Travail d'été de mathématiques 1$^{\text{ère}}$ S

Année scolaire 2006-2007

J'ai conçu ces exercices pour vous aider dans votre travail de révision d'été.
Temps de repos, les vacances d'été doivent aussi être l'occasion de reprendre les notions étudiées durant l'année scolaire. C'est le moment de consolider les bases.
En effet, on commence extrêmement rapidement en terminale et je vous rappelle que les dossiers de terminale pour les classes préparatoires prennent en compte seulement les trois trimestres et les deux premiers trimestres de terminale.

Les exercices sont répartis en sept séries reprenant les principales notions du programme de 1$^{\text{ère}}$ S. Leur niveau va du simple au compliqué.
L'abondance ne doit pas vous effrayer : il ne s'agit en aucun cas de tous les faire.
Choisissez-en quelques uns, en fonction du temps dont vous disposez, dans chaque série en commençant par ceux dont j'ai mis les réponses. N'oubliez cependant pas de revoir le cours correspondant à chaque fois.

Enfin malgré toute l'attention que j'ai pu y apporter (ce dossier m'a demandé des mois de travail !), il se peut que quelques erreurs se soient glissées. N'hésitez pas à me les signaler ainsi que toutes les remarques dont vous voudriez me faire part.

Il ne me reste plus qu'à vous souhaiter de bonnes vacances en espérant que vous tirerez le plus grand profit de ce travail.

Monsieur Monty

P.S. : Vu le très grand nombre de feuilles, je vous conseille vivement de les numéroter, éventuellement de les mettre dans un dossier avec pochettes plastiques.

1$^{\text{ère}}$ série

Chapitres abordés : révisions sur les fonctions, sur les valeurs absolues, les fonctions paire ou impaires, les fonctions associées, les opérations algébriques sur les fonctions, les composées de fonctions (ensembles de définition et sens de variations), les fonctions polynômes.

$\boxed{1}$ **V ou F ?**

$\boxed{1}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Pour tout réel x de l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f on a $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$.

$\boxed{2}$ Soit une fonction numérique *f*.
La représentation de la fonction $|f|$ est située dans le demi-plan au-dessus de l'axe des abscisses (frontière comprise).

$\boxed{3}$ La fonction $f : x \mapsto \sqrt{3x - x^2}$ a pour ensemble de définition l'intervalle $[0;3]$.

$\boxed{4}$ La fonction carrée est monotone sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{5}$ La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+3}$ est à valeurs positives ou nulles

$\boxed{6}$ La composée de la fonction $u : x \mapsto x+1$ définie sur $\mathbb{R}$ suivie de la fonction $v : x \mapsto 1 - x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est la fonction $f : x \mapsto -2x - x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{7}$ On considère les fonctions $f : x \mapsto x - x^3$ et $g : x \mapsto x+1$.

Pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a : $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = x - x^2$.

$\boxed{8}$ On considère les fonctions $f : x \mapsto -2x$ et $g : x \mapsto \dfrac{3}{4}x$.

Pour tout réel *x*, on a : $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

$\boxed{9}$ On considère les fonctions $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto 2 - x$.

On a $(u \circ v)\left(\dfrac{3}{2}\right) = -(v \circ u)\left(\dfrac{3}{2}\right)$

$\boxed{10}$ Si $f : x \mapsto |x^2 - 4|$, $g : x \mapsto |x-2|$ et $h : x \mapsto |x+2|$, alors $f = g \times h$

$\boxed{11}$ On considère les fonctions $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto 2x$.
Pour tout réel *x*, on a : $(u \circ v)(x) = (v \circ u)(x)$

$\boxed{12}$ On considère les fonctions $u : x \mapsto 3x$ et $v : x \mapsto x+1$.
Il existe un réel *x*, tel que l'on ait : $(u \circ v)(x) = (v \circ u)(x)$.

$\boxed{13}$ On considère les fonctions $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$.
Pour tout réel *x*, on a : $(v \circ u)(x) = |x|$.

$\boxed{14}$ On considère les fonctions $u : x \mapsto x^3$ et $v : x \mapsto x^2 + 1$.
Pour tout réel *x*, on a : $(v \circ u)(x) = x^9 + 1$

$\boxed{15}$ On considère les fonctions $u : x \mapsto -x^2$ et $v : x \mapsto 2x-1$.
Pour tout réel *x*, on a : $u(x) \leq v(x)$.

$\boxed{16}$ La composée de deux fonctions linéaires est une fonction linéaire.

$\boxed{17}$ On considère la fonction *f* définie par $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$ et on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
La courbe $\mathcal{C}$ est l'image de la courbe représentative de la fonction carrée par la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{i}$.

$\boxed{18}$ On considère la fonction *f* définie par $f(x) = \frac{x+3}{x}$ et on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
La courbe $\mathcal{C}$ est l'image de la courbe représentative de la fonction carrée par la translation de vecteur $3\vec{i}$

$\boxed{19}$ On considère les fonctions $u : x \mapsto x^4 - 1$ et $v : x \mapsto x^2 + 1$.
La fonction $\frac{u}{v}$ est une fonction polynôme.

$\boxed{20}$ Soit *f* une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et *g* la fonction définie par $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$.
On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' leurs représentations graphiques respectives dans le plan muni d'un repère.
On passe de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}$ ' en multipliant par 2 les abscisses de tous les points de $\mathcal{C}$.

$\boxed{2}$ On considère la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x^2+1}$.
1°) Etudier la parité de *f*.
2°) Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

- La courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère admet l'origine du repère pour centre de symétrie.
- Si $x \geq 0$, alors $f(x) \geq 0$.
- La courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère coupe l'axe des abscisses en trois points distincts.

$\boxed{3}$ On considère la fonction $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$.

Justifier que *f* est définie sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que *f* est à valeurs positives.

$\boxed{4}$ Soit *u* une fonction numérique définie sur l'intervalle $[-3;4]$ et *v* une fonction numérique définie sur l'intervalle $[2;5]$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $u + v$.
2°) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto u(x+4)$.
3°) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto v(3x)$.

$\boxed{5}$ On considère les fonctions $u : x \mapsto -x^2$, $v : x \mapsto 2x-1$ et $w : x \mapsto \sqrt{x}$.
1°) Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de *u* dans le plan muni d'un repère ; expliquer préalablement le tracé.
2°) Dire si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses.
a) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\,;\,1\}$; $\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{x+1}{x-1}$.
b) Pour tout réel *x*, on a : $(w \circ u)(x) = |x+1|$.

$\boxed{6}$ Soit *x* un réel quelconque tel que l'on ait $0 < x < 1$.
Comparer les réels $\frac{1}{1+x}, \frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{1+x^3}$.

$\boxed{7}$ 1°) On considère les fonctions $u : x \mapsto 2x$ et $v : x \mapsto x^2$.
On définit les phrases mathématiques suivantes
P : « Pour tout réel *x*, on a : $(u \circ v)\ (x) = (v \circ u)\ (x)$ »
Q : « Il existe au moins un réel *x* tel que : $(u \circ v)\ (x) = (v \circ u)\ (x)$ »

Dire pour chacune de ces phrases si elle est vraie ou fausse.

2°) On considère les fonctions $u : x \mapsto -x^2$ et $v : x \mapsto 2x-1$.
On définit les phrases mathématiques suivantes
P : « Pour tout réel *x*, on a : $(u + v)\ (x) \leq 0$ »
Q : « Pour tout réel *x* on a : $(u \circ u)\ (x) = x^4$ »
Dire pour chacune de ces phrases si elle est vraie ou fausse

3°) On considère les fonctions $u : x \mapsto -x^2$ et $v : x \mapsto -2x+1$.
On définit les phrases mathématiques suivantes
P : « Pour tout réel *x*, on a : $u(x) \leq v(x)$ ».
Q : « Pour tout réel *x* on a : $(v \circ u)\ (x) \geq 0$ ».
Dire pour chacune de ces phrases si elle est vraie ou fausse

$\boxed{8}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$.

Démontrer que pour tout réel *x* non nul on a $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

$\boxed{9}$ On considère la fonction *u* définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2$ et la fonction *v* définie $\mathbb{R}_+$ par $v(x) = \sqrt{x}$.
Dire, en justifiant, si les affirmations ci-dessous sont **vraies** ou **fausses**.

1ère affirmation : La fonction $v \circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$.
2e affirmation : Pour tout réel *x*, on a : $(v \circ u)\ (x) = |x|$

$\boxed{10}$ On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-1$ et $g(x)=(x-1)(x+3)$.

On note **C** et **C '** leurs représentations graphiques respectives dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) Mettre $g(x)$ sous forme canonique.

2°) Expliquer comment on peut obtenir point par point **C** et **C '** à partir des représentations graphiques de deux fonctions de références u et v dont on donnera les expressions. Sur une même figure, tracer **C** et **C '** ; on tracera en pointillés les représentations graphiques de u et v.

3°) Résoudre par le calcul l'équation $f(x)=g(x)$.

On rappelle que pour tout couple (a, b) de réels on a $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

$\boxed{11}$ On considère les fonctions $u : x \mapsto x^2$, $v : x \mapsto 1-2x$ et $w : x \mapsto \sqrt{x}$.

Dire si les affirmations ci-dessous sont **vraies** ou **fausses**.

1°) Pour tout réel x, on a : $(u+v)(x)=(x-1)^2$.

2°) La fonction $w \circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$.

2°) Pour tout réel x, on a : $(w \circ u)(x)=|x|$.

$\boxed{12}$ Parmi les fonctions suivantes laquelle ou lesquelles sont des fonctions polynômes du second degré ?

$f : x \mapsto \sqrt{(x-1)^4}$ $\quad g : x \mapsto \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$ $\quad h : x \mapsto (x+2)^2-(x-2)^2$

$\boxed{13}$ **Q.C.M.**

1°) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{(x+1)^4}$ est

A : une fonction polynôme du second degré

B : une fonction affine

C : n'est pas une fonction polynôme.

2°) On considère les fonctions $u : x \mapsto x^2+1$ et $v : x \mapsto -3x$. Pour tout réel x, $(u \circ v)(x)$ est égal à :

A : $-3x^2-3$ $\quad$ B : $-3x^2+1$ $\quad$ C : $9x^2+1$

3°) L'équation $x^2-2|x|-3=0$ a solutions

A : 1 ; -1 ; 3 ; -3 $\quad$ B : 3 et -3 $\quad$ C : -1 et 3

$\boxed{14}$ Parmi les trois fonctions f, g, h définies ci-dessous deux sont égales. Lesquelles ?

$f(x)=1+\dfrac{2}{x-1}$; $g(x)=1-\dfrac{2}{x+1}$; $h(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

$\boxed{15}$ Soit u une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x on ait $u(x)\neq 0$.

On pose $f(x)=\dfrac{1}{u(x)}$.

1°) Expliquer pourquoi f est définie sur $\mathbb{R}$.

2°) Démontrer que si u est paire, alors f est paire (en utilisant la définition algébrique d'une fonction paire).

3°) Démontrer que si u est impaire, alors f est impaire.

$\boxed{16}$ On considère les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1}$ et $g : x \mapsto 1-x^2$.

