5^{e} série Produit scalaire, relations métriques, plan muni d'un repère orthonormé

1 Soit ABCD un carré de côté a $(a>0)$ et de centre O dans le plan *P*. On note E le symétrique de A par rapport à B.

1°) a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan *P* tels que l'on ait $MA^2+MC^2=6a^2$.
b) Démontrer que $\mathcal{C}$ passe par E.

2°) a) Soit M un point quelconque du plan *P*. Exprimer MA^2+ME^2 en fonction de MB^2.
b) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ ' des points M du plan *P* tels que $MA^2-2MB^2=-3a^2$.
c) Démontrer que $\mathcal{C}$ ' passe par le point D.

3°) a) Démontrer que pour tout point M du plan *P* on a : $MA^2-ME^2=2\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{BM}$.
b) Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M du plan *P* tels que l'on ait $MA^2-ME^2=2\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{BM}$.

---

2 L'unité de longueur dans le plan *P* est le centimètre.
Soit ABC un triangle équilatéral de côté a $\left(a\in\mathbb{R}_+^*\right)$. On note I le barycentre des points pondérés $(A\,;1)$ et $(B\,;2)$ et J le barycentre des points pondérés $(B\,;4)$ et $(C\,;1)$.

1°) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$ en fonction de a.

2°) Démontrer que $(AJ)\perp(CI)$ (**Indication :** décomposer $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{CI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$).

3°) Soit G le barycentre d'intersection des droites (AJ) et (CI).
Démontrer que G est le barycentre des points pondérés $(A\,;2)$, $(B\,;4)$ et $(C\,;1)$.

4°) a) Calculer $\overrightarrow{BG}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et de $\overrightarrow{BC}$.
b) Calculer $\left\|2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|$ en fonction de a ; en déduire BG en fonction de a.

5°) Déterminer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que l'on ait
$\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right)\bullet\left(2\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$.

---

3 Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A du plan *P* tel que $AB=a$ $\left(a\in IR_+^*\right)$.
On note I le milieu de $[BC]$, J le milieu de $[AC]$ et G le centre de gravité du triangle.

1°) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}$ en fonction de a.

2°) On note θ la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{AGB}$.
Calculer $\cos\theta$.

5°) Déterminer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que l'on ait $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$.

4 Soit ABCD un rectangle. On pose $AB=a$ et $AD=b$ $(0<b<a)$.
On note H et K les projetés orthogonaux respectifs des points B et D sur la droite (AC).
Faire une figure codée.

1°) Calculer $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ en fonction de a et b ; en déduire HK en fonction de a et b (laisser la racine au dénominateur).

2°) a) Démontrer que $HK=\frac{1}{2}AC$ si et seulement si $a=b\sqrt{3}$.
b) Construire à la règle et au compas un tel rectangle.

5 Soit ABCD un carré de côté a $\left(a\in\mathbb{R}_+^*\right)$.
On note :

- I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[CD]$.
- H le projeté orthogonal de J sur (AI).

1°) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}$ sans utiliser de repère. En déduire :

- la longueur AH en fonction de a
- la valeur de $\cos\widehat{IAJ}$

2°) a) Vérifier que le repère $\mathcal{R}=\left(A,\vec{i},\vec{j}\right)$ avec $\vec{i}=\frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j}=\frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$ est orthonormé.
b) En utilisant ce repère, retrouver le résultat du produit scalaire du produit scalaire $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}$.

---

6 Soit ABCD un trapèze rectangle en A et D.
On note I le milieu du segment $[AD]$.
On pose $AB=a$, $CD=b$ et $AD=c$.

1°) a) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AC}$ en fonction de *a, b, c* ; en déduire $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AC}$.
b) Dans cette question, on prend $a=6$, $b=4$, $c=4$. On note θ la mesure en radians de l'angle géométrique aigu formé par les droites (BI) et (AC). Calculer BI et AC ; en déduire $\cos\theta$ puis la valeur arrondie de θ au centième.

2°) a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}$ en fonction de *a, b, c*.
b) En déduire que l'angle $\widehat{BIC}$ est droit si et seulement si $ab-\frac{c^2}{4}=0$.
c) Dans cette question, on prend $a=\sqrt{5}+1$, $b=\sqrt{5}-1$, $c=4$.
Quelle est la nature du triangle BCI ?

7 Soit ABC un triangle équilatéral de côté a du plan *P*.
On note I le barycentre des points pondérés $(B\,;2)$ et $(C\,;1)$, J le barycentre des points pondérés $(A\,;1)$ et $(C\,;2)$ et K le milieu de $[BC]$.

1°) Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (AC).

2°) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan *P* tels que $\overrightarrow{MA}\bullet\left(2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$.
Démontrer que les points J et K appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$.

3°) Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan *P* tels que $\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)\bullet\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$.

$\boxed{8}$ Soit ABCD un carré du plan, de côté 1.
Soit x un réel quelconque appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$. On note E et F définis par :

- $E \in (AB)$; $E \notin [AB]$; $AE = x$.
- $F \in [BC]$; $CF = x$.

Faire une figure en faisant très attention.
Les deux questions sont indépendantes.

1°) Démontrer que le produit scalaire $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AC}$ est indépendant de x.

2°) La droite (EF) coupe la droite (AD) en un point I.

a) Démontrer que $IA = \dfrac{x - x^2}{1 + x}$.
b) Déterminer pour quelle valeur de x la longueur IA est maximale.

$\boxed{9}$ Soit ABCD un carré du plan, de côté 1.
Soit x un réel quelconque appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$. On note E et F appartenant respectivement aux côtés $[AB]$ et $[AD]$ tels que $AE = DF = x$.

Démontrer que le produit scalaire $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF}$ est indépendant de x.

$\boxed{10}$ Dans tout l'exercice, A et B sont deux points tels que $AB = 5$ cm.
Les trois questions sont indépendantes et on fera une figure pour chacune d'elles.
1°) Soit C un point tel que $AC = 4$ cm et $\widehat{BAC} = 60°$. Calculer BC.
2°) Soit H le point de $[AB]$ tel que AH=3. On note D un point tel que $AD = 4$ cm et $(DH) \perp (AB)$.
On note K le projeté orthogonal de B sur (AD).
En calculant de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, calculer AK.
3°) Soit Δ une droite passant par A non perpendiculaire à (AB).
Placer le point E de Δ tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 10$. Expliquer.

$\boxed{11}$ Soit ABC un triangle équilatéral de côté a du plan P.
On note I le barycentre des points pondérés $(A\,;2)$ et $(B\,;-1)$ et J le milieu de $[BC]$.
Pour la figure, on prendra (AB) « horizontale », A « à gauche » de B et C « au-dessus » de (AB).
1°) Déterminer et tracer l'ensemble E des points M du plan P tels que $\left(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$.
2°) Démontrer que C appartient à E.
3°) Déterminer l'ensemble F des points M du plan P tels que $\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$.

$\boxed{12}$ On considère un triangle ABC quelconque.
Pour la figure, prendre (BC) « horizontale », A « au-dessus » de (BC).
On construit à l'extérieur du triangle ABC les carrés ABDE et ACFG (c'est-à-dire que les points B et D sont situés de l'autre côté de (AB) que C et que les points F et G sont situés de l'autre côté de (AC) que B.
On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

Faire une figure codée.

