

1^{ère} L Option

Les inéquations à une inconnue

Objectif : revoir et consolider les méthodes de 2^e.

I. Les inéquations du premier degré

1°) Exemple

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $5 - (x+1) < 2(x+4)$.

$$5 - x - 1 < 2x + 8$$

$$4 - x < 2x + 8$$

$$-x - 2x < 8 - 4$$

$$\boxed{-3}x < 4$$

$$x \boxed{\geq} \frac{4}{-3}$$

On divise par -3 qui est négatif : on change le sens mais on garde le signe.

$$x > -\frac{4}{3}$$

On répond avec un intervalle.

Réponse :

Il y a 2 façons différentes de répondre au choix.

$$x \in \left] -\frac{4}{3}; +\infty \right[$$

ou

$$S = \left] -\frac{4}{3}; +\infty \right[$$

2°) Méthode générale

★ Même méthode que pour une équation du 1^{er} degré.

★ Mais attention :

On doit changer le sens d'une inégalité chaque fois que l'on multiplie ou que l'on divise les deux membres par un négatif.

II. Signe de $ax + b$

1°) Règle du signe de $ax + b$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax+b$	Signe contraire de a		Signe de a
		0	

1^{er} cas : $a > 0$

2^e cas : $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax+b$	-	0	+

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax+b$	+	0	-

2°) Exemples

a) Signe de $2x+3$

On cherche la valeur de x qui annule $2x+3$.

$$2x+3=0$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
Signe de $2x+3$	-	0	+

b) Signe de $-x+4$

On cherche la valeur de x qui annule $-x+4$.

$$-x+4=0$$

$$x = 4$$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
Signe de $-x+4$	+	0	-

III. Les inéquations avec tableaux de signes

1°) Exemple 1

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $(2x+1)(-3x+4) \geq 0$.

On ne développe pas.

$$\left. \begin{array}{l} 2x+1=0 \\ 2x=-1 \\ x=-\frac{1}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3x+4=0 \\ -3x=-4 \\ x=-\frac{4}{-3} \\ x=\frac{4}{3} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2x+1=0 \\ 2x=-1 \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}} \right\} \text{préparation du tableau que l'on peut cacher}$$

à côté
surtout ne pas mettre de « ou »

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$	
SGN de $\overbrace{+}2x+1$	-	0	+	+	
SGN de $\underbrace{-}3x+4$	+	+	0	-	
SGN de $(2x+1)(-3x+4)$	-	0	+	0	-

↑
ne pas mettre P

On applique la méthode de 2° pour remplir le tableau.

On regarde le « signe de x »

Quand c'est +, les - à droite de 0.

Quand c'est -, les - à gauche de 0.

- remplissage horizontal de gauche à droite
- remplissage vertical de bas en haut
- abaisser les 0.

Réponse

On revient à l'inéquation de départ. Il faut que le signe du résultat soit + ou 0.

On barre les -.

On lit sur la 1^{ère} ligne que x doit se trouver entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{4}{3}$.

$$x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{4}{3} \right]$$

ou

$$S = \left[-\frac{1}{2}; \frac{4}{3} \right]$$

L'ordre a une importance.

2°) Exemple 2

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $4x^2 - 9 > 0$.

$$(2x)^2 - 3^2 > 0$$

$$(2x+3)(2x-3) > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x+3=0 \\ x=-\frac{3}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2x-3=0 \\ x=\frac{3}{2} \end{array}$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
SGN de $2x+3$	-	0	+	+	
SGN de $2x-3$	-	-	0	+	
SGN de $(2x+3)(2x-3)$	+	0	-	0	+

Réponse :

$$x \in]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[$$

ou

$$S =]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[$$

3°) Exemple 3

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $\frac{-x+3}{x-1} \geq 0$.

$$\left. \begin{array}{l} -x+3=0 \\ -x=-3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x-1=0 \\ x=1 \end{array}$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
SGN de $-x+3$		+	+	0^{num} -
SGN de $x-1$		-	$0^{\text{dén}}$ +	+
SGN de $\frac{-x+3}{x-1}$		-	+	0^{num} -

Lorsque l'on abaisse un « $0^{\text{dén}}$ », on met une double barre. En effet, un quotient ne peut avoir 0 pour dénominateur.

$\geq 0 \rightarrow +$ et $-$

Réponse :

$$x \in]1; 3]$$

ou

$$S =]1; 3]$$

4°) Erreur classique

Il faut toujours faire attention à l'ordre des valeurs de x sur la 1^{ère} ligne du tableau de signes.

IV. Systèmes d'inéquations

1°) Exemple

$$\text{Résoudre dans } \mathbb{R} \text{ le système d'inéquations : } \begin{cases} 7x-4 < 2x-3 \\ -5x+1 \leq -2x+9 \end{cases}$$

On résout séparément chaque inéquation.

• **Résolution de la 1^{ère} inéquation :**

$$7x-2x < 4-3$$

$$5x < 1$$

$$x < \frac{1}{5}$$

$$S_1 =]-\infty; \frac{1}{5}[$$

• **Résolution de la 2^e inéquation :**

$$-5x+2x \leq 9-1$$

$$-3x \leq 8$$

$$x \geq -\frac{8}{3}$$

$$S_2 = \left[-\frac{8}{3}; +\infty[$$

• **Réponse :**

Les solutions du système sont tous les nombres qui vérifient à la fois la 1^{ère} et la 2^e inéquation.

Donc les nombres qui sont solutions à la fois de la 1^{ère} et de la 2^e inéquation.

Donc les nombres qui sont dans S_1 et dans S_2 .

Donc les nombres qui appartiennent à l'intersection de S_1 et de S_2 .

$$S = S_1 \cap S_2$$

$$S_2 = \left[-\frac{8}{3}; \frac{1}{5}[$$

2°) Méthode générale

★ On résout chaque inéquation séparément (ensembles de solutions notés S_1 et S_2).

★ On trouve l'ensemble des solutions du système en écrivant $S = S_1 \cap S_2$.

On peut représenter les solutions sur une « ligne » c'est-à-dire sur la « droite réelle ».



N.B. : $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas de réels.

Consigne : faire les tableaux de signes à la règle.

1 Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $(1-x)^2 < 1$.

2 Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $(x-3)^2 - 4x^2 \geq 0$.

3 Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $(x-3)(1-2x) \leq (x-3)^2$.

4 Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $-2x(x-7) < 49 - x^2$.

5 Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $\frac{1}{x+1} > -1$.

6 Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $\frac{2x-1}{x} - 2 \geq 0$.

7 Résoudre dans \mathbb{R} le système d'inéquations :
$$\begin{cases} (x+1)(2-x) < x^2 - 1 \\ x \leq \frac{4}{x} \end{cases}$$
.

8 Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $\frac{6}{x-2} \leq x-3$.

9 Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $\frac{x^2+x}{x+4} > 1$.

10 Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $9(x-2)^2 \leq x^2$.

11 Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $2(x-1)^2 \geq x^2 - 1$.

1 $x(-2+x) < 0$; $S =]0; 2[$

Solution détaillée :

$$(1-x)^2 < 1$$

$$(1-x)^2 - 1 < 0$$

$$1 - 2x + x^2 - 1 < 0$$

$$-2x + x^2 < 0$$

$$x(-2+x) < 0$$

$$x = 0 \quad \left| \begin{array}{l} -2+x=0 \\ x=2 \end{array} \right.$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
SGN de x		-	0	+	+	
SGN de $-2+x$		-	-	0	+	
SGN de $(2x+3)(2x-3)$		+	0	-	0	+

$S =]0; 2[$

2 $(-x-3)(3x-3) \geq 0$; $S = [-3; 1]$

3 $(-x-3)(3x-3) \geq 0$; $S = \left] -\infty; \frac{4}{3} \right] \cup [3; +\infty[$

4 $S =]-\infty; 7[\cup]7; +\infty[$

$$\boxed{5} \quad \frac{1}{x+1} > -1$$

$$\frac{1}{x+1} + 1 > 0$$

$$\frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x+1} > 0$$

$$\frac{x+2}{x+1} > 0$$

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
SGN de $x+2$	-	0 ^{num}	+	+
SGN de $x+1$	-	-	0 ^{déno}	+
SGN de $\frac{x+2}{x+1}$	+	0 ^{num}	-	+

$$S =]-\infty; -2[\cup]-1; +\infty[$$

$$\boxed{6} \quad \frac{2x-1}{x} - 2 \geq 0$$

$$\frac{2x-1-2x}{x} \geq 0$$

$$-\frac{1}{x} \geq 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
SGN de -1	-	-	-
SGN de x	-	0 ^{déno}	+
SGN de $\frac{-x+3}{x-1}$	+		-

$$\boxed{S} =]-\infty; 0[$$

$\boxed{7}$ Résolution du système : on résout d'abord séparément chaque inéquation.

$$(x+1)(2-x) < x^2 - 1 \quad (1)$$

$$(x+1)(2-x) < x^2 - 1$$

$$(x+1)(2-x) < (x-1)(x+1)$$

$$(x+1)(2-x) - (x-1)(x+1) < 0$$

$$(x+1)[(2-x) - (x-1)] < 0$$

$$(x+1)(3-2x) < 0$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
SGN de $x+1$	-	0	+	+
SGN de $3-2x$	+	+	0	-
SGN de $(x+1)(3-2x)$	-	0	+	-

L'ensemble des solutions de (1) est $S_1 =]-\infty; -1[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[$.

$$x \leq \frac{4}{x} \quad (2)$$

$$x - \frac{4}{x} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 4}{x} \leq 0$$

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x} \leq 0$$

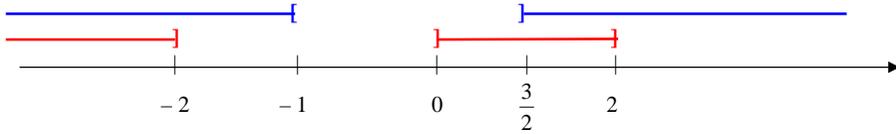
x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
SGN de $x+2$	-	0 ^{num}	+	+	+	
SGN de $x-2$	-	-	-	0 ^{num}	+	
SGN de x	-	-	0 ^{déno}	+	+	
SGN de $\frac{(x-2)(x+2)}{x}$	-	0 ^{num}	+	-	0 ^{num}	+

L'ensemble des solutions de (2) est $S_2 =]-\infty; -2] \cup]0; 2]$.

Bilan :

L'ensemble des solutions du système est $S = S_1 \cap S_2$ (intersection)

On représente les intervalles sur un axe (droite réelle)



On prend les parties communes (en rouge et en bleu).

$$S =]-\infty; -2] \cup \left[\frac{3}{2}; 2\right]$$

9 $\frac{x^2+x}{x+4} - 1 > 0$

$$\frac{x^2+x-(x+4)}{x+4} > 0$$

$$\frac{x^2-4}{x+4} > 0$$

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x+4} > 0$$

x	$-\infty$	-4	-2	2	$+\infty$
SGN de $x+2$	-		-	-	0^{num} +
SGN de $x+2$	-		-	0^{num} +	+
SGN de $x+4$	-	$0^{\text{dén}}$	+	+	+
SGN de $\frac{x^2-4}{x+4}$	-		+	0^{num} -	0^{num} +

$$S =]-4; -2[\cup]2; +\infty[$$

10 $9(x-2)^2 \leq x^2$

$$9(x-2)^2 - x^2 \leq 0$$

$$[3(x-2)]^2 - x^2 \leq 0$$

$$[3(x-2)-x][3(x-2)+x] \leq 0$$

$$(3x-6-x)(3x-6+x) \leq 0$$

$$(2x-6)(4x-6) \leq 0$$

$$\begin{array}{l|l} 2x-6=0 & 4x-6=0 \\ 2x=6 & 4x=6 \\ x=\frac{6}{2} & x=\frac{6}{4} \\ x=3 & x=\frac{3}{2} \end{array}$$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	3	$+\infty$	
SGN de $2x-6$	-	0	+	+	
SGN de $4x-6$	-	-	0	+	
SGN de $(2x-6)(4x-6)$	+	0	-	0	+

L'ensemble des solutions de (1) est $S = \left[\frac{3}{2}; 3\right]$.

11 $2(x-1)^2 \geq x^2 - 1$

$$2(x-1)^2 - (x^2 - 1) \geq 0$$

$$2(x-1)^2 - (x-1)(x+1) \geq 0$$

$$(x-1)[2(x-1) - (x+1)] \geq 0$$

$$(x-1)(2x-2-x-1) \geq 0$$

$$(x-1)(x-3) \geq 0$$

$$\begin{array}{l|l} x-1=0 & x-3=0 \\ & x=3 \end{array}$$

Commentaires

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
SGN de $x-1$	-	0	+	+	
SGN de $x-3$	-	-	0	+	
SGN de $(x+1)(3-2x)$	+	0	-	0	+

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S =]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[$.

A propos des systèmes d'inéquations

On peut représenter les solutions sur une « ligne » \longleftrightarrow « droite réelle ».

N.B. : $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas de réels.