1°) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ on a : $(g \circ f)(x)=\dfrac{2x}{(x+1)^2}$.

2°) Résoudre l'équation $f(x)=g(x)$.

$\boxed{16}$ On considère les fonctions u, v et w définies par $u(x)=-x^3-3x$, $v(x)=3x^2+1$ et $w(x)=\sqrt{x}$.

Dire si les affirmations ci-dessous sont **vraies** ou **fausses**.

1°) Pour tout réel x, on a : $(u+v)(x)=(x-1)^3$.

2°) L'ensemble de définition de $w \circ u$ est $\mathbb{R}$.

3°) La fonction v est croissante sur $\mathbb{R}$.

4°) La courbe représentative de u dans le plan muni d'un repère quelconque admet l'origine du repère pour centre de symétrie.

$\boxed{17}$ On considère les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ et $g : x \mapsto 1-x^2$.

1°) Démontrer que, pour tout réel x, on a : $(g \circ f)(x)=\dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}$.

2°) Résoudre l'équation $f(x)=g(x)$.

$\boxed{18}$ **Q.C.M.**

1°) On considère les fonctions $f : x \mapsto -x+1$ et $g : x \mapsto -x^3$.

Pour tout réel x, $(g \circ f)(x)$ est égal à :

A : $(x-1)^3$ $\quad$ B : x^3-1 $\quad$ C : x^3+1

2°) On considère les fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto -\dfrac{1}{2}x$.

Pour tout réel x, $(g \circ f)(x)$ est égal à :

A : $-\dfrac{x^2}{2}$ $\quad$ B : $-\dfrac{1}{2}x^3$ $\quad$ C : $\dfrac{x^2}{4}$

3°) On reprend les fonctions du 2°).

Pour tout réel x, $(g \circ g)(x)$ est égal à :

A : $-\dfrac{x}{4}$ $\quad$ B : $\dfrac{x}{4}$ $\quad$ C : $\dfrac{x^2}{4}$

$\boxed{19}$ On considère les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $g : x \mapsto x^2$.

Déterminer la fonction $g \circ f$.

$\boxed{20}$ Soit f une fonction définie sur IR. On pose $g(x) = |f(x)|$.

V ou F ?

1°) La représentation de la fonction g est située dans le demi-plan au-dessus de l'axe des abscisses (frontière comprise).

2°) Si f est impaire, alors g est paire.

$\boxed{21}$ **Questions de cours**

Soit u et v deux fonctions numériques définies sur un intervalle non vide I.

1°) On suppose que u et v sont croissantes sur I.

Quel est le sens de variation de $u + v$ sur I ?

Démontrer ce résultat.

2°) Peut-on déduire le sens de variation de $u + v$ si u est croissante sur I et v décroissante sur I ?

$\boxed{22}$ 1°) Soit f et g deux fonctions quelconques. On note $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ leurs ensembles de définition respectifs.

Parmi les fonctions $f \circ g$, $f \times g$, $g \circ f$, $f + g$ lesquelles ont pour ensembles de définition $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$?

2°) Parmi les fonctions suivantes lesquelles sont des fonctions polynômes ?

$\boxed{23}$ On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 + 2x$ et on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Démontrer que, pour tout réel x, on a : $f(x) = (x+1)^2 - 1$.

2°) En déduire le tracé de $\mathcal{C}$ en expliquant.

3°) Sur le même graphique, tracer la représentation graphique $\mathcal{C}'$ de la fonction $g : x \mapsto |x^2 + 2x|$.

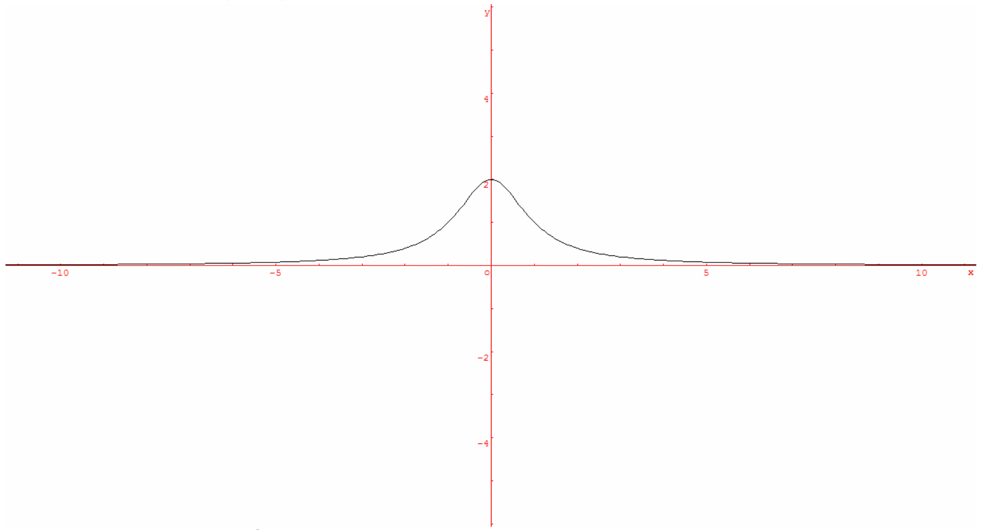
$\boxed{24}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{-x}$ et on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Tracer $\mathcal{C}$ en expliquant le tracé.

$\boxed{25}$ Construire la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = |x^2 - 1|$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Expliquer.

$\boxed{26}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{x^2 + 1}$ et on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.



1°) Justifier la symétrie de $\mathcal{C}$.

2°) En écrivant f comme composée de quatre fonctions de référence, étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

3°) Déterminer par le calcul les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la parabole Γ d'équation $y = x^2$. Contrôler graphiquement.

4°) On considère la courbe $\mathcal{C}'$ d'équation $y = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

Démontrer que $\mathcal{C}'$ est l'image de $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur $-\vec{j}$.

$\boxed{27}$ 1°) On considère les fonctions u et v définies par $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = -\dfrac{1}{x-2}$.

On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ leurs représentations graphiques respectives dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : le centimètre).

Tracer $\mathcal{C}$; en déduire le tracé point par point de $\mathcal{C}'$ sur le même graphique (expliquer les étapes du tracé de $\mathcal{C}'$ à partir de celui de $\mathcal{C}$).

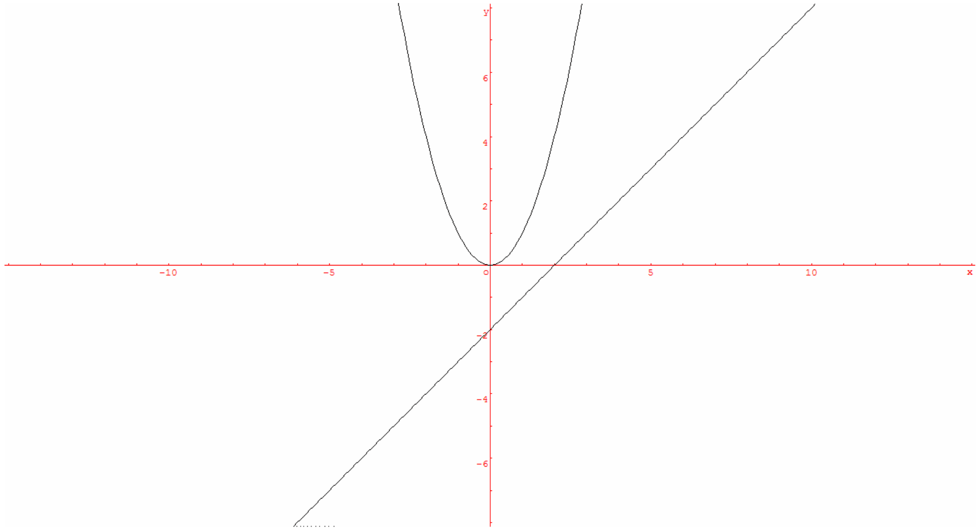
2°) On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{|x-1| + 1}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Déterminer l'expression de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

En déduire le tracé en rouge de la courbe représentative de f sur le même graphique qu'à la question précédente.

$\boxed{28}$ On donne ci-dessous les représentations graphiques respectives $\mathcal{C}$ et D de deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.



1°) Déterminer graphiquement $(v \circ u)(-1)$ et $(v \circ u)(2)$.
2°) Sachant que la fonction *v* est affine, déterminer son expression.
3°) On donne $u(x)=x^2$.
a) Déterminer l'expression de *v* o *u* et *u* o *v*.
b) Retrouver alors les résultats du 1°).
c) Déterminer le (ou les) nombre(s) ayant la même image par *u* o *v* et *v* o *u*.
4°) Justifier par le calcul que $\mathcal{C}$ est toujours au-dessus de *D*.
5°) Etudier les variations *u* o *v* sur $\mathbb{R}$.

---

29 **V ou F ?**

On considère la fonction *f* définie par $f(x)=x^2-1$ et on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$.
1°) $\mathcal{C}$ est l'image de la parabole d'équation $y=x^2$ par la translation de vecteur $-\vec{j}$.
2°) Pour tout réel *k*, l'équation $f(x)=k$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.
3°) La courbe $\mathcal{C}$ coupe la droite *D* d'équation $y=x-1$ en deux points distincts.

30 On considère les fonctions *f* et *g* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-1$ et $g(x)=x-1$ les représentations graphiques respectives $\mathcal{C}$ et *D* dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : le centimètre).
1°) Tracer $\mathcal{C}$ et *D* sur le même graphique.
2°) Calculer $(f \circ g)(x)$ pour tout réel *x* quelconque.
3°) Etudier par le calcul la position relative de $\mathcal{C}$ et *D*.
Contrôler graphiquement.

31 On considère la fonction $f : x \mapsto -2x^3+1$.
Etudier les variations de *f* sur $\mathbb{R}$.
On pourra par exemple décomposer *f* à l'aide de deux fonctions de référence.

---

32 On considère la fonction $f : x \mapsto x(4-x)$.
1°) Développer puis déterminer la forme canonique $f(x)$.
2°) Etudier les variations de *f*.

---

33 On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.
1°) Déterminer l'ensemble de définition *D* de *f*.
2°) Etudier la parité de *f*.
3°) Démontrer que *f* admet un maximum global sur $\mathbb{R}$.
4°) Résoudre l'équation $f(x)=\dfrac{1}{2}$.

---

34 Construire la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto |x^2-4|$.

---

35 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ et on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$.
1°) Démontrer que $\mathcal{C}$ est au-dessous de la droite *D* d'équation réduite $y=1$.
2°) Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de la parabole Γ d'équation $y=x^2$.

---

36 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ et on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$.
Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la parabole Γ d'équation $y=x^2$.

---

37 On considère la fonction $u : x \mapsto 2x-5$.
On considère les intervalles $\mathrm{I}=[0\ ;\ 5]$ et $\mathrm{J}=[-5\ ;\ 5]$.
Démontrer que si $x \in \mathrm{I}$, alors $u(x) \in \mathrm{J}$ selon le schéma suivant à recopier et à compléter :

$0 \le x \le 5$

$\times 2 \quad (2>0)$

$\ldots \le 2x \le \ldots$

-5

$\ldots \le 2x-5 \le \ldots$

En déduire que la fonction *u* est bornée sur l'intervalle I.