1°) Comparer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC}$.
b) Soit M le milieu de $[BC]$.
Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis démontrer que (AM) et (EG) sont perpendiculaires.
2°) a) Quel lien y a-t-il entre $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG}$? (sans introduire de nouveau point).
b) Démontrer que les droites (BG) et (CE) sont perpendiculaires.

$\boxed{13}$ Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A. Soit λ un réel fixé dans $]0\,;1[$.
On note I et J les points définis par $\overrightarrow{AI} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \lambda\,\overrightarrow{AC}$ et K le milieu de $[CI]$.
On pose $AB = AC = a$ $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$.
Faire une figure codée en prenant $\lambda = \dfrac{1}{4}$ par exemple.
Ecrire toutes les hypothèses.
1°) a) Exprimer $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b) Démontrer que $(BJ) \perp (AK)$.

Dans les questions 2°) et 3°), on prend $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

2°) a) Calculer $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{BJ}$ en fonction de a.
b) Calculer CI et BJ ; en déduire la valeur exacte de $\cos\theta$ où est la mesure en radians de l'angle géométrique aigu formé par les droites (CI) et (BJ).
3°) Déterminer et tracer l'ensemble $E = \left\{M \in P \,/\, \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) = 0\right\}$.

$\boxed{14}$ Un solide de masse m (en kilogrammes) glisse sur un plan incliné faisant un angle de 30 ° avec l'horizontale d'un point A à un point B tel que $AB = 3$ m.
On le fait ensuite glisser sur un plan incliné faisant un angle de 45 ° avec l'horizontale d'un point C à un point D.
Sachant que le poids du solide fournit le même travail dans les deux cas, calculer CD (valeur exacte).

$\boxed{15}$ Soit ABC un triangle équilatéral de côté a ($a \in \mathbb{R}_+^*$) dans un plan P. Pour tout point M du plan, on pose $f(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$.
1°) Calculer $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$, $f(G)$ où G est le centre de gravité de ABC.
2°) Démontrer que, pour tout point M du plan, on a : $f(M) = 3\,MG^2 + f(G)$.

3°) Déterminer l'ensemble $E_k = \{M \in P \,/\, f(M) = k\}$ suivant les valeurs de k.

$\boxed{16}$ **(25 minutes)**

Le plan P est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = 60°$.

Attention le repère n'est pas orthonormé.
1°) On donne les points $A(1\,;\,2)$ et $B(2\,;\,-1)$.

a) Calculer OA et OB (en exprimant les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$).

b) Calculer $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$; en déduire $\cos \widehat{AOB}$.
Contrôler les résultats sur la figure.
2°) Soit M un point du plan. On note H et K ses projetés orthogonaux respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.
Sachant que $\overrightarrow{OH} = 3\vec{i}$ et $\overrightarrow{OK} = 4\vec{j}$, déterminer les coordonnées cartésiennes de M.

$\boxed{17}$ Soit ABCD un rectangle tel que $AB = 8$ et $AD = 3$.
On note E le milieu de $[AB]$ et F le milieu de $[CD]$.

Pour tout réel $x \in [0\,;\,4]$, on note M et N les points de $[AB]$ tels que $AM = BN = x$.

On pose $f(x) = \overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN}$.

Exprimer $f(x)$ en fonction de x sous forme développée réduite.

Faire le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.

$\boxed{18}$ Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et rayon R $(R > 0)$.

On note A un point fixé de $\mathcal{C}$ et I le milieu de $[OA]$. La perpendiculaire en O à (OA) coupe $\mathcal{C}$ en deux points J et K.
On note $\mathcal{C}$ ' le cercle de centre I passant par J et K.

Soit L un point quelconque de l'arc $\overset{\frown}{JK}$ de $\mathcal{C}$ ', distinct de J et K.
La perpendiculaire en L à (OL) coupe $\mathcal{C}$ en deux points M et N.
1°) a) Démontrer que L est le milieu de $[MN]$.

b) Démontrer que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = AL^2 - LM^2$.
2°) a) Calculer IJ en fonction de R.
b) En déduire $AL^2 + OL^2$ (utiliser la formule de la médiane).
3°) Exprimer $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ en fonction de R.

$\boxed{19}$ Soit ABC un triangle rectangle en A. On pose $AB = a$ et $AC = b$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$; $b \in \mathbb{R}_+^*$).

On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$.

<u>Faire une figure codée.</u>
Ecrire toutes les hypothèses.
1°) Déterminer et tracer (en codant) l'ensemble $E_1 = \{M \in P \,/\, \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0\}$.

2°) a) Calculer $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ en fonction de a.
b) Déterminer et tracer **<u>en utilisant ce résultat</u>** l'ensemble $E_2 = \{M \in P \,/\, \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BM} = a^2\}$.

3°) On note K le point d'intersection des ensemble E_1 et E_2.
a) Déterminer la nature du triangle ABK.
b) Démontrer que $(BK) \perp (AJ)$ (sans utiliser le produit scalaire).

$\boxed{20}$ Soit ABC un triangle isocèle en C dans le plan P.
On note I le milieu de $[AB]$ et J le barycentre des points $(A\,;\,1)$, $(B\,;\,1)$ et $(C\,;\,3)$.
Pour la figure, on prendra (AB) « horizontale », A « à gauche » de B et C « au-dessus » de (AB).
1°) Démontrer que J appartient à une hauteur du triangle ABC.
2°) Déterminer et tracer les ensembles $E_1 = \{M \in P \,/\, (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0\}$ et

$E_2 = \{M \in P \,/\, (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0\}$.

$\boxed{21}$ Soit C un cercle de centre O et de rayon $R\,(R > 0)$.
1°) On considère un point M fixé. Une droite D quelconque passant par M coupe C en deux points A et B.
On note A' le point de C diamétralement opposé à A.
Comparer les produits scalaires $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}$; en déduire que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = OM^2 - R^2$.
Le produit scalaire ne dépend donc pas de la sécante D ; on l'appelle la « **puissance du point M par rapport au cercle *C*** ». On le note $P_C(M)$.
2°) Soit k un réel quelconque. Déterminer l'ensemble E_k des points M du plan dont la puissance par rapport à C est égale à k.

$\boxed{22}$ **Un problème d'optimisation dans le plan**

Faire une figure dans chaque cas.

1°) On donne une droite D <u>fixée</u> et A un point <u>fixé</u> n'appartenant pas à D. Soit M un point <u>variable</u> sur D
Déterminer la position de M sur D telle la distance AM soit minimale (sans justifier).
Qualifier M dans ce cas et compléter la figure <u>en codant</u>.

2°) On donne une droite D <u>fixée</u> et A et B deux points <u>fixés</u> du plan. On note I le milieu de $[AB]$.
Pour la figure, on prendra A et B n'appartenant à D, du même côté, <u>en codant</u>.
Soit M un point variable de D.
Déterminer la position de M sur D telle l'expression $MA^2 + MB^2$ est minimale en justifiant brièvement (**Indication** : transformer cette expression).
Qualifier M dans ce cas et compléter la figure en figure en codant.

3°) Mêmes hypothèses qu'à la question 2°). On suppose que A et B sont du même côté de D.
Déterminer la position de M sur D telle que l'expression $MA + MB$ minimale.
Indication :
Considérer le point $B' = S_D(B)$.

$\boxed{23}$ Soit ABC un triangle dont l'angle $\widehat{A}$ mesure $\frac{\pi}{3}$ radians.

1°) Démontrer que l'on a : $a^2 = b^2 + c^2 - bc$.
2°) Démontrer que $a \geq \sqrt{bc}$ et étudier une condition nécessaire et suffisante sur le triangle ABC pour que l'on ait $a = \sqrt{bc}$.

24 Soit ABC un triangle. On note S son aire.

Démontrer que $S \leq \frac{1}{2}ab$ et étudier les cas où l'égalité est réalisée.

---

25 Un triangle ABC a une aire de 48 cm^2 et deux côtés de longueurs 12 cm et 9 cm.
Déterminer la longueur du troisième côté.

---

26 Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AB = 2$ et $BC = 3$. On note O le milieu de [BC].
1°) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.
2°) On note I le projeté orthogonal de C sur (AB).
Calculer BI.

---

27 Soit A et B deux points distincts du plan.
Soit D et D' deux droites perpendiculaires à (AB). Ces droites coupent respectivement (AB) en M et N.
Soit P un point quelconque de D ; la droite (AP) coupe D' en Q.
Comparer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PN}$.

---

28 Soit ABC un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 5$, $BC = 7$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

29 Soit ABCD un carré tel que $AB = 5$. On note I le milieu de $[AD]$.

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$.

---

30 Soit ABC un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 5$, $BC = 7$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

---

31 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que l'on ait $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \bullet \vec{v} = 5$.

Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

---

33 Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A. On pose $AB = a$ $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$.

On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$.

Calculer $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{BJ}$.

34 Soit ABC un triangle et une droite Δ. On désigne respectivement par A', B', C' les projetés orthogonaux respectifs de A, B, C sur la droite Δ. La perpendiculaire à (AC) passant par B' et la perpendiculaire à (AB) passant par C' se coupent en Ω.
1°) Démontrer que $\overrightarrow{A'\Omega} \bullet \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{A'C'} \bullet \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{A'\Omega} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'} \bullet \overrightarrow{AC}$.

2°) Démontrer l'égalité $\overrightarrow{A'\Omega} \bullet \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'C'} \bullet \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'B'} \bullet \overrightarrow{AC}$.

2°) Démontrer que les droites $(\Omega A')$ et (BC) sont perpendiculaires.

35 Soit ABCD un parallélogramme et M un point quelconque du plan.
On note B', C' et D' les projetés orthogonaux de M respectivement sur les droites (AB), (AC) et (AD).
1°) Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'}$ à l'aide d'un produit scalaire de deux vecteurs.
2°) Démontrer l'égalité : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC'}$.

---

36 Dans le plan P, on considère un rectangle. On pose $AB = a$ et $AD = b$ $(a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}_+^*)$.
(l'unité de longueur est le centimètre).
On note I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[CI]$.

Partie A
1°) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DI}$.
2°) En déduire que les droites (AC) et (DI) sont perpendiculaires si et seulement si $a = \sqrt{2}b$.

Partie B
Dans cette partie, on prend $a = 4$ et $b = 2$.
On considère l'ensemble E des points M du plan P tels que $MA^2 + MB^2 + 2\,MC^2 = 20$.
1°) Soit M un point quelconque du plan P.
Exprimer $MA^2 + MB^2 + 2\,MC^2$ en fonction de MJ^2.
2°) Déterminer et tracer l'ensemble E.

37 Dans le plan P, on considère un carré ABCD un carré de côté a $(a > 0)$ de centre O.

On note I, J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[CD]$ et $[OB]$.

Faire une figure codée.

1°) Calculer en fonction de a les produits scalaires suivants : $p_1 = \overrightarrow{KC} \bullet \overrightarrow{BD}$; $p_2 = \overrightarrow{AI} \bullet \overrightarrow{AC}$;
$p_3 = \overrightarrow{CI} \bullet \overrightarrow{BD}$; $p_4 = \overrightarrow{KI} \bullet \overrightarrow{AD}$.

2°) Déterminer l'ensemble $E = \left\{M \in P \,/\, \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right) = 0\right\}$.

3°) a) Déterminer l'ensemble $F_k = \left\{M \in P \,/\, MA^2 + MB^2 = k\right\}$ suivant les valeurs de k.

b) Déterminer k tel que $J \in F_k$.

4°) Dans cette question, on prend $a = 1$.

On considère le repère orthonormé $\boldsymbol{R} = \left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

a) Démontrer en utilisant ce repère que le triangle AKJ est isocèle rectangle ; calculer son aire.
b) Démontrer que le quadrilatère AKJD est inscriptible ; déterminer une équation cartésienne de son cercle circonscrit.

38 Dans le plan P, on considère un carré ABCD un carré de côté 1.

On note I le milieu de $[BC]$ et J le point tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$.

Faire une figure codée.
On munit le plan du repère $\boldsymbol{R} = \left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

Vérifier que ce repère est orthonormé.

1°) Donner les coordonnées des points A, B, C, D, I et J dans $\boldsymbol{R}$.

2°) Déterminer la nature du triangle AIJ.
3°) Démontrer que le quadrilatère AIJD est inscriptible sans utiliser les coordonnées ; déterminer une équation cartésienne de son cercle circonscrit $\mathcal{C}$.

---

39 Dans le plan *P*, on considère un carré ABCD un carré de côté 1 et de centre O.
On note I le milieu de $[\mathrm{AB}]$ et J le milieu de $[\mathrm{OC}]$.
Faire une figure codée.
On munit le plan du repère $\mathcal{R} = \left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$.
Vérifier que ce repère est orthonormé.

1°) Donner les coordonnées des points A, B, C, D, O, I, J dans $\mathcal{R}$.
2°) Déterminer la nature du triangle DIJ.
3°) Démontrer que le quadrilatère AIJD est inscriptible sans utiliser les coordonnées ; déterminer une équation cartésienne de son cercle circonscrit $\mathcal{C}$.

40 Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Pour tout réel *m*, on note $\mathcal{C}_m$ la courbe d'équation $x^2 + y^2 - 2mx - 2(2m+1)y + 14m - 9 = 0$.
1°) a) Démontrer que pour tout réel *m*, la courbe $\mathcal{C}_m$ est un cercle.
b) Donner les coordonnées de son centre Ω_m.
c) Vérifier le point Ω_m appartient à la droite Δ d'équation réduite $y = 2x + 1$.
2°) Démontrer que tous les cercles $\mathcal{C}_m$ passent par les points $\mathrm{A}(3,2)$ et $\mathrm{B}(-1,4)$.
3°) a) Tracer le cercle $\mathcal{C}_0$.
b) Vérifier que le cercle $\mathcal{C}_1$ est le cercle de diamètre $[\mathrm{AB}]$.

---

41 Dans le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les points $\mathrm{A}(-1\,;\,2)$ et $\mathrm{B}(3\,;\,6)$.
On note *E* l'ensemble des points M du plan de coordonnées cartésiennes $(x\,;\,y)$ tels que
$2\mathrm{MA}^2 - \mathrm{MB}^2 = k$ où *k* est un réel donné.
1°) Déterminer une équation cartésienne de *E*.
2°) En déduire la nature de *E*.

41 bis Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les points A(2 ; 5) et B(6 ; 9).

Partie A
1°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre A passant par B.
2°) Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice Δ de [AB].
3°) Déterminer les coordonnées des points C et D tels que les triangles ABC et ABD soient équilatéraux ($x_{\mathrm{C}} < x_{\mathrm{D}}$).
Partie B
On note *E* l'ensemble des points M du plan de coordonnées cartésiennes $(x\,;\,y)$ tels que
$2\mathrm{MA}^2 - \mathrm{MB}^2 = k$ où *k* est un réel donné.
1°) Déterminer une équation cartésienne de *E*.
2°) En déduire la nature de *E* suivant les valeurs de *k*.

42 Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On note *D* et *D'* les droites d'équations réduites respectives $y = \frac{5}{3}x + 3$ et $y = -4x + 20$.
La droite *D* coupe l'axe des ordonnées en B, *D'* coupe l'axe des abscisses en C et *D* et *D'* se coupent en A. Faire une figure.

1°) Calculer les coordonnées de A, B, C.
2°) Déterminer la nature de ABC

---

43 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les points $\mathrm{A}(3\,;\,2)$ et $\mathrm{B}(0\,;\,6)$.
1°) Calculer $\cos \widehat{\mathrm{AOB}}$.
2°) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ passant par O et perpendiculaire à (AB).
3°) a) Déterminer les coordonnées cartésiennes du point C tel que l'on ait $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 18$ (1).
b) Vérifier que $\mathrm{C} \in \Delta$; retrouver ce résultat à partir de (1) <u>sans utiliser les coordonnées</u>.

---

44 Dans le plan *P*, on considère un carré ABCD un carré de côté 4.
On note I le milieu de $[\mathrm{BC}]$ et J le point tel que $\overrightarrow{\mathrm{CJ}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$.
Soit Γ le cercle de diamètre $[\mathrm{IJ}]$ et ω son centre.
Faire une figure codée.
On munit le plan du repère $\mathcal{R} = \left(\mathrm{A}, \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$.
Vérifier que ce repère est orthonormé.
1°) Donner les coordonnées des points A, B, C, D, I, J et ω dans $\mathcal{R}$.
2°) Déterminer la nature du triangle AIω.
3°) En déduire que Γ est tangent en I à la droite (AI).

---

45 Dans le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les points $\mathrm{A}(2\,;\,5)$, $\mathrm{B}(2\,;\,1)$ et $\mathrm{C}(7\,;\,3)$.
1°) Déterminer la nature du triangle ABC.
2°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre C et tangent à la droite (AB).
3°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection D et E de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses $(x_{\mathrm{D}} < x_{\mathrm{E}})$.
4°) Déterminer une équation cartésienne de la tangente Δ à $\mathcal{C}$ en D.
5°) Les droites (CD) et Δ coupent l'axe des ordonnées respectivement en F et G.
On ne demande pas de calculer les coordonnées de F et G.
Calculer les coordonnées du point H orthocentre du triangle CFG.

---

46 Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$.

1°) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ est un cercle. Préciser son centre Ω et son rayon.
2°) Etudier suivant les valeurs de m l'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite D_m d'équation réduite $y = x + m$.
3°) Lorsque D_m coupe $\mathcal{C}$ en deux points M' et M'', distinct ou confondus, on désigne par J le milieu du segment $[M'M'']$.
a) Sans utiliser les coordonnées de M' et M'', mais en utilisant, la somme des racines d'une équation du second degré, calculer x_J en fonction de m.
b) Calculer y_J en fonction de m. On pourra utiliser l'équation réduite de la droite D_m.
c) Déterminer une relation liant x_J et y_J indépendante de m. En déduire que J appartient à une droite fixe.
4°) **Question facultative**
Démontrer que la droite D_m a une direction indépendante de m et retrouver le résultat du 3°) c).

---

47 Dans le plan P, on considère un carré ABCD un carré de côté 4.
On note I le milieu de $[BC]$ et J le point tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$.
Soit Γ le cercle de diamètre $[AJ]$ et ω son centre.
Faire une figure codée.
On munit le plan du repère $\mathcal{R} = \left(A, \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)$.
Vérifier que ce repère est orthonormé.
1°) Donner les coordonnées des points A, B, C, D, I, J et ω dans $\mathcal{R}$.
2°) a) Démontrer que la droite (ωI) est perpendiculaire à la droite (BC).
b) Démontrer que le cercle Γ est tangent en I à la droite (BC).
3°) Démontrer que le cercle Γ passe par le point D.

---

48 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On note D et D' les droites d'équations cartésiennes respectives $4x + 7y - 16 = 0$ et $2x - 3y + 18 = 0$.
Les droites D et D' se coupent en A, la droite D coupe l'axe des abscisses en B et la droite D' coupe l'axe des ordonnées en C.
Faire une figure.

1°) Calculer les coordonnées de A, B, C.
2°) Déterminer la nature de ABC
3°) Calculer $\cos \widehat{BAC}$.
4°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre A tangent à la droite (BC).

---

49 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 10$ et D la droite d'équation réduite $y = 2x - 5$.
1°) Déterminer les points d'intersection A et B de $\mathcal{C}$ et D $(x_A < x_B)$.
2°) Déterminer la nature du triangle OAB.

50 Dans le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note D la droite d'équation réduite $y = x$ et $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$.
1°) a) Déterminer et tracer l'ensemble $\mathcal{C}$ ainsi que la droite D.
b) Démontrer que $\mathcal{C}$ est tangent à l'un des axes de coordonnées.
2°) Soit A et B les points de $\mathcal{C}$ en lesquels $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèles à D $(x_A < x_B)$.
a) Démontrer **géométriquement** **<u>sans utiliser les coordonnées</u>** que A et B appartiennent à une droite D' que l'on définira clairement par un point et sa direction.
Tracer D' et placer A et B sur la figure en codant.
b) Déterminer une équation cartésienne de D' ; en déduire les coordonnées de A et B.

---

51 Dans le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(6\,;0)$, $B(3\,;2)$ et $C(-2\,;0)$.
1°) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ perpendiculaire à (AB) passant par C
(**N. B.** : on ne demande pas une équation cartésienne de (AB)).
2°) La droite Δ coupe l'axe des ordonnées en un point D.
Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle OAD.
3°) Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.

---

52 1°) Etudier la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2°) Une droite D, de coefficient directeur $m \neq 0$ passant par O, recoupe la courbe $\mathcal{C}$ en un point A.
La droite D', perpendiculaire en O à D, recoupe la courbe $\mathcal{C}$ en un point B.
Calculer les coordonnées de A et B en fonction de m.
Soit I le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse -2.
Démontrer que le triangle IAB est isocèle rectangle en I.
Démontrer que le quadrilatère OAIB est inscriptible.

---

53 On considère la fonction $f : x \mapsto -x^2 + 4x$.
1°) Etudier f et tracer sa représentation graphique $\mathcal{C}$ ainsi que la tangente horizontale dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2°) Soit A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1 et T la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.
N.B. : On ne demande pas une équation de T !
a) a) Tracer T (expliquer).
b) Déterminer les coordonnées du point B de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente T' est orthogonale à T.

---

54 Dans le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $K(0\,;4)$, $L(3\,;0)$, $M(11\,;6)$ et $N(8\,;10)$.
1°) Déterminer la nature du quadrilatère KLMN.
2°) Déterminer une équation de son cercle circonscrit $\mathcal{C}$.

---

55 Dans le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(-3 ; 2)$ et $B(5 ; 1)$ ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $3x - 2y + 6 = 0$.

1°) Calculer l'abscisse du point C où $\mathcal{D}$ coupe l'axe des abscisses.
2°) Soit D le symétrique de A par rapport à C.
Calculer les coordonnées cartésiennes du point D.
3°) Déterminer la nature du triangle ABD.
4°) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ ' perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par B.

---

56 Dans le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(3 ; -3)$, $B(5 ; 1)$, $C(0 ; -4)$ et $D(-4 ; 4)$.

1°) Que peut-on dire des droites (AD) et (BC) ?
2°) a) Démontrer que l'ensemble Γ d'équation $x^2 + y^2 - 2y - 24 = 0$ est un cercle.
b) Vérifier que A, B, C, D appartiennent à Γ.
3°) a) Déterminer une fonction polynôme *f* telle que la parabole représentative $\mathcal{C}$ passe par les points A, B, C.
b) Vérifier alors que D appartient aussi à $\mathcal{C}$.
c) Déterminer le sommet de $\mathcal{C}$.

57 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Démontrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$ est un cercle.
2°) Déterminer une équation cartésienne de la tangente Δ en O à $\mathcal{C}$.

---

58 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(1 ; -2)$ et de rayon 2.
2°) A tout réel *m*, on associe la droite D_m d'équation cartésienne $y = mx$.
On s'intéresse aux points d'intersection éventuels de $\mathcal{C}$ et de D_m.
a) Démontrer que les abscisses des points d'intersection éventuels de $\mathcal{C}$ et de D_m sont solutions de l'équation $(m^2 + 1)x^2 + 2(2m - 1)x + 1 = 0$ (E).
b) Expliquer pourquoi (E) est une équation du second degré. Calculer le discriminant réduit Δ' de (E).
c) En déduire :
le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de D_m suivant les valeurs de *m*.
les équations réduites des tangentes à $\mathcal{C}$ passant par O.

On rédigera la discussion ainsi :
« Si $m \in]... ; ...[$, alors …. ».

---

59 Le plan *P* est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Préciser l'ensemble $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$.
2°) A tout réel *m*, on associe la droite D_m d'équation cartésienne $y = mx$.
On s'intéresse aux points d'intersection éventuels de $\mathcal{C}$ et de D_m.
a) Démontrer que les abscisses des points d'intersection éventuels de $\mathcal{C}$ et de D_m sont solutions de l'équation $(m^2 + 1)x^2 - 2(3m + 2)x + 4 = 0$ (E).
b) Expliquer pourquoi (E) est une équation du second degré. Calculer le discriminant réduit Δ' de (E).
c) En déduire

- le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de D_m suivant les valeurs de *m*.
- les équations des tangentes à $\mathcal{C}$ passant par O.

On rédigera la discussion ainsi :
« Si $m \in]... ; ...[$, alors …. ».

---

54 Le plan *P* est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (l'unité de longueur choisie est le centimètre).

1°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(4 ; -5)$ tangent à l'axe des abscisses.
2°) Déterminer les points U et V d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées $(y_U > y_V)$.
3°) Déterminer une équation cartésienne de la tangente Δ à $\mathcal{C}$ en U.
4°) Les droites (AU) et Δ coupent l'axe des abscisses respectivement en B et C.
Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC (**N.B.** : on ne demande pas de déterminer les coordonnées de B et C).

---

55 Dans le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (d'unité 1 cm), on donne les points $A(2 ; 1)$ et $B(8 ; 4)$.

1°) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ perpendiculaire en A à (AB).
(**N. B.** : on ne demande pas une équation cartésienne de (AB)).
2°) Déterminer le point C où Δ coupe l'axe des ordonnées $\overrightarrow{CD} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
a) Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?
b) Calculer l'aire de ABDC.

---

56 On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique dans le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction $f : x \mapsto x^2$. On note F le point de coordonnées $\left(0 ; \dfrac{1}{4}\right)$ et *D* la droite d'équation réduite $y = -\dfrac{1}{4}$.

On note $M_0(x_0 ; y_0)$ un point quelconque de $\mathcal{C}$ distinct du sommet O, H son projeté orthogonal sur la droite *D*.
1°) Exprimer M_0F^2 et M_0H^2 en fonction de x_0 ; en déduire que $M_0F = M_0F$.
2°) Soit *T* la tangente à $\mathcal{C}$ en M_0.
Démontrer que *T* est la médiatrice de $[FH]$.
3°) On note $[My)$ la demi-droite d'origine M parallèle à l'axe des ordonnées dans le sens des *y* positifs ; on note $[Mz)$ la demi-droite d'origine M perpendiculaire à *T* et orientée vers l'extérieur de $\mathcal{C}$.

- Démontrer que les angles $\widehat{zMF}$ et $\widehat{yMz}$ ont la même mesure.
- Donner une application de cette propriété.

57 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$(unité : le centimètre), on donne les points $A(5\ ;\ 0)$ et $B(4\ ;\ 4)$. La perpendiculaire Δ en B à (AB) rencontre l'axe des ordonnées en un point C et l'axe des abscisses en un point D.
Faire une figure codée sur une page complète.
1°) Déterminer une équation cartésienne de Δ ; en déduire les coordonnées de C et D.
2°) a) Démontrer que le quadrilatère OABC est inscriptible c'est-à-dire peut être inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$; déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
b) Calculer l'aire de OABC.

---

58 Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$(unité : le centimètre), on donne les points $A(0\ ;\ -2)$, $B(3\ ;\ 4)$ et $C(4\ ;\ 1)$.
1°) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ perpendiculaire à (AB) passant par C.
2°) Déterminer les points d'intersection E et F de Δ respectivement avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
3°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle OEF.

---

59 Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2+y^2+4x+2y+1=0$.
1°) Démontrer que $\mathcal{C}$ est un cercle. Préciser son centre et son rayon.
2°) Démontrer que $\mathcal{C}$ est tangent à l'un des axes de coordonnées.

---

60 Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne les points $A(2\ ;\ 5)$ et $B(2\ ;\ 1)$.
1°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\omega(5\ ;\ 3)$ tangent à la droite (AB).
2°) Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

61 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne : $x^2+y^2-14x+2y+5=0$. L'unité graphique est le centimètre.
1°) Démontrer que $\mathcal{C}$ est un cercle. Préciser son centre Ω et son rayon r. Tracer $\mathcal{C}$.
Pour la construction du rayon, on pourra utiliser l'égalité $45=36+9$
2°) Déterminer les points de $\mathcal{C}$ d'ordonnée 2. On notera A et B ces deux points $\left(x_A<x_B\right)$.
3°) Calculer l'aire du triangle OAB.
4°) Démontrer que la droite (OA) est tangente au cercle $\mathcal{C}$.

---

62 Le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. A tout réel m, on associe la droite D_m d'équation cartésienne $(3m-1)x+(m-2)y+m+3=0$.
1°) Tracer D_0 et D_1 (sur un même graphique).
2°) Démontrer que D_0 et D_1 sont perpendiculaires et déterminer leur point d'intersection K.
3°) Démontrer que toutes les droites passent par un point fixe.

---

63 Dans le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne les points $A(2\ ;\ 5)$, $B(2\ ;\ 1)$ et $C(7\ ;\ 3)$.
Faire une figure <u>codée</u>.
1°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre C tangent à la droite (AB).
2°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection D et E de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses $\left(x_D<x_E\right)$.
3°) Déterminer une équation cartésienne de la tangente Δ à $\mathcal{C}$ en D.
4°) Les droites Δ et (CD) coupent respectivement l'axe des ordonnées en F et G (on ne demande pas leurs coordonnées).
Déterminer les coordonnées du point H, orthocentre du triangle EFG.

---

64 Le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
Déterminer l'ensemble $E=\left\{M(x;y)\in P\ /\ y^2=4x^2\right\}$.

---

65 Le but de cet exercice est d'établir **deux caractérisations d'un triangle isocèle**.

Soit ABC un triangle dans le plan.

Partie A
On note I le milieu du segment $[BC]$.
1°) Vérifier que l'on a : $\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{BI}=\dfrac{BC^2}{2}$

2°) Le but de cette question est de démontrer que ABC est isocèle en A si et seulement si $\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}=\dfrac{BC^2}{2}$.
Il faut démontrer dans les deux sens.
- On suppose que ABC est isocèle en A. Démontrer alors que : $\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}=\dfrac{BC^2}{2}$.
- On suppose que l'on a : $\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}=\dfrac{BC^2}{2}$. Démontrer alors que ABC est isocèle en A.

(on observera que les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont non nuls)

Partie B
Démontrer que ABC est isocèle en A si et seulement les médianes issues de B et C ont la même longueur.
Indication
Utiliser la formule de la médiane.

66 Soit ABC un triangle quelconque et Δ une droite qui n'est ni confondue avec (AB), ni confondue avec (AC), ni perpendiculaire à (AB), ni perpendiculaire à (AC).
Pour la figure, prendre Δ extérieure au triangle.
On note A', B', C' les projetés orthogonaux respectifs de A, B, C sur la droite Δ.
Soit $\mathcal{D}_1$ la droite passant par B' et perpendiculaire à (AC) et $\mathcal{D}_2$ la droite passant par C' et perpendiculaire à (AB).
Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ se coupent en I.
Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (A'I) et (BC) sont perpendiculaires.
1°) Démontrer que $\overrightarrow{A'I}\bullet\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'I}\right)\bullet\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'B'}\bullet\overrightarrow{A'C'}$.

2°) Démontrer de même que $\overrightarrow{\text{A'I}}\bullet\overrightarrow{\text{AB}}=\overrightarrow{\text{A'C'}}\bullet\overrightarrow{\text{A'B'}}$.
3°) Conclure.

67 **V ou F ?**

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques du plan.
1°) On a : $\|\vec{u}+\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$.
2°) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\bullet\vec{v}$.

68 Soit ABCD un carré. On note I le milieu de $[\text{AD}]$.
Parmi les produits scalaires suivants, certains sont égaux ; entourer d'une même couleur ceux qui sont égaux.
$\overrightarrow{\text{AC}}\bullet\overrightarrow{\text{BD}}$ $\quad\overrightarrow{\text{CI}}\bullet\overrightarrow{\text{CD}}$ $\quad\overrightarrow{\text{IB}}\bullet\overrightarrow{\text{IC}}$ $\quad\overrightarrow{\text{IA}}\bullet\overrightarrow{\text{IC}}$ $\quad\overrightarrow{\text{IA}}\bullet\overrightarrow{\text{ID}}$ $\quad\overrightarrow{\text{BI}}\bullet\overrightarrow{\text{BC}}$ $\quad\overrightarrow{\text{BI}}\bullet\overrightarrow{\text{CD}}$ $\quad\overrightarrow{\text{AB}}\bullet\overrightarrow{\text{BC}}$

69 Soit ABCD un rectangle du plan.
1°) Démontrer que, pour tout point M du plan, on a : $\text{MA}^2+\text{MC}^2=\text{MB}^2+\text{MD}^2$.

2°) On suppose que l'on a : $\text{MA}=3,3$, $\text{MB}=1,6$, $\text{MC}=5,6$.
Que vaut la distance MD ?

70 Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A du plan *P* tel que $\text{AB}=6$.
On note I le milieu de $[\text{BC}]$ et J le point défini par $\overrightarrow{\text{AJ}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{AC}}$. Les droites (AI) et (BJ)se coupent en un point G.
1°) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AI}}\cdot\overrightarrow{\text{BJ}}$.
2°) On note θ la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{\text{AGB}}$.
Calculer $\cos\theta$.
5°) a) Exprimer J comme barycentre des points A et C affectés de coefficients que l'on déterminera.
b) Déterminer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que l'on ait $\left(2\overrightarrow{\text{MA}}+\overrightarrow{\text{MC}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\text{MB}}+\overrightarrow{\text{MC}}\right)=0$.

71 L'unité est le centimètre.
Soit ABC un triangle isocèle en C tel que $\text{AB}=12$ et $\text{CI}=9$ où I est le milieu de $[\text{AB}]$.
Partie A

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{CA}}\cdot\overrightarrow{\text{CB}}$; en déduire la valeur de $\cos\widehat{\text{ACB}}$.

Partie B
Soit P et Q deux points de $[\text{BC}]$ symétriques par rapport à I tels que $\text{Q}\in[\text{AI}]$ et $\text{P}\in[\text{IB}]$. On pose $\text{IP}=\text{IQ}=x$ $(0\leq x\leq 6)$.
Les parallèles à (AI) passant par Q et P coupent respectivement (AB) et (AC) en M et N.
On note $f(x)$ l'aire en cm^2 du rectangle MNPQ.
Exprimer $f(x)$ en fonction de *x* ; en déduire pour quelle valeur de *x* l'aire du rectangle est maximale.

72 Soit ABCD un carré du plan, de côté 1.
Soit *x* un réel quelconque appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$. On note M et N définis par :

- $\text{M}\in[\text{AB})$; $\text{M}\notin[\text{AB}]$; $\text{BM}=x$.
- $\text{N}\in[\text{AD}]$; $\text{DN}=x$

Faire une figure en faisant très attention.
Les deux questions sont indépendantes.

1°) Démontrer que $(\text{CM})\perp(\text{CN})$.
2°) La droite (MN) coupe la droite (BC) en un point I.
a) Exprimer BI en fonction de *x*.
b) Déterminer pour quelle valeur de *x* la longueur BI est maximale.

73 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\text{O},\vec{i},\vec{j})$, on donne les points $\text{A}(7\,;\,-2)$ et $\text{B}(10\,;\,1)$.
1°) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ passant par B et de vecteur directeur $\vec{u}(5\,;-2)$.
2°) La droite Δ coupe l'axe des ordonnées en un point C.
Déterminer la nature du point C.

74 1°) **Question préliminaire :** factoriser le polynôme $P(x)=x^2-2x-3$.
2°) Soit ABC un triangle du plan *P* tel que $\text{AB}=x$, $\text{BC}=x+2$, $\text{CA}=x+1$ où *x* est un réel tel que $x>1$ (on admettra qu'un tel triangle existe dans ce cas).
a) Exprimer $\cos\widehat{\text{BAC}}$ en fonction de *x* sous la forme d'un quotient simplifié.
b) **Applications :** déterminer *x* tel que
- le triangle ABC soit rectangle
- $\widehat{\text{BAC}}=60°$

3°) **Question facultative :** justifier que $x>1$ est une CNS pour que le triangle ABC existe.

75 Soit ABCD un carré de côté 3. On définit les points I et J par $\overrightarrow{\text{BI}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{BC}}$ et $\overrightarrow{\text{DJ}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{DC}}$.
1°) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AI}}\bullet\overrightarrow{\text{AJ}}$.
2°) Soit H le projeté orthogonal de J sur (AI). On pose $\overrightarrow{\text{AH}}=\lambda\,\overrightarrow{\text{AI}}$.
Calculer λ ; en déduire que H est le centre de gravité de ABC.

76 Soit ABCD un parallélogramme tel que $\text{AB}=5$, $\text{AC}=3$ et $\widehat{\text{BAD}}=\theta$ $\quad(0<\theta<\pi)$.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AB}}\bullet\overrightarrow{\text{AC}}$ en fonction de θ.

77 Soit ABCD un parallélogramme. On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
Dans ces conditions, les égalités ci-dessous sont-elles toujours vraies ?

a) $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AH}}=\overrightarrow{\text{AC}}\cdot\overrightarrow{\text{AH}}$
b) $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}=\text{AH}^2$
c) $\overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{BH}}=\overrightarrow{\text{CA}}\cdot\overrightarrow{\text{CH}}$
d) $\overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{BD}}=\text{BA}^2$
e) $\overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{BD}}=\text{HA}^2$
f) $\overrightarrow{\text{BD}}\cdot\overrightarrow{\text{AH}}=\overrightarrow{\text{CA}}\cdot\overrightarrow{\text{AH}}$
g) $\overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{CD}}=\text{BA}^2$ (exercice cahier de texte de Corneille)

78 Soit ABCD un carré de côté 6. On note I le milieu de [BC] , J le point de [CD] tel que $\text{DJ}=2$ et H le centre de gravité du triangle ABC.

1°) Démontrer que le triangle AJH est rectangle isocèle.
2°) Démontrer que le symétrique de H par rapport à J appartient à la droite (AD).

Suggestion pour les deux questions : utiliser un repère.

79 Soit ABC un triangle tel que $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.
Déterminer la nature du triangle ABC.

(énoncé contrôle Christian Vassard rentré dans mon ordinateur)

On considère la figure ci-contre où ABCD est un carré de côté a et BEFG est un carré de côté b, a et b étant deux réels tels que l'on ait : $0<a<b$.

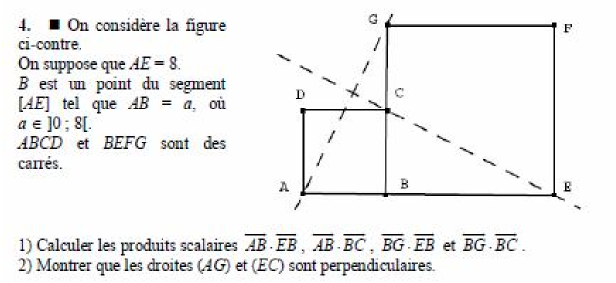
Démontrer que les droites (AG) et (EC) sont perpendiculaires.

Solution : $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{DE}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}\right)\cdot\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{DA}=a\left(a+b\right)-a\left(a+b\right)$

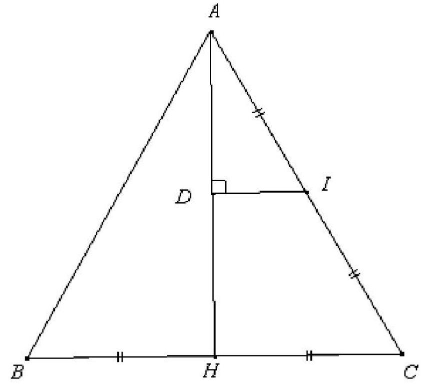
Contrôle Simsolo enregistré dans l'ordi

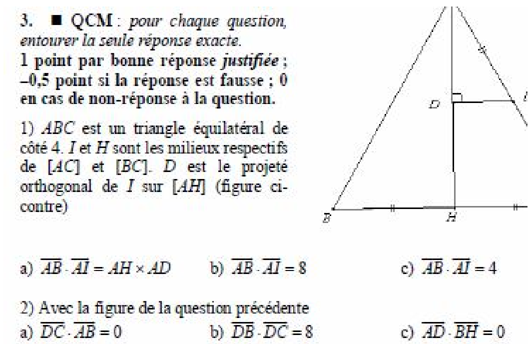
On considère un cerle C de centre I dans lequel est inscrit un triangle ABC. Dans ce triangle, on note B0 le pied de la hauteur issue de B et C0 celui issu de C.
1. D´emontrer que : AB AC = 2AI.AB0 d'une part et que : AB.AC = 2AI.AC0 d'autre part.
2. D´emontrer que les droites (AI) et (B0C0) sont orthogonales.

ExerciceO
On suppose que AE = 8. B est un point du segment [AE] tel que AB = a, où a Î]0 ; 8[.
ABCD et BEFG sont des carrés.
1°) Calculer les produits scalaires AB × EB, AB× BC, BG× EB et BG× BC.
2°) Démontrer que les droites (AG) et (EC) sont perpendiculaires.


4. ■ On considère la figure ci-contre.
On suppose que $AE = 8$.
B est un point du segment $[AE]$ tel que $AB = a$, où $a \in]0 ; 8[$.
$ABCD$ et $BEFG$ sont des carrés.

1) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BC}$.
2) Montrer que les droites (AG) et (EC) sont perpendiculaires.




3. ■ QCM : *pour chaque question, entourer la seule réponse exacte.*
1 point par bonne réponse *justifiée* ; –0,5 point si la réponse est fausse ; 0 en cas de non-réponse à la question.
1) ABC est un triangle équilatéral de côté 4. I et H sont les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BC]$. D est le projeté orthogonal de I sur $[AH]$ (figure ci-contre)

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}=AH\times AD$ b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}=8$ c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}=4$

2) Avec la figure de la question précédente
a) $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ b) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=8$ c) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BH}=0$

n QCM : pour chaque question, entourer la seule réponse exacte. 1 point par bonne réponse justifiée ; –0,5 point si la réponse est fausse ; 0 en cas de non-réponse à la question. 1) ABC est un triangle équilatéral de côté 4. I et H sont les milieux respectifs de [AC] et [BC]. D est le projeté orthogonal de I sur [AH] (figure cicontre) a) AB × AI = AH ´ AD
uuur uur b) AB× AI = 8 uuur uur c) AB × AI = 4
uuur uur
2) Avec la figure de la question précédente a) DC× AB = 0 uuur uuur b) DB×DC = 8 c) AD× BH = 0

Réponses

2 4°) a) $\left\|2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|=\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$; $BG=a\sqrt{7}$

5 1°) $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}=a^2$; $AH=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$; $\cos\widehat{IAJ}=\dfrac{4}{5}$.

4 1°) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right) = ... = b^2 - a^2$

Lorsque $a > b$, alors $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{HK}$ sont colinéaires et de sens opposés.

Donc $HK = \dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

8 1°) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC} = 2$ 2°) a) b) $x = \sqrt{2}-1$

9 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF} = 1$

13 2°) a) $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{BJ} = -a^2$ b) $\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$ 3°) E est le cercle de diamètre [IJ].

15 1°) $f(A) = f(B) = f(C) = \dfrac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB} = -\dfrac{a^2}{6}$; $f(G) = -\dfrac{a^2}{2}$ 3°) si $k > -\dfrac{2a^2}{3}$, cercle de centre G et de rayon $r = \dfrac{\sqrt{2a^2+3k}}{3}$. $k = -\dfrac{2a^2}{3}$ $\{G\}$ Si $k < -\dfrac{2a^2}{3}$, $\varnothing$.

18 2°) E_1 est le cercle de diamètre [IJ] ; E_2 est la droite perpendiculaire à (CI) passant par J.

29 $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{BJ} = -a^2$

32 **Partie A** 1°) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DI} = \dfrac{a^2}{2} - b^2$.

2°) (AC) et (DI) sont perpendiculaires si et seulement si $a = \sqrt{2}b$.

Partie B

1°) $MA^2 + MB^2 + 2\,MC^2 = 4MJ^2 + 16$

2°) E est le cercle de centre J et de rayon 1.

33 1°) $p_1 = -\dfrac{a^2}{2}$; $p_2 = \dfrac{a^2}{2}$; $p_3 = -\dfrac{a^2}{2}$; $p_4 = -\dfrac{a^2}{2}$ 2°) E est le cercle de diamètre $[IJ]$.

3°)

34 2°) AIJ est rectangle en I.

3°) cercle de diamètre [AJ] : $x^2 + y^2 - \dfrac{3}{4}x - y = 0$

35 2°) DIJ est rectangle isocèle en J.

3°) $x^2 + y^2 - \dfrac{1}{2}x - y = 0$

38 1°) $A(3\,;8)$, $B(0\,;3)$ et $C(5\,;0)$. 2°) ABC est rectangle isocèle en B.

39 3°) a) $C(4\,;3)$

40 1°) a) $(x-m)^2 + (y-2m-1)^2 = 5(m^2-2m+2)$

42 2°) On obtient l'équation $2x^2 + 2xm + m^2 - 4m = 0$

Son discriminant réduit est égal à $\Delta' = m(8-m)$.

Si $m \in]0;8[$, alors D_m et $\mathcal{C}$ se coupent en deux points distincts.

Si $m \in]-\infty\,;0[\,\cup\,]8\,;+\infty[$, alors D_m et $\mathcal{C}$ n'ont aucun point d'intersection.

Si $m = 0$ ou $m = 8$, alors D_m et $\mathcal{C}$ se coupent en un seul point.

N.B. : il vaut mieux faire un **tableau**.

3°) a) b) $J\left(-\dfrac{m}{2}\,;\,\dfrac{m}{2}\right)$; on a $y_J = -x_J$ donc J appartient à la droite d'équation réduite $y = -x$.

44 1°) $A(-3\,;4)$, $B(4\,;0)$ et $C(0\,;6)$. 2°) ABC est rectangle en C.

44 bis

1°) $A(1\,;\,-3)$ et $B(3\,;1)$

2°) Le triangle OAB est isocèle rectangle en O (on calcule deux distances et un produit scalaire).

45 1°) a) $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(2\,;3)$ et de rayon $R = 2$.

2°) a) Une équation cartésienne de D' s'écrit $x + y - 5 = 0$.

$A\left(2-\sqrt{2}\,;\,3+\sqrt{2}\right)$ et $B\left(2+\sqrt{2}\,;\,3-\sqrt{2}\right)$

47 2°) $A\left(-\dfrac{m+1}{m}\,;\,m+1\right)$ et $B\left(-1-m\,;\,\dfrac{m+1}{m}\right)$.

51 3°) a) $f(x) = \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{2}{3}x - 4$ c) $S\left(1\,;\,-\dfrac{13}{3}\right)$

53 $\Delta' = 12m + 5m^2$

54 4°) $H\left(4\,;\,\dfrac{10}{3}\right)$

55 3°) b) 25 cm^2.

58 1°) $\Delta : x + 2y - 6 = 0$ 2°) $E(6\,;0)$ et $F(0\,;3)$ 3°) $x(x-6) + y(y-3) = 0$

61 1°) $\Omega(7\,;\,-1)$; $r = 3\sqrt{5}$.

2°) $A(1\,;2)$ et $B(13\,;2)$.

3°) 12 cm^2.

62 1°) $D_0 : -x - 2y + 3 = 0$; $D_1 : 2x - y + 4 = 0$.

2°) $K(-1\,;2)$

70 1°) $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ} = -48$.

2°) $\cos\theta$ 2°) a) Exprimer J comme barycentre des points A et C affectés de coefficients que l'on déterminera.

b) Déterminer l'ensemble E des points M du plan P tels que l'on ait $\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right) = 0$.

$\boxed{74}$ 2°) a) $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{x-3}{2x}$

b)

- le triangle ABC soit rectangle en A pour $x = 3$
- $\widehat{BAC} = 120°$ pour $x = \dfrac{3}{2}$

$\boxed{75}$ 1°) $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ} = \dfrac{15}{2}$ 2°) $\lambda = \dfrac{2}{3}$

Ex 1: [AB] est un segment de 2cm; C est un point de sa médiatrice tel que AC = 4cm.

a) calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$ puis les angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ de ABC e^xprimés en degrés.

b) G étant le centre de gravité de ABC, calculer $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$. En déduire que $\widehat{AGB} = \widehat{A} = \widehat{B}$.

Eléments de corrigé

Geométrie 1

a) Soit C' le milieu de [AB] ; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overline{AB}\times\overline{AC'} = AB\times AC' = 2\times1 = 2$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overline{AB}\times\overline{BC'} = -AB\times BC' = -2$.

$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AB}\cdot 2\overrightarrow{CC'} = 0$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont orthogonaux.

ABC est isocèle de sommet principal C donc $\widehat{A} = \widehat{B}$,

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos\widehat{A} = 2$ soit $\cos\widehat{A} = 1/4$ d'où $\widehat{A} = 75{,}5°$ au dixième près.

puis $\widehat{C} = 29°$ au dixième près.

b) $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = (\overrightarrow{GC'}+\overrightarrow{C'A})(\overrightarrow{GC'}-\overrightarrow{C'A}) = GC'^2 - C'A^2 = \frac{1}{9}CC'^2 - C'A^2 = \frac{1}{9}(CA^2 - AC'^2) - C'A^2 = \frac{1}{9}(16-1)-1 = \frac{2}{3}$

On a aussi $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = GA.GB\cos\widehat{AGB} = GA^2\cos\widehat{AGB}$

Puis on évalue GA^2 à l'aide de la relation de Pythagore généralisée dans GAB.

$AB^2 = GA^2+GB^2 - 2GA.GB\cos\widehat{AGB}$ soit $4 = 2GA^2(1-\cos\widehat{AGB})$

Il vient alors $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = \dfrac{2\cos\widehat{AGB}}{1-\cos\widehat{AGB}}$; on résout alors $\dfrac{2\cos\widehat{AGB}}{1-\cos\widehat{AGB}} = \dfrac{2}{3}$

et on obtient $\cos\widehat{AGB} = 1/4$.

les angles géométriques $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{AGB}$ ayant même cosinus sont égaux

$\boxed{79}$ ABC est isocèle