} e^{2x} = +\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left(-e^x+1\right) = -\infty\end{array}\right\}\text{ donc en } +\infty\text{, on rencontre une FI du type « } \infty - \infty \text{ ».}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{2x}\left(1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{2x}}\right) \text{ (factorisation totale).}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} e^{2x} = +\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left(1-\dfrac{1}{e^x}+\dfrac{1}{e^{2x}}\right) = 1\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un produit } \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Déterminons la limite de *f* en $-\infty$.

En $-\infty$, on ne rencontre pas de FI.
On travaille sur la forme de « base ».

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0\end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$.

$\boxed{\textbf{21}}$ $x \mapsto x+1+\dfrac{4}{e^x+1}$

Solution détaillée :

1°) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les règles sur les opérations algébriques de fonctions dérivables.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=1-\frac{4e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$
$$=\frac{\left(e^x+1\right)^2-4e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$
$$=\frac{e^{2x}+2e^x+1-4e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$
$$=\frac{e^{2x}-2e^x+1}{\left(e^x+1\right)^2}$$
$$=\frac{\left(e^x-1\right)^2}{\left(e^x+1\right)^2}$$
$$=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)\geq 0$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0$
$\Leftrightarrow e^x=1$
$\Leftrightarrow x=0$

La dérivée de f s'annule pour $x = 0$.

Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$+$	
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

La dérivée s'annule pour $x = 0$.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Déterminons la limite de f en $+\infty$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(4)=4\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+1\right)=+\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'un quotient on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{e^x+1}=0$ (1)

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ (2)

D'après (1) et (2), par limite d'une somme, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Déterminons la limite de f en $-\infty$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}(4)=4\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+1\right)=1\end{array}\right\}$ donc par limite d'un quotient on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{e^x+1}=4$ (1)

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$ (2)

D'après (1) et (2), par limite d'une somme, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2°) a) **Démontrons que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$.**

c $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)-(x+1)=\dfrac{4}{e^x+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{e^x+1}=0$ donc la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = x + 1$ pour asymptote oblique en $+\infty$.

b) **Démontrons que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique Δ' en $-\infty$.**

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)-(x+5)=x+1+\frac{4}{e^x+1}-x-5$$
$$=\frac{4}{e^x+1}-4$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{e^x+1}=4\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-4)=-4\end{array}\right\}$$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+5)\right]=0$.

Donc la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ' d'équation $y = x + 5$ pour asymptote oblique en $-\infty$.

Remarque : il n'est pas possible de trouver cette deuxième asymptote sans indication.

3°) Étudions la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)-(x+1)=\dfrac{4}{e^x+1}$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad \dfrac{4}{e^x+1}>0$ donc $\mathcal{C}$ est toujours strictement au-dessus de Δ.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)-(x+5)=\frac{4}{e^x+1}-4$$
$$=\frac{4-4\left(e^x+1\right)}{e^x+1}$$
$$=\frac{-4e^x}{e^x+1}$$

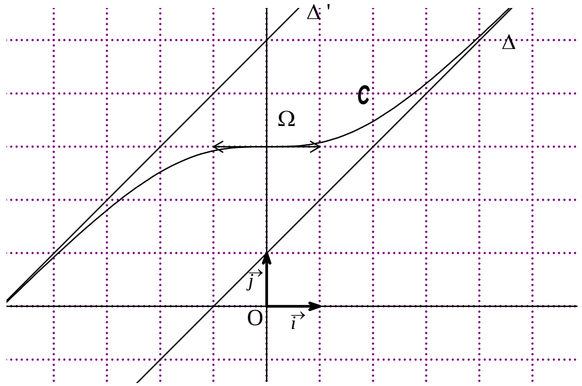
$\forall x\in\mathbb{R}\quad -\dfrac{4e^x}{e^x+1}<0$ donc $\mathcal{C}$ est toujours strictement au-dessous de Δ'.

4°) La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

On commence par tracer les deux asymptotes obliques Δ et Δ' sans tracer $\mathcal{C}$.

x	– 7	– 6	– 5	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	– 2 ,00	– 1,01	– 0 ,03	0,93	1,81	2,52	2,92	3	3,08	3,48	4,19	5,07	6,03	7,01	8,00

valeurs arrondies au centièmes



On trace la tangente au point Ω(0 ; 3).
On trace les asymptotes obliques Δ et Δ'.
On place les points correspondants au tableau de valeurs.
On relie les points le plus harmonieusement possible.

$\boxed{22}$ Comparons $a^{\ln b}$ et $b^{\ln a}$ avec $a > 0$ et $b > 0$.

On doit utiliser la définition de x^α lorsque α est un réel quelconque et x un réel strictement positif : $x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$.

D'après le cours,

$a^{\ln b}=e^{\ln a\times\ln b}$

$a^{\ln b}=e^{\ln b\times\ln a}$

Donc $a^{\ln b}=b^{\ln a}$.

$\boxed{23}$ Écrivons le plus simplement les nombres $A=3^{-\frac{1}{\ln 3}}$ et $B=2^{\frac{1}{\ln 4}}$.

$$A=3^{-\frac{1}{\ln 3}}=e^{-\frac{1}{\ln 3}\times\ln 3}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

$$B=2^{\frac{1}{\ln 4}}=e^{\frac{1}{\ln 4}\times\ln 2}=e^{\frac{1}{\ln\left(2^2\right)}\times\ln 2}=e^{\frac{1}{2\ln 2}\times\ln 2}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

$\boxed{24}$ Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3^x \geqslant 4$ (1).

$(1) \Leftrightarrow \ln 3^x \geqslant \ln 4$

$\Leftrightarrow x \ln 3 \geqslant \ln 4$ (on utilise l'égalité : $\ln x^\alpha = \alpha \ln x$*)

$\Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{\ln 4}{\ln 3}$

$S = \left[\dfrac{\ln 4}{\ln 3} ; +\infty \right[$

* On pourrait aussi écrire :

$\ln 3^x = \ln e^{x \ln 3} \geqslant \ln 4$

$\boxed{25}$ Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $3^x = 4^{2x+1}$ (1).

$(1) \Leftrightarrow \ln 3^x = \ln 4^{2x+1}$

$\Leftrightarrow \ln 3^x = (2x+1)\ln 4$

$\Leftrightarrow x \ln 3 = 2x \ln 4 + \ln 4$

$\Leftrightarrow x \ln 3 - 2x \ln 4 = \ln 4$

$\Leftrightarrow x (\ln 3 - 2 \ln 4) = \ln 4$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 4}{\ln 3 - 2\ln 4}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2\ln 2}{\ln 3 - 4\ln 2}$

Soit S l'ensemble des solutions de l'équation (1).

$S = \left\{ \dfrac{2\ln 2}{\ln 3 - 4\ln 2} \right\}$

$\boxed{26}$ Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $2^{x+1} - 10 \times 2^x + 12 = 0$ (1).

$(1) \Leftrightarrow 2^x(2-10)+12=0$

$\Leftrightarrow 2^x \times (-8) = -12$

$\Leftrightarrow 2^x = \dfrac{12}{8}$

$\Leftrightarrow 2^x = \dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \ln\left(2^x\right) = \ln \dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x \ln 2 = \ln \dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\ln \frac{3}{2}}{\ln 2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 3}{\ln 2} - 1$

Soit S l'ensemble des solutions de l'équation (1).

$S = \left\{ \dfrac{\ln 3}{\ln 2} - 1 \right\}$

Quelques commentaires sur les solutions détaillées :

$\boxed{7}$ **Solution initiale** plus longue pour le 1°)

$\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}$ donc $\boldsymbol{D}_f$ est centré en 0.

$\boxed{11}$ **Note du 22 septembre 2011 :**

$f : x \mapsto \text{e}^x - 1 - x$.

$f\,'(x) = \text{e}^x - 1$

La fonction $f\,'$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (soit par $u + \lambda$, soit par $f\,''(x)$).

$f\,'(0) = 0$

donc …

$\boxed{20}$ **Version initiale du corrigé :**

$\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ (mettre e^{3x} en facteur dans l'expression de f ce qui fait des fractions :

$f(x) = \text{e}^{3x}\left[1 - \dfrac{3}{\left(\text{e}^x\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\text{e}^x\right)^3}\right]$ ou faire une factorisation partielle de l'expression de f : $f(x) = \text{e}^x\left(\text{e}^{2x} - 3\right) + 1$ ce qui donne le résultat un peu plus simplement) ;

$\lim\limits_{-\infty} f = 1$; la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = 1$ pour asymptote horizontale en $-\infty$.

La tangente en A à $\mathcal{C}$ a pour coefficient directeur $f\,'\left(\dfrac{\ln 3}{2}\right) = 6\sqrt{3}$ (calcul à faire convenablement).