38 On considère les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $g : x \mapsto \frac{2x+1}{x}$.

On note $\mathcal{H}$ et $\mathcal{C}$ leurs représentations graphiques respectives dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité graphique : le centimètre).

1°) Comment peut-on obtenir $\mathcal{C}$ à partir de $\mathcal{H}$?
Tracer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$ sur un même graphique.

2°) Déterminer une équation de $\mathcal{C}$ ' image de $\mathcal{H}$ par la translation de vecteur $-3\vec{i}+\vec{j}$?

3°) On considère la fonction $h : x \mapsto \frac{2|x|+1}{x}$.

a) Etudier la parité de h.
b) Tracer en rouge sur le graphique précédent la courbe représentative Γ de h.

---

39 On considère les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{x-1}$ et $g : x \mapsto \frac{x+2}{x+1}$.

Déterminer l'ensemble de définition et l'expression des fonctions suivantes $f+g$, fg, $-3f$, $\frac{f}{g}$.

---

40 On considère la fonction f définie par $f(x) = -x\sqrt{2}+1$.

Calculer $(f \circ f)(x)$ où x est un réel quelconque.

---

41 On considère les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\sqrt{2}-1$ et $v(x) = x\sqrt{2}+1$.

Déterminer la fonction $f = uv$.

---

42 Dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' les courbes d'équations respectives $y = \frac{x+1}{x}$ et $y = (x+1)^2$.

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes.

1°) La courbe $\mathcal{C}$ est l'image de la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ par une translation.

2°) La courbe $\mathcal{C}$ ' est l'image de la courbe d'équation $y = x^2$ par une translation.

3°) Les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' ont deux points d'intersection.

4°) L'image de $\mathcal{C}$ par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées a pour équation $y = \frac{x-1}{x}$.

---

43 On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

Quelle est l'image de $\sqrt{3}$ par la fonction $-2f$?
Donner le résultat sous forme simplifiée.

44 On considère les fonctions $f : x \mapsto \frac{1-x}{x}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x+1}$.

1°) Déterminer la fonction $f \circ g$ (ensemble de définition et expression).

2°) Tracer les courbes représentatives de f et g dans le plan muni d'un repère sur un même graphique.
Expliquer les tracés de chacune des deux courbes.

---

45 On considère les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ et $g : x \mapsto 3-x^2$.

Calculer $(g \circ f)(x)$ où x est un réel quelconque.

---

46 Déterminer la fonction $g \circ f$ dans les cas suivants :

1°) $f : x \mapsto 2x-1$ et $g : x \mapsto \frac{x}{3}+4$.

2°) $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$ et $g : x \mapsto 6-x^2$

3°) $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x+1}$

4°) $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$

---

47 On considère les fonctions $u : x \mapsto x^3-3x$ et $v : x \mapsto 1-x$.

1°) Calculer $u\left(\sqrt{2}\right)$.

2°) Déterminer la fonction $v \circ u$.

---

48 1°) On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ et $g(x) = \sqrt{x}+2$.

Les fonctions f et g sont-elles égales ?

2°) On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{4-(x-2)^2}{x^2}$ et $g(x) = \frac{4}{x}-1$.

Les fonctions f et g sont-elles égales ?

---

49 On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ et $g(x) = \frac{1-x}{1+|x|}$. On note C et C' leurs représentations graphiques respectives dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité graphique : le centimètre).

1°) Démontrer que C et C' sont confondues sur $\mathbb{R}_+$.

2°) Démontrer que g est constante sur $\mathbb{R}_-$

3°) Démontrer que, pour tout réel $x \neq -1$, on a : $f(x) = \frac{2}{x+1}-1$.

En déduire le tracé de C' à partir de la courbe H d'équation $y = \frac{2}{x}$.

Tracer C' en rouge sur le même graphique que précédemment.

$\boxed{50}$ On considère la fonction *f* définie par $f(x) = x^2 - 4x$.

1°) Résoudre l'équation $f(-x) = f(x)$.

2°) Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses.

« Pour tout réel *x*, on a : $f(-x) = f(x)$ ».

« Il existe un réel *x* tel que $f(-x) = f(x)$ ».

« Pour tout réel *x*, on a : $f(-x) \neq f(x)$ ».

« Il existe un réel *x* tel que $f(-x) \neq f(x)$ ».

$\boxed{51}$ On considère la fonction *f* définie par $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$.

1°) Etudier la parité de *f*.

2°) On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de *f* dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Tracer $\mathcal{C}$, en expliquant.

$\boxed{52}$ **Compléter** :

1°) $|x| =$ ………….si ………

 ……..…….si……..

2°) $\sqrt{x^2} =$ ………

3°) $|x| < 3$ équivaut à ……………………………………………..

4°) $|x| = |y|$ équivaut à ……………………………………………

5°) La distance entre deux réels *x* et *y* est donnée par $\mathrm{d}(x\,;y) =$ ……………

$\boxed{53}$ **Compléter**

1°) Pour tout réel *x*, on a $\sqrt{x^2} =$ ………

2°) Si $x \leq 1$, alors $|x-1| =$……..

3°) Si $x \in \left]-\infty\,;2\right]$, alors $3 - \left(\sqrt{2-x}\right)^2 =$ ………………

4°) Pour tout réel *x*, on a : $\sqrt{x^3} =$…………….. .

$\boxed{54}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x^2 - 9| = 2$.

$\boxed{55}$ Dire si les affirmations suivantes sont **vraies** ou **fausses.**

1°) Si $|x| \leq 1$, alors $x^2 \leq 1$.

2°) Si $|x| \leq 2$ et $|y| \leq 3$, alors $|xy| \leq 6$.

3°) Pour tout réel *x*, on a : $|x^3| = x|x|$.

$\boxed{56}$ Déterminer $\mathbb{Z} \cap [-3{,}5\,;\,4{,}7]$.

$\boxed{57}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$ et on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) a) Démontrer que, pour tout réel *x*, on a : $x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2)$.

b) Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la parabole Γ d'équation $y = x^2$.

2°) Soit $\mathcal{C}'$ la courbe d'équation $y = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

Démontrer que $\mathcal{C}'$ est l'image de $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur $\vec{j}$.

$\boxed{58}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition *D* de *f*.

2°) Résoudre l'équation $f(x) = -1$.

3°) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction *f* o *f*.

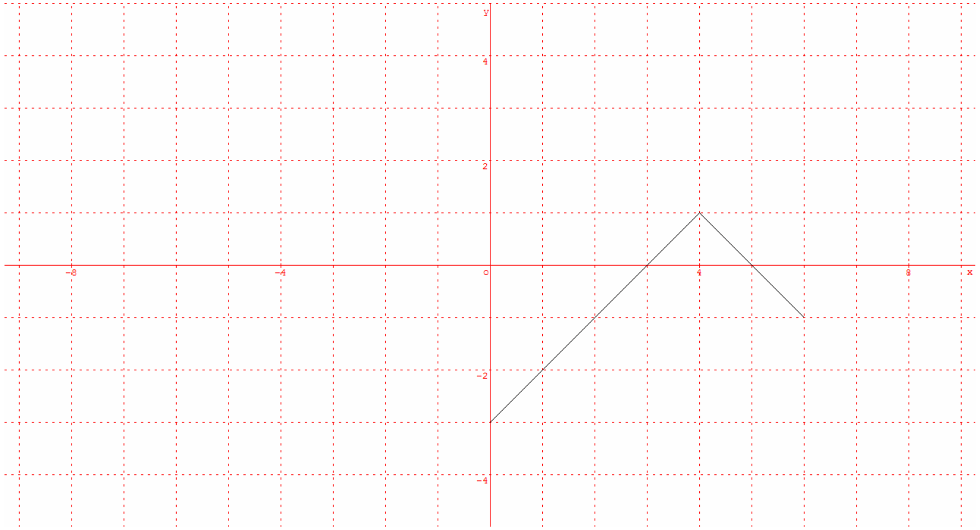
On rédigera ainsi :

$(f \circ f)(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x \in D \\ f(x) \in D \end{cases}$

si et seulement si….

4°) Déterminer l'expression de la fonction *f* o *f*.

$\boxed{59}$ On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction *f* définie sur l'intervalle $[0;6]$ dans le plan *P* muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.



1°) Tracer la représentation graphique C_1 de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = |f(x)|$ en expliquant (citer la règle du cours).

2°) On considère les fonctions f_2 et f_3 définies par $f_2 = -\frac{1}{2} f(x)$ et $f_3(x) = f(x-3) + 2$.

On note C_2 et C_3 leurs représentations graphiques respectives dans le plan *P*.
Comment peut-on obtenir C_2 et C_3 à partir de C ? Le tracé n'est pas demandé.
3°) Recopier et compléter (sans expliquer) : « Si $0 < x < 5$, alors $\ldots < f(x) < \ldots$ ».

---

60 On considère la fonction *f* définie par $f(x) = \frac{5x}{4 - x^2}$.

1°) Etudier la parité de *f*.

2°) Que peut-on dire de sa représentation graphique C dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$?

---

61 On considère les fonctions $u : x \mapsto \frac{1}{x-1}$ et $v : x \mapsto \frac{1}{x+1}$.

Déterminer la fonction $u + v$ (ensemble de définition et expression).

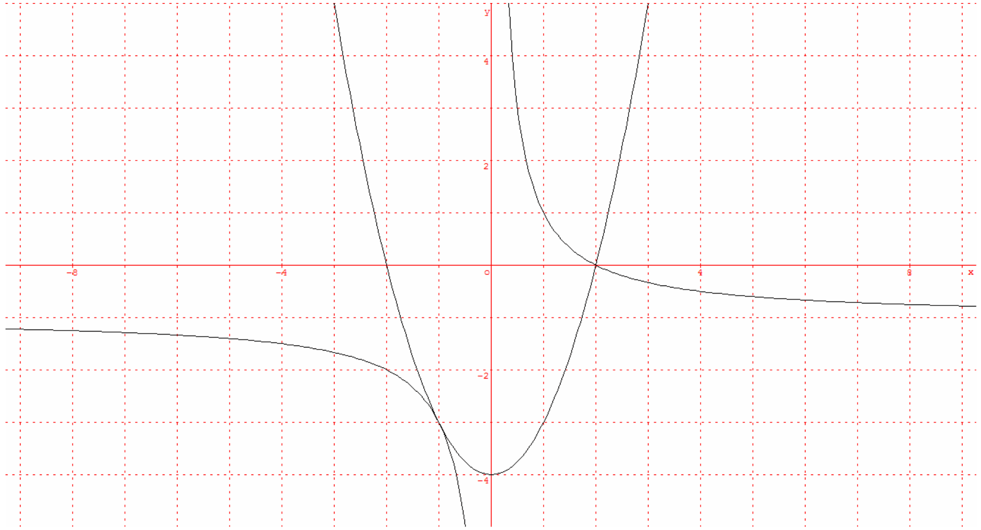
---

62 On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{4 - x}$ et $g(x) = x^2 - 1$.

Déterminer la fonction $g \circ f$ (ensemble de définition et expression).

63 On donne ci-dessous les représentations graphiques C et C ' des fonctions respectives $f : x \mapsto x^2 - 4$ et $g : x \mapsto \frac{2-x}{x}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Indiquer le nom de chacune des courbes sur le graphique ci-dessous.

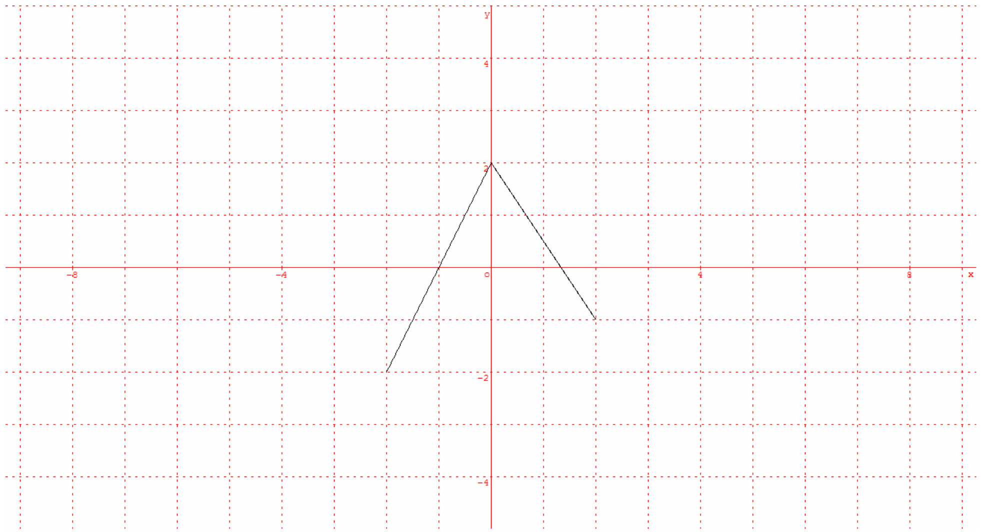


1°) Résoudre graphiquement en expliquant
l'équation $f(x) = g(x)$ (1) et l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ (2).

On notera S_1 et S_2 leurs ensembles de solutions respectifs.
2°) Résoudre l'équation (1) par le calcul.
3°) Démontrer par le calcul que *f* admet un extremum sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera.
4°) Résoudre par le calcul dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = m$ où m est un réel (discuter suivant les valeurs de *m*).

---

64 On donne ci-dessous la courbe représentative C d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2;2]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.



1°) Sur le graphique ci-dessus, tracer les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ représentatives respectivement des fonctions f_1 , f_2 et f_3 définies par $f_1(x) = f(x+2)$, $f_2 = -2f(x)$ et $f_3(x) = |f(x)|$.

2°) Soit g la fonction définie par $g(x) = [f(x)]^2$.

Exprimer g comme la composée de deux fonctions et en déduire le sens de variation de g sur chacun des intervalles $[-2;1]$ et $[-1;0]$.

---

65 On considère les fonctions *f*, *g* et *h* définies par $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$, $g(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ et $h(x) = -\dfrac{2x^2}{1+x^2}$.

On note $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ leurs représentations graphiques respectives dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Utiliser la calculatrice graphique afin d'afficher les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.
Démontrer que l'on passe de $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}_2$ par une translation dont on précisera le vecteur.
Démontrer que l'on passe de $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}_3$ par une translation dont on précisera le vecteur.

---

66 On considère les fonctions *f*, *g* et *h* définies par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $g(x) = -\dfrac{x^2}{1+x^2}$ et $h(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

On note $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ leurs représentations graphiques respectives dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Etudier, en décomposant *f*, les variations de *f* sur $\mathbb{R}$. Contrôler le résultat sur calculatrice graphique.

2°) Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la parabole Γ d'équation $y = \dfrac{1}{2}x^2$.

3°) Démontrer que l'on passe de $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}_2$ par la translation de vecteur $-\vec{j}$.

4°) Etudier la position relative , $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

67 On considère une fonction *u* définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = [1;9]$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	1	4	9
Variation de u	-3	0	1

1°) On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $\mathrm{J} = [1\ ;\ 3]$ par $f(x) = u(x^2)$.

On observera que *f* est la composée de la fonction carrée suivie de la fonction *u*.
Déterminer **en rédigeant soigneusement** le sens de variation de *f* sur l'intervalle I.
Dresser le tableau de variation de *f* sur I.

2°) On considère la fonction *g* définie sur I par $g(x) = [u(x)]^2$.

Déterminer **en rédigeant soigneusement** le sens de variation de *g* sur l'intervalle I.
Dresser le tableau de variation de *g* sur I.

68 Soit *f* une fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = [2\ ;\ 5]$.

On considère l'énoncé *P* : « Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \geq 3$ ».

1°) **Utilisation du vocabulaire**
Traduire l'énoncé *P* sous forme d'une phrase portant sur la fonction *f* en utilisant le vocabulaire approprié.

2°) **Illustration graphique**
Tracer la courbe, dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction *f* qui vérifie l'énoncé *P*.

3°) **Etude d'un exemple**
On considère la fonction *f* définie sur I par $f(x) = 5 - \dfrac{x}{3}$.

La fonction *f* vérifie-t-elle l'énoncé *P* ?

4°) **Contraposée de l'énoncé P**
Comment traduire mathématiquement sous forme d'une phrase quantifiée que la fonction *f* ne vérifie pas l'énoncé P.

69 Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I.
V ou F ?
S'il existe un réel M tel que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a : $|f(x)| \leq \mathrm{M}$, alors *f* est bornée sur I.

70 1°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = \dfrac{x^2-1}{2}$.

Tracer $\mathcal{C}$ en expliquant (unité graphique : le centimètre).

2°) Soit *a* un réel fixé. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{x^2-1}{2} = a$ (discuter suivant les valeurs de *a*).

71 On définit ci-dessous trois fonctions *f*, *g*, *h* par leurs expressions respectives.
Parmi ces trois fonctions deux sont égales. Lesquelles ?

$f(x) = 1 + \dfrac{2}{x-1}$; $g(x) = 1 - \dfrac{2}{x-1}$; $h(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

72 1°) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions rationnelles suivantes

$f : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}$; $g : \dfrac{x(x-2)}{\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}}$; $h : x \mapsto \dfrac{x^2-4}{x+2}$; $m : x \mapsto \dfrac{(x-2)^2-1}{(x+1)^2-16}$.

2°) Factoriser le dénominateur et le numérateur, puis simplifier les expressions des fonctions.

73 Pour chacune des fonctions suivantes :

1°) Donner son ensemble de définition $\mathcal{D}$.
2°) Ecrire $f(x)$ sous la forme d'un quotient simplifié.

$f : x \mapsto \dfrac{x+2}{x} - \dfrac{x}{x+2} - \dfrac{4}{x(x+2)}$; $f : x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x} + \dfrac{1}{(1+x)^2}$; $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$\boxed{74}$ **V ou F ?**

1°) On considère les fonctions $f : x \mapsto 1-|x|$ et $g : x \mapsto 1+|x|$.
La fonction *fg* est définie sur $\mathbb{R}$ par $fg(x) = 1-x^2$ pour tout réel *x*.
2°) On considère les fonctions $f : x \mapsto |1-x|$ et $g : x \mapsto |1+x|$.
La fonction *fg* est définie sur $\mathbb{R}$ par $fg(x) = |x^2-1|$ pour tout réel *x*.
3°) Si une fonction est à valeurs positives ou nulles, alors elle est minorée par 0.
4°) Pour tout réel *x* positif ou nul, $\left(\sqrt{x}\right)^3 = x\sqrt{x}$.
5°) On considère les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}+x$ et $g : x \mapsto \sqrt{x^2+1}-x$.
La fonction *fg* est constante sur $\mathbb{R}$.
6°) Avec les fonctions précédentes, pour tout réel *x*, on a : $f(x) \geq g(x)$.
7°) On considère les fonctions $f : x \mapsto x^2-1$ et $g : x \mapsto 1-x^2$.
Les courbes représentatives respectives $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' de *f* et *g* dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
8°) Avec les fonctions précédentes, pour tout réel *x*, on a : $|f(x)| = |g(x)|$.
9°) On considère les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $g : x \mapsto x^2$.
Pour tout réel *x* non nul, $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$.
10°) On considère les fonctions $f : x \mapsto x^2-4x+1$ et $g : x \mapsto |x|$.
Pour tout réel *x*, $(f \circ g)(x) = x^2 - 4|x| + 1$.
11°) Les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' d'équations respectives $y = x^3-1$ et $y = 1-x^3$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
12°) Soit *a* et *b* deux réels tels que $a < b$ et *f* une fonction définie sur l'intervalle $\text{I} = [a\,;b]$.
Si *f* est décroissante sur I, alors *f* est à valeurs dans l'intervalle $[f(b)\,;\,f(a)]$.

13°) Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout *x* dans I, on ait $f(x) \in \text{I}$.
On pose $g = f \circ f$
a) La fonction *g* est définie sur I.
b) Si *f* est décroissante sur I, alors *g* est croissante sur I.
c) On considère l'équation $f(x) = x$ (E) et l'équation $g(x) = x$ (F).
Si un réel *a* dans I est solution de l'équation (E), alors *a* est solution (F).

14°) On considère les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$ et $g : x \mapsto 4x+3$.
Pour tout réel $x \geq -1$, $(f \circ g)(x) = 2\sqrt{x+1}$.

$\boxed{75}$ **V ou F ?** Soit *a* et *b* deux réels.
1°) $(a-b)^2 = (b-a)^2$.
2°) Si $a^2+b^2 = 0$, alors $a = 0$ et $b = 0$.
3°) Si $ab = 1$, alors $a = 1$ ou $b = 1$.
4°) Si $a^2 = b^2$, alors $a = b$ ou $a = -b$.
5°) Si $ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.
6°) Si $ab > 0$, alors $a > 0$ et $b > 0$.
7°) $x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.
8°) Si $x > 1$ et $y > 1$, alors $\dfrac{x}{y} > 1$.

$\boxed{76}$ On considère les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}+x$ et $g : x \mapsto \sqrt{x^2+1}-x$.
Les courbes représentatives respectives $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' de *f* et *g* dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$
1°) La fonction *fg* est constante sur $\mathbb{R}$.
2°) Les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' sont symétriques par rapport à (O*y*).
3°) La courbe $\mathcal{C}$ est toujours au-dessus de la droite Δ d'équation $y = x$.
4°) Les fonctions *f* et *g* sont à valeurs positives ou nulles.

$\boxed{77}$ V ou F ?

On considère les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$.

1°) La courbe représentative de *f* est au-dessus de celle de *g* sur $\mathbb{R}^+$.
2°) On passe de la courbe représentative de *g* à celle de *f* par la translation de vecteur $\vec{i}$.

$\boxed{78}$ On considère la fonction *f* définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.
1°) Etudier la parité de *f*.
2°) Démontrer que *f* est à valeurs positives ou nulles sur $\mathbb{R}_+^*$
2°) On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de *f* dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
a) Démontrer que, si *a* est un réel strictement supérieur à 1, alors $\sqrt{a} < a$.
b) Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{79}$ On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
1°) Déterminer *a* et *b* sachant que $\mathcal{C}$ passe par les points $\text{A}(0\,;3)$ et $\text{B}(1\,;5)$.
2°) Démontrer que le point A est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.
3°) Conjecturer l'existence d'un maximum et d'un minimum de *f* sur $\mathbb{R}$.
Démontrer cette conjecture.

$\boxed{80}$ Soit *u* une fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
On définit la fonction *v* sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $v(x) = u\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
On suppose que *u* est croissante sur l'intervalle $[a\,;b]$ où *a* et *b* sont deux réels tels que $0 < a < b$.
Déterminer le sens de variation de *v* sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{b}\,;\dfrac{1}{a}\right]$.

81 Soit a et b deux réels.
Développer les expressions suivantes :
$\left(a\sqrt{b}\right)^2$; $\left(a+\sqrt{b}\right)^2$; $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$; $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$.

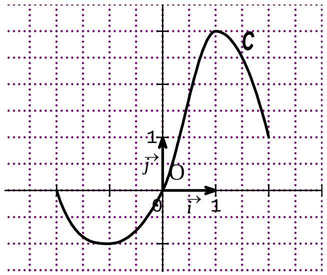
82 Soit a et b deux réels tels que $0<a<b$.
1°) Comparer $a\sqrt{b}$ et $b\sqrt{a}$ (on pourra par exemple écrire que : $\sqrt{a}=\dfrac{a}{\sqrt{a}}$).
2°) Comparer $\dfrac{a}{a+1}$ et $\dfrac{b}{b+1}$.
3°) Comparer $\dfrac{a}{b+1}$ et $\dfrac{b}{a+1}$.

83 On pose $A=\sqrt{\sqrt{x^2+1}-1}$ et $B=\sqrt{\sqrt{x^2+1}+1}$ où x est un réel quelconque.
Simplifier AB.

84 Développer $A=\left(3x+\dfrac{1}{x^2}\right)^3$.

85 On donne ci-contre la représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=[-2\,;2]$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$.

Citer les extremums globaux de f sur I.



86 Soit ABCD un carré de côté a $\left(a\in\mathbb{R}_+^*\right)$. On note O le centre du carré et $\mathcal{C}$ le cercle de centre C passant par O.
Le cercle $\mathcal{C}$ coupe les côtés [BC] et [CD] respectivement en I et J.
Calculer la longueur IJ.

87 On considère les fonctions $f : x\mapsto\sqrt{x}$ et $g : x\mapsto\sqrt{2x}$.
On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' les courbes représentatives respectives de f et g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$.
Compléter la phrase suivante.

On passe de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}$ ' en ……………………………………………………………………………………..…

……

88 On considère les fonctions $f : x\mapsto x\sqrt{2}$.
On pose $g(x)=(f\circ f)(x)$ et $h(x)=\left[f(x)\right]^2$.
Exprimer $g(x)$ et $h(x)$ en fonction de x.

89 1°) Soit f une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. Quel est le sens de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(2x-1)$?
2°) Soit f une fonction croissante sur l'intervalle $[0\,;9]$.
Quel est le sens de variation de la fonction g définie sur $[-3\,;0]$ par $g(x)=f\left(x^2\right)$?

90 Soit ABCD un carré de côté 1. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre B et de rayon 1.
Soit M un point quelconque du segment [CD]. On pose $\mathrm{CM}=x$. La demi-droite [BM) coupe $\mathcal{C}$ en un point M'.
1°) A quel intervalle appartient x ?
2°) Exprimer MM' en fonction de x.

91 On considère les fonction $f : x\mapsto\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $g : x\mapsto 1-x^2$
On pose $h(x)=(g\circ f)(x)$.

1°) Exprimer $h(x)$ en fonction de x.

2°) Démontrer que pour tout réel x, on a : $\left|f(x)\right|<1$.

92 On considère les fonction $f : x\mapsto\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{1-x}$ et $g : x\mapsto\dfrac{x}{x^2-1}$.
Démontrer qu'il existe un réel k que l'on déterminera tel que pour tout réel x distinct de 1 et de -1 on ait : $f(x)=kg(x)$.

93 Calculer pour tout réel x : $\left(\sqrt{x^2+16}-2x\right)\left(\sqrt{x^2+16}+2x\right)$.

94 1°) Démontrer que pour tout réel x on a : $-1\leq\dfrac{2x}{1+x^2}\leq 1$.

2°) Démontrer que pour tout réel x on a : $-1<\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\leq 1$.

95 On considère la fonction $f : x\mapsto\sqrt{4-x}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$.
1°) L'ensemble de définition de f est

$]-\infty\,;4[$	$]4\,;+\infty[$	$[4\,;+\infty[$	$]-\infty\,;4]$

2°) On note Γ la courbe d'équation $y=\sqrt{-x}$.
On passe de Γ à $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur :

$4\vec{i}$	$-4\vec{i}$	$4\vec{j}$	$-4\vec{i}$

3°) La courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point A d'ordonnée :

2	16	-2	4

$\boxed{92}$ On considère les fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+1}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$.

V ou F ?

1°) Pour tout réel x, on a : $(f \circ g)(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

2°) Pour tout réel x positif ou nul, on a : $(g \circ f)(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

$\boxed{93}$ On considère les fonctions $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto x-1$.

Donner l'expression de la fonction $u \circ v \circ u$.

$\boxed{94}$ 1°) Développer l'expression $\mathrm{A}(x) = \left(2x - \sqrt{x^2+16}\right)\left(2x + \sqrt{x^2+16}\right)$.

2°) Donner une factorisation de l'expression $\mathrm{B}(x) = 3x^2 - 16$ sous forme d'un produit de deux facteurs du premier degré.

$\boxed{95}$ On considère la fonction $f :\ x \mapsto x\sqrt{36-x^2}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition ***D*** de f.

2°) Calculer $f\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)$.

$\boxed{96}$ 1°) Calculer $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ (résultat sans radical au dénominateur).

2°) Calculer $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{5\pi}{6}$.

1°) $\sqrt{2}+1$ 2°) $-\dfrac{\pi}{3}$

$\boxed{97}$ On considère la fonction $f :\ x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$.

1°) Donner l'ensemble de définition ***D*** de f.

2°) Soit g et h les fonctions définies par $g(x) = \left[f(x)\right]^2$ et $h(x) = -f(x)$.

Vrai ou faux ?

a) L'ensemble de définition de g et h est égal à ***D***.

b) Pour tout élément x de l'ensemble de définition de g, on a : $g(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

c) Pour tout élément x de l'ensemble de définition de h, on a : $h(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

$\boxed{98}$ On considère la fonction $f :\ x \mapsto \dfrac{x+1}{x+2}$.

1°) Donner l'ensemble de définition ***D*** de f.

2°) Soit g la fonction définie par $g(x) = f(-x)$.

Choisir la ou les bonnes réponses.

Pour tout élément x de l'ensemble de définition de g, on a : $g(x) =$.

$\dfrac{1-x}{2-x}$	$-\dfrac{x+1}{x+2}$	$\dfrac{x-1}{x-2}$	

$\boxed{99}$ On considère les fonctions $f :\ x \mapsto x^2$ et $g :\ x \mapsto (x-2)^2$.

1°) Parmi les propositions suivantes entourer celle(s) qui sont juste(s) :

$g(x) = f(x) - 2$	$g(x) = f(2-x)$	$g(x) = f(x+2)$	$g(x) = f(x-2)$

2°) Recopier et compléter la phrase :

Dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on passe de la courbe ***C*** représentative de f à la courbe Γ représentative de g par ……………………………………………… .

$\boxed{100}$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

On pose $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition ***D*** de g.

2°) Vrai ou faux ?

Pour tout $x \in$ ***D***, on a : $g(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2}$.

$\boxed{101}$ Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

On pose $h = f \circ g$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition ***D*** de h.

2°) Parmi les expressions suivantes, donner celle de h. Justifier.

$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $\sqrt{x^2+1}$; $\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$; $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$.

$\boxed{102}$ **QCM avant les fonctions associées**

La plan est muni d'un repère orthonormé.

1°) Soit D et D' les droites d'équations respectives $y = 2$ et $y = -2$.

On passe de D à D' par :

La symétrie de centre O	La symétrie d'axe Ox
La symétrie d'axe (Oy)	La translation de vecteur $-4\vec{j}$

2°) Soit D et D' les droites d'équations respectives $x = -3$ et $x = 3$.

On passe de D à D' par :

La symétrie de centre O	La symétrie d'axe Ox
La symétrie d'axe (Oy)	La translation de vecteur $3\vec{j}$

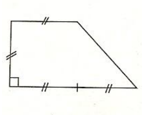
3°) Soit D et D' les droites d'équations respectives $y=\frac{1}{2}x$ et $y=-\frac{1}{2}x$.
On passe de D à D' par :

La symétrie de centre O	La symétrie d'axe (Ox)
La symétrie d'axe (Oy)	La translation de vecteur $\vec{j}$

4°) Soit D et D' les droites d'équations respectives $y=2x$ et $y=2x+4$.
On passe de D à D' par :

La symétrie de centre A(0 ; 2)	La symétrie d'axe (Ox)
La symétrie d'axe (Oy)	La translation de vecteur $4\vec{j}$

$\boxed{103}$ On considère un trapèze représenté ci-dessous. On note a la hauteur.
Exprimer l'aire de ce trapèze en fonction de a.



Réponses

$\boxed{1}$ $\boxed{1}$ F $\boxed{2}$ V $\boxed{3}$ V $\boxed{4}$ F $\boxed{5}$ V $\boxed{6}$ V $\boxed{7}$ V $\boxed{8}$ V $\boxed{9}$ V $\boxed{10}$ V
$\boxed{11}$ F $\boxed{12}$ V $\boxed{13}$ V $\boxed{14}$ F $\boxed{15}$ V $\boxed{16}$ V $\boxed{17}$ V $\boxed{18}$ F $\boxed{19}$ V $\boxed{20}$ V.

$\boxed{2}$ 1°) f est impaire 2°) V; V; F $\boxed{15}$ 2°) $x=1$ $\boxed{17}$ 2°) $S=\{0\,;1\,;\,-1\}$

$\boxed{39}$ $D_{f+g}=\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$; $(f+g)(x)=\frac{x^2+2x-1}{x^2-1}$.

$D_{fg}=\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$; $(fg)(x)=\frac{x+2}{x^2-1}$.

$D_{-3f}=\mathbb{R}\setminus\{\,1\,\}$; $(-3f)(x)=-\frac{3}{x-1}$.

$D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1;\,-2\}$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x+1}{x^2+x-2}$.

$\boxed{42}$ 1°) V 2°) V 3°) F 4°) V

$\boxed{46}$ Dans chaque cas, on note D l'ensemble de définition de f et D' celui de g.

1°) $D=\mathbb{R}$; $D'=\mathbb{R}$.
2°) $D=[-1\,;+\infty[$; $D'=\mathbb{R}$.
3°) $D=D'=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$\boxed{72}$ 1°) $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$; $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ 2°) $D=\mathbb{R}\setminus\{2\,;3\}$; $f(x)=\frac{x}{x-3}$ 3°) $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$; $f(x)=x-2$;
4°) $D=\mathbb{R}\setminus\{-5\,;3\}$; $f(x)=\frac{x-1}{x+5}$

$\boxed{73}$ 1°) $D=\mathbb{R}\setminus\{0\,;-2\}$; $f(x)=\frac{4}{x+2}$ 2°) $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; $f(x)=\frac{2-x^2}{(1+x)^2}$

3°) $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; $f(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$

$\boxed{75}$ 1°) V 2°) V 3°) F 4°) V 5°) V 6°) F $\boxed{79}$ $a=4$; $b=3$

$\boxed{84}$ $A=27x^3+27+\frac{9}{x^3}+\frac{1}{x^6}$.

$\boxed{90}$ Exercice sur le calcul littéral en 1ère S.

$\boxed{96}$ 1°) $\sqrt{2}+1$ 2°) $-\frac{\pi}{3}$

2e série

Chapitres abordés : équations et inéquations du second degré,
fonctions polynômes du second degré

$\boxed{1}$ **V ou F ?**

1°) On considère l'équation $x^2-mx+1=0$ (E) d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.
Le discriminant de (E) est égal à m^2-4.
2°) L'inéquation $\frac{1}{x^2+1}\leq 2$ a pour ensemble de solutions $\mathbb{R}$.
3°) Pour tout réel x, on a : $-x^2+3x-5<0$.

4°) L'équation $x^4+x^2+1=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

5°) Une fonction polynôme du second degré admet un extremum sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ Résoudre dans les équations
1°) $x^2=\frac{1}{x}$; 2°) $\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=1$ 3°) $x^2-\sqrt{13}x+1=0$.

$\boxed{3}$ On considère l'équation d'inconnue $x\in\mathbb{R}$: $(m-3)x^2+(2m-1)x+m+2=0$ (E) où m est un réel.

Répondre par **vrai** ou **faux**.

1°) L'équation (E) est toujours du second degré.
2°) -1 est toujours solution de (E).
3°) Il existe une valeur de m telle que 1 soit solution de (E).

4°) L'équation (E) admet toujours deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{4}$ **Rappel**

Soit P et Q deux phrases mathématiques.
On dit que les phrases P et Q sont **équivalentes** pour exprimer que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- Si P est vraie, alors Q est vraie.
- Si Q est vraie, alors P est vraie.

Soit A et B deux nombres réels.

On se propose de démontrer que $\left(\mathrm{A}=\sqrt{\mathrm{B}}\right)$ équivaut à $\begin{cases}\mathrm{A}^2=\mathrm{B}\\ \mathrm{A}\geq 0\end{cases}$.

On définit les phrases mathématiques
P : « $\mathrm{A}=\sqrt{\mathrm{B}}$ » et Q : « $\mathrm{A}^2=\mathrm{B}$ et $\mathrm{A}\geq 0$ ».

Démontrer que si P est vraie, alors Q est vraie.
Démontrer que si Q est vraie, alors P est vraie.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, en utilisant le résultat précédent, l'équation $\sqrt{x+3}=1-x$ (E).
Résoudre dans $\mathbb{R}$, en utilisant le résultat précédent, l'équation $\sqrt{x(x+3)}=3-x$ (E').

$\boxed{5}$ 1°) On considère le polynôme $P(x)=-2x^2+7x-6$.

Déterminer une factorisation de $P(x)$ en facteurs du premier degré.

On utilisera le polynôme $P(x)$ dans le 2°).

2°) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{1}{-2x^2+7x-6}-\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{3}{3-2x}$ (1).

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-2x^4+7x^2-6\geq 0$ (2).
On notera S_1 et S_2 leurs ensembles de solutions respectifs.

$\boxed{6}$ **Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.**

On considère $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' les paraboles d'équations respectives $y=(x-3)^2$ et $y=-x^2-3$ dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.

1°) Le sommet de $\mathcal{C}$ est situé sur l'axe des abscisses.
2°) La parabole $\mathcal{C}$ ' coupe l'axe des abscisses en deux points distincts.
3°) Il y a un seul point de $\mathcal{C}$ qui a pour ordonnée 4.
4°) La parabole $\mathcal{C}$ 'est toujours située au-dessous de $\mathcal{C}$.

$\boxed{7}$ On considère le polynôme $P(x)=2x^3-x^2-22x-24$.

1°) Déterminer trois réels *a*, *b*, *c* tels que, pour tout réel *x*, on ait $P(x)=(x+2)\left(ax^2+bx+c\right)$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$.

3°) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations $Q(x)=12$ et $R(x)=0$ avec
$Q(x)=2x^6-x^4-22x^2-12$ et $R(x)=2x\sqrt{x}-x-22\sqrt{x}-24$.

$\boxed{8}$ On considère l'inéquation $\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+4x-5}<2$.

Déterminer le domaine de résolution puis résoudre cette inéquation.

$\boxed{9}$ On considère l'équation $(m-3)x^2+(2m-1)x+m+2=0$ où m désigne un réel quelconque d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.

On note (E) cette équation.
1°) Résoudre (E) lorsque *m* prend la valeur 4 puis lorsque *m* prend la valeur 3
2°) a) Peut-on trouver *m* tel que 1 soit solution de (E) ?
b) Peut-on trouver *m* tel que -1 soit solution de (E) ?
3°) On suppose que $m\neq 3$.
Démontrer que l'équation (E) admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$ et écrire ces racines.

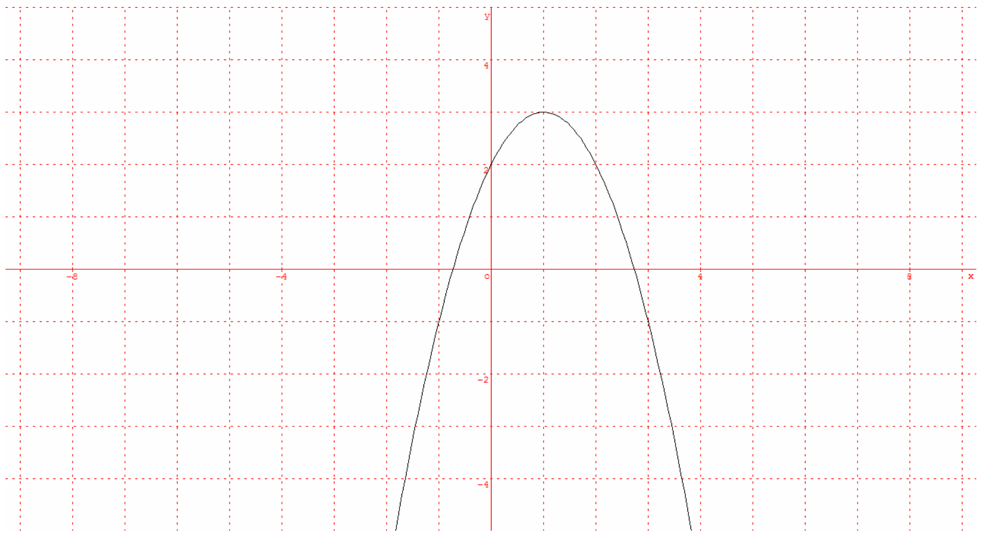
$\boxed{10}$ On considère l'inéquation $\dfrac{4}{x+1}\geq x+1$.

Déterminer le domaine de résolution puis résoudre cette inéquation

$\boxed{11}$ 1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x-1}{2}>\dfrac{1}{x}$.

2°) Retrouver le résultat graphiquement.

$\boxed{12}$ On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction $f: x\mapsto ax^2+bx+c$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.



1°) Sans calcul, donner le signe de *a*, le signe de *c*, le signe de $\Delta=b^2-4ac$.

2°) Sachant que $\mathcal{C}$ passe par les points $A(1\ ;\ 3)$, $B(-1\ ;\ -1)$ et $C(2\ ;\ 2)$, déterminer a, b, c. Vérifier que les résultats sont cohérents avec ceux du 1°).

3°) Sur le même graphique, tracer la parabole $\mathcal{C}$ ' d'équation $y = x^2 - 2x$.

4°) **Vrai ou faux**

- $\mathcal{C}$ ' est l'image de la parabole Γ d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur $\vec{i} - \vec{j}$
- $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' ont deux points d'intersection.

$\boxed{13}$ **QCM**

On considère le polynôme $f(x) = ax^{2007} + bx^3 + cx - 5$ où a, b, c sont des constantes.

On sait que $f(-2007) = 2007$.

Que vaut $f(2007)$?

A : -2007 B : -2012 C : -2017 D : autre réponse

$\boxed{14}$ Soit A et B deux nombres réels.

Démontrer que $\left(\sqrt{A} \leq B\right)$ équivaut à $\begin{cases} A \leq B^2 \\ A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases}$.

Résoudre en appliquant ce résultat l'inéquation $\sqrt{2x+1} \leq x - 1$

$\boxed{15}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left(2x^2 - 1\right)(x-1) = 1$.

$\boxed{16}$ 1°) On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 2x + 1$.

a) Déterminer une racine évidente de $P(x)$.

b) Déterminer trois réels a, b, c tels que, pour tout réel x, on ait : $P(x) = (x-1)\left(ax^2 + bx + c\right)$.

c) Déterminer les racines de $P(x)$.

2°) **Question difficile (question de recherche)**

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} a = 1 - \sqrt{b} \\ b = 1 - \sqrt{a} \end{cases}$.

$\boxed{17}$ On considère les polynômes $P(x) = \left(x^2 - 3\right)^2 - 1$, $Q(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x$ et $R(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Déterminer une factorisation de chacun de ces polynômes en quatre facteurs du premier degré.

$\boxed{18}$ Déterminer la (ou les) fonction (s) polynôme (s) du second degré admettant -1 et -2 pour racines et un maximum égal à 2.

$\boxed{19}$ On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ **où a est un réel non nul**.

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

Compléter les tableaux :

Signe de a	Déduction graphique pour $\mathcal{C}$
$a > 0$	
$a < 0$	

Signe de Δ	Déduction graphique pour $\mathcal{C}$
$\Delta > 0$	
$\Delta = 0$	
$\Delta < 0$	

$\boxed{20}$ 1°) Sur l'écran d'une calculatrice graphique, représenter la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \sqrt{5x+6}$ ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 2$ en prenant la fenêtre graphique précisée ci-dessous.

$X_{min} = -2$

$X_{max} = 4$

$X_{scl} = 1$

$Y_{min} = -1$

$Y_{max} = 5$

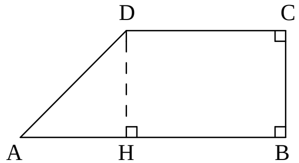
$X_{scl} = 1$

Conjecturer alors les solutions de l'équation $\sqrt{5x+6} = x + 2$ (1) et de l'inéquation $\sqrt{5x+6} \geq x + 2$ (2).

2°) Résoudre (1) et (2) algébriquement et vérifier que les résultats obtenus sont conformes à ceux trouvés sur la calculatrice.

$\boxed{21}$ On considère la figure ci-dessous sur laquelle ABCD est un trapèze rectangle en B et C.

On donne $AB = 6$ et $AH = DH = BC = x$ $\left(0 \leq x \leq 6\right)$.



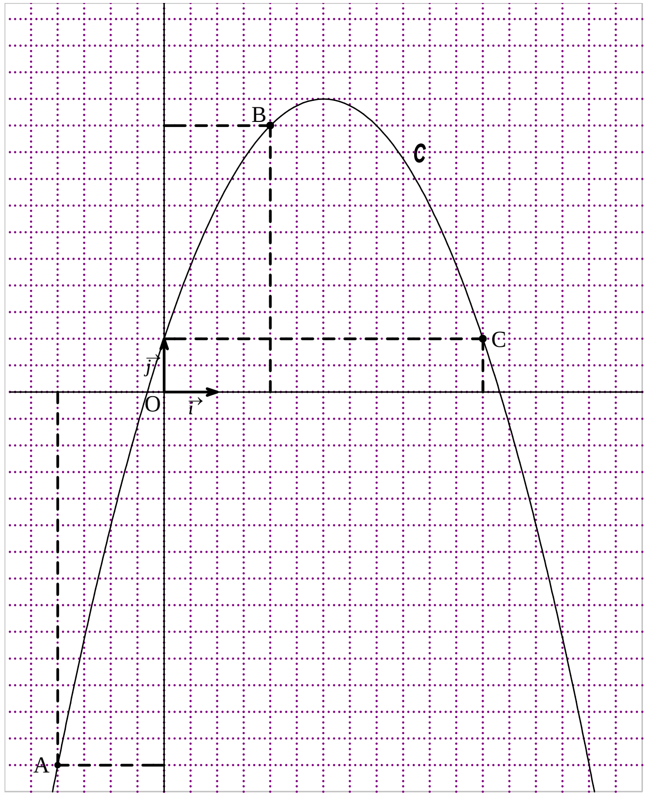
1°) Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ du trapèze ABCD en fonction de x.

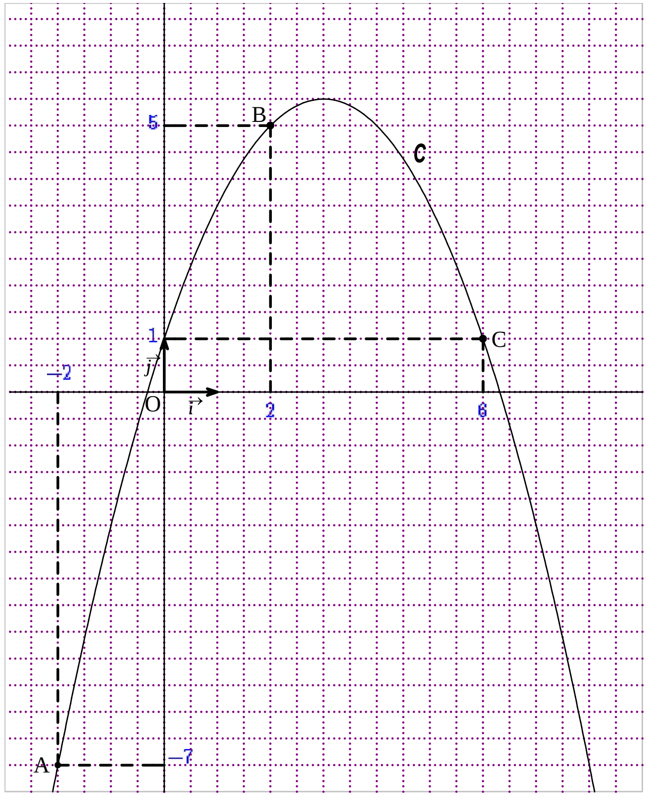
2°) Déterminer x pour que l'aire de ABCD soit égale à

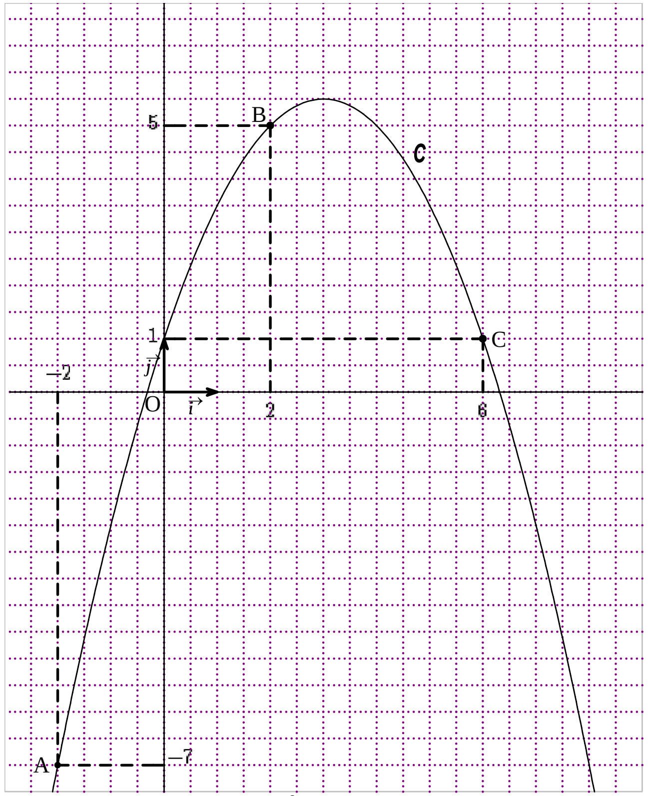
a) 8 b) 12 c) 18

$\boxed{22}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{-x^2 + 3x + 4} \geq \dfrac{1}{2}x + 2$ (1).

$\boxed{23}$ La courbe $\mathcal{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.


B
C
C
O
A
$\vec{j}$
$\vec{i}$


5
B
C
1
C
-2
O
2
6
A
-7
$\vec{j}$
$\vec{i}$



Déterminer *a*, *b*, *c* sachant que **C** passe par les points A, B, C à coordonnées entières marqués sur le graphique.

2°) Sur le graphique ci-dessus, tracer la parabole **C '** d'équation $y = x^2 + 1$.
3°) Compléter sans justifier le tableau ci-dessous.

C ' est l'image de la parabole d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur	
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ est égal à :	
C et **C '** se coupent aux points	D(…. ; ….) et E(…. ; ….)

$\boxed{\textbf{24}}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$
1°) l'équation $-x^2 + x + 2 = 0$ (1)
2°) l'équation $-x^4 + x^2 + 2 = 0$ (2)
3°) l'inéquation $\dfrac{1}{-x^2 + x + 2} > \dfrac{2}{x+1}$ (3)

$\boxed{\textbf{25}}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x+3} \leq 2$ (E).

Je n'arrive pas à résoudre l'inéquation suivante :
sqrt(1-x^2) > 2x+1
Df = [-1;1]
Graphiquement la solution semble être [-1;0[
sqrt(1-x^2) > 2x+1
1-x^2 > (2x+1)^2
1-x^2 > 4x^2+4x+1
0>5x^2+4x
0>x(5x+4)
x1= -4/5
x2=0
S=[-4/5; 0[= [-0,8; 0[
or x=-0,9 est également solution de l'équation
Pouvez-vous m'aider ?
Christian

Réponses

$\boxed{\textbf{1}}$ 1°) V 2°) F 3°) V 4°) V 5°) V

$\boxed{\textbf{3}}$ 1°) F 2°) V 3°) F 4°)

$\boxed{\textbf{4}}$ $S = \left\{ \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2} \right\}$ **;** $S' = \{1\}$

$\boxed{\textbf{5}}$ 1°) $P(x) = -2(x-2)\left(x - \dfrac{3}{2}\right) = (x-2)(3-2x)$

2°) a) $S_1 = \{-1\}$; $S_2 = \left[-\sqrt{2} \, ; -\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\dfrac{3}{2}} \, ; \sqrt{2}\right]$

$\boxed{\textbf{6}}$ 1°) V 2°) F 3°) F 4°) V

$\boxed{\textbf{7}}$ 2°) Les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont -2 ; $-\dfrac{3}{2}$; 4.

3°) Les solutions de l'équation $Q(x) = 12$ sont 2 et -2 ; la solution de l'équation $R(x) = 0$ est 16.

$\boxed{\textbf{8}}$ $S = \left]-\infty \, ; -3-\sqrt{22}\right[\cup \left]-5 \, ; 1\right[\cup \left]-3+\sqrt{22} \, ; +\infty\right[$

$\boxed{14}$ $S=[4\,;+\infty[$

$\boxed{16}$ 1°) $P(x)=(x-1)(x^2-x+1)$

2°) $\sqrt{b}=1-a$ **;** $b=a^2+1-2a$ **;** $1-\sqrt{a}=a^2-2a+\sqrt{a}$ **;** $a^2-2a+\sqrt{a}=0$ **;** $\sqrt{a}\left(a\sqrt{a}-2\sqrt{a}+1\right)=0$

Deux couples solutions évidents : $(1\,;0)$ et $(0\,;1)$

$\boxed{20}$ **2°) Equation (1)**

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x+2\geq 0\\5x+6\geq 0\\5x+6=(x+2)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -2\\x\geq -\dfrac{6}{5}\\5x+6=x^2+4x+4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -\dfrac{6}{5}\\x^2-x-2=0\end{cases}$$

Considérons le polynôme x^2-x-2.
On pose $a=1$, $b=-1$, $c=-2$.

-1 est une racine évidente car $(-1)^2-(-1)-2=1+1-2=0$.

L'autre racine α vérifie l'égalité : $(-1)\alpha=\dfrac{c}{a}=-2$ d'où $\alpha=2$.

Or $-1\geq-\dfrac{6}{5}$ et $2\geq-\dfrac{6}{5}$.

Les deux solutions conviennent.

$S_1=\{-1\,;2\}$

Inéquation (2)

$\sqrt{5x+6}$ existe pour tout $x\in\left[-\dfrac{6}{5}\,;+\infty\right[$.

<u>1^er^ cas</u> : si $x+2\leq 0$ c'est-à-dire $x\leq -2$.
On a forcément $\sqrt{5x+6}\geq 0$ et $x+2\leq 0$.
Donc $x+2\leq\sqrt{5x+6}$
Or $x\in\left[-\dfrac{6}{5}\,;+\infty\right[$ d'où $S_1=\varnothing$.
<u>2^e^ cas</u> : si $x+2\geq 0$ c'est-à-dire $x\geq -2$.

Alors on a : $0\leq x+2\leq\sqrt{5x+6}$.

Deux nombres positifs ou nuls et leurs carrés sont rangés dans le même ordre.
D'où : $0\leq(x+2)^2\leq 5x+6$

$\Leftrightarrow x^2-x-2\leq 0$
D'après l'étude faite pour l'équation (1), le polynôme x^2-x-2 admet -1 et 2 pour racines.
On sait donc que le discriminant Δ de ce polynôme est tel que $\Delta>0$.
D'après la règle du signe d'un polynôme du second degré, ce polynôme est du signe négatif à l'inétrieur des racines.

$x^2-x-2\leq 0\Leftrightarrow x\in[-1\,;2]$

Or $x\geq-\dfrac{6}{5}$ d'où $S_2=[-1\,;2]$.

Or $S=S_1\cup S_2=[-1\,;2]$

On retrouve sur la calculatrice que $\sqrt{5x+6}\geq x+2$ si et seulement si $x\in[-1\,;2]$.
On cherche les abscisses des points de $\mathcal{C}$ situés au-dessus ou sur $\mathcal{D}$.

$\boxed{21}$ 1°) $\mathcal{A}=-\dfrac{1}{2}x^2+6x$

2°) a) $x=-6+2\sqrt{13}$ ou $x=-6-2\sqrt{13}$ b) $x=-6+2\sqrt{3}$ ou $x=-6-2\sqrt{3}$
c) $x=0$ ou $x=-12$

$\boxed{22}$ $$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+3x+4\geq 0\\\dfrac{1}{2}x+2\geq 0\\-x^2+3x+\cancel{4}\leq\left(\dfrac{1}{2}x+2\right)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+3x+4\geq 0\\x\geq -4\\-x^2+3x+\cancel{4}=\dfrac{1}{4}x^2+2x+\cancel{4}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+3x+4\geq 0\\x\geq -4\\\dfrac{5}{4}x^2-x\leq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in[-1\,;4]\\x\geq -4\\x\in\,]-\infty\,;0]\cup\left[\dfrac{4}{5}\,;+\infty\right[\end{cases}$$

$S_1 = [-1\,;4]$; $S_2 = [-4\,;+\infty[$; $S_3 =]-\infty\,;0] \cup \left[\frac{4}{5}\,;+\infty\right[$

x solution de (1) $\Leftrightarrow x \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$

x solution de (1) $\Leftrightarrow x \in [-1\,;0] \cup \left[\frac{4}{5}\,;4\right]$

$\boxed{23}$ 1°) $A(-2\,;-7)$, $B(2\,;5)$, $C(6\,;1)$.

$a = -\frac{1}{2}$, $b = 3$, $c = 1$.

3^e série

Chapitres abordés : révisions sur les vecteurs du plan
barycentres

$\boxed{1}$ Soit ABCD un carré de centre O dans le plan *P*.

1°) a) Exprimer B comme barycentre des points pondérés A, C, D affectés de coefficients que l'on déterminera.

b) Déterminer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que l'on ait $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right\|$.

2°) On note G le barycentre des points pondérés (A ; 1), (B ; -6), (C ; 1) et (D ; 1).

a) Construire G.

b) Déterminer l'ensemble *E'* des points M du plan *P* tels que l'on ait

$\left\|\overrightarrow{MA}-6\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|$.

c) Démontrer que le point B appartient à *E'* ainsi que le point D', symétrique du point D par rapport à C.

$\boxed{2}$ On considère dans le plan *P* un triangle ABC rectangle isocèle en A tel que $AB = AC = a$ où a est un réel strictement positif.

1°)a) Déterminer et tracer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = a\sqrt{2}$.

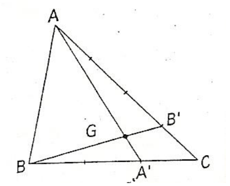
b) Démontrer que B et C appartiennent à *E*.

2°) Déterminer et tracer l'ensemble *E'* des points M du plan *P* tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}\right\|$.

Démontrer que C appartient à *E'*.

3°) Déterminer et tracer l'ensemble *E''* des points M du plan *P* tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}\right\|$.

$\boxed{3}$ On considère la figure ci-dessous sur laquelle les droites
(AA') et (BB') se coupent en G.



1°) Déterminer deux systèmes de points pondérés dont les points A' et B' sont les barycentres.

2°) Démontrer que G est le barycentre des points pondérés (A ; 2), (B ; 3), (C ; 6)

3°) En déduire la position du point d'intersection C' des droites (CG) et (AB).

$\boxed{4}$ **V ou F ? Justifier**

Soit A et B deux points quelconques distincts.

1°) Si G est e barycentre des point pondérés $(A\,;\sqrt{2}-1)$ et $(B\,;1)$, alors G est le barycentre des points $(A\,;1)$ et $(B\,;\sqrt{2}+1)$.

2°) Si G est le barycentre des points pondérés $(A\,;5)$ et $(B\,;-3)$, alors $G \notin [AB]$

$\boxed{5}$ Soit ABCD un carré de côté a dans le plan $P\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$.

Pour la figure, prendre (AB) « horizontale », A « à gauche » de B, C et D « au-dessus » de (AB).

On note O son centre et G le barycentre des points pondérés (A ; 1), (B ; 2), (C ; 1) et $(D,-2)$.

On positionnera G après avoir répondu à la première question.

1°) On se propose de démontrer que G est le symétrique de O par rapport à B.

1ère méthode : par un calcul vectoriel

Partir de la relation fondamentale pour un point M du plan *P* puis prendre $M = O$.

2e méthode : on munit le plan du repère $\boldsymbol{R} = \left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

Donner les coordonnées des points A, B, C, D, O dans $\boldsymbol{R}$ et calculer les coordonnées de G ; conclure.

Placer G sur la figure.

2°) Pour tout point M du plan *P*, on pose $\vec{V} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.
a) Démontrer que pour tout point M du plan *P*, on a : $\vec{V} = -2\overrightarrow{AC}$.
b) Déterminer et tracer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que les vecteurs $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ et $\vec{V}$ soient colinéaires.
c) Déterminer et tracer l'ensemble *F* des points M du plan *P* tels que les vecteurs $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ et $\vec{V}$ aient la même norme.
<u>On rédigera très soigneusement</u>.

6 Soit ABC un triangle quelconque.
Pour la figure, prendre (AB) « horizontale », A « à gauche » de B et C « au-dessus » de (AB).
Construire les points I, J, K définis par :
I est le barycentre des points pondérés $(A,2)$ et $(C,1)$, J est le barycentre des points pondérés $(A,1)$ et $(B,2)$ et K est le barycentre des points pondérés $(C,1)$ et $(B,-4)$.
Ecrire les hypothèses au début de l'exercice.

1°) Démontrer que B est le barycentre des points pondérés $(K,3)$ et $(C,1)$.
2°) Démontrer que le barycentre des points pondérés (A, 2), (K, 3) et (C, 1) est un des points déjà construit.
3°) Démontrer que les points I, J, K sont alignés et que J est le milieu de $[IK]$.
4°) Soit L le milieu de $[CI]$ et M celui de $[KC]$.
a) Démontrer que le quadrilatère IJML est un parallélogramme dont le centre est le centre de gravité du triangle ABC.
Indication :
Noter G' le centre de gravité de ABC et exprimer $\overrightarrow{CG'}$ en fonction $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$.
b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur ABC pour que IJML soit un rectangle.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur ABC pour que IJML soit un losange.

5°) Retrouver le résultat du 3°) en utilisant un repère.

---

7 Soit ABC un triangle quelconque.
Pour tout réel $m \neq -\frac{1}{2}$, on note G le barycentre des points pondérés (A, 1), (B,m) et (C,m).
1°) Démontrer que G appartient à une droite remarquable du triangle ABC.
2°) a) Faire le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto \frac{2x}{2x+1}$ avec les limites.
b) A quel intervalle appartient $f(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+$?
c) En déduire où se situe le point G lorsque $m \in \mathbb{R}_+$?

---

8 Soit ABCD un parallélogramme dans le plan *P*.
Pour la figure, prendre (AB) « horizontale », A « à gauche » de B, C et D« au-dessus » de (AB).

Le but de l'exercice est d'étudier plusieurs méthodes pour construire le point G, barycentre des points pondérés (A ; 2), (B ; 1), $(C\,;-3)$ et $(D\,;1)$.
Faire une figure pour chaque méthode.

1ère méthode :

1°) Recopier la phrase et compléter l'égalité :
« Pour tout point M du plan *P*, on a : $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \ldots$ ».
2°) En prenant $M = A$ dans la relation précédente, exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.
Construire le point G.

2e méthode :

On note I le barycentre des points pondérés $(A\,;2)$ et $(B\,;1)$ et J est le barycentre des points pondérés $(C\,;-3)$ et $(D\,;1)$.
1°) Construire les points I et J en précisant les égalités vectorielles qui permettent d'effectuer ces constructions.
2°) Recopier et compléter la phrase :
« G est le barycentre des points pondérés $(I\,;\ldots)$ et $(J\,;\ldots)$ ».
Construire G ; on précisera l'égalité vectorielle qui permet d'effectuer cette construction.

3e méthode :

On note K le barycentre des points pondérés (A ; 2), (B ; 1), (D ; 1) et L le milieu du segment $[BD]$.
1°) Démontrer que K est le milieu de $[AL]$.
2°) Recopier et compléter la phrase :
« G est le barycentre des points pondérés $(C\,;\ldots)$ et $(K\,;\ldots)$ ».
Construire G ; on précisera l'égalité vectorielle qui permet d'effectuer cette construction.

9 Soit ABC un triangle quelconque. On note O le milieu de $[BC]$.
Pour tout réel *m*, on note G le barycentre des points pondérés (A, 2), (B,m) et $(C,-m)$.
1°) Démontrer que G appartient à la droite Δ passant par A et parallèle à (BC).
2°) On se place dans le cas où $m \neq 2$ et $m \neq -2$.
a) Démontrer que, dans ce cas, la droite (CG) coupe la droite (AB) en un point I et la droite (BG) coupe la droite (AC) en un point J.
Définir I comme barycentre de A et B puis J comme barycentre des points A et C.
b) On munit le plan du repère $\boldsymbol{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
Donner les coordonnées des points A, B, C, O, I et J dans $\boldsymbol{R}$.
Démontrer alors que les points O, I et J sont alignés.

10 Soit ABC un triangle quelconque.
On note I le milieu de [BC] et *k* un réel différent de 1 et de -1.
Soit J le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, *k*) et K le barycentre des points pondérés (A,1), (C,-*k*).
1°) Démontrer que les points I, J, K sont alignés.
2°) Le point I peut-il être le milieu de [JK] ?
3°) Déterminer *k* pour que $\overrightarrow{JK} = 3\overrightarrow{JI}$.

11 **QCM**
Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Laquelle ? On ne demande pas de justifier.

Soit ABC un triangle.

1°) Reconnaître un barycentre

Soit G le point défini par $\overrightarrow{AG} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{3}\overrightarrow{AC}$.

De quels points pondérés G est le barycentre ?

a. (A ; 1), (B ; $-\frac{4}{3}$), (C ; $\frac{5}{3}$)

b. (A ; 2), (B ; −4), (C ; 5)

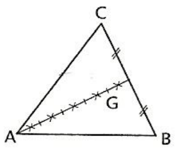
c. (A ; 3), (B ; 4), (C ; −5)

d. (A ; 4), (B ; −4), (C ; 5)

2°) Lire des coefficients

Le point G est le barycentre des points pondérés (A ; a), (B ; b), (C ; c) où a, b, c sont trois réels tels que $a+b+c \neq 0$.

Quels sont les coefficients a, b, c correspondant à la figure réalisée ci-dessous ?



a. $a=1$, $b=2$, $c=2$

b. $a=4$, $b=1$, $c=1$

c. $a=-2$, $b=1$, $c=1$

d. $a=\frac{1}{5}$, $b=-1$, $c=-1$

3°) Situer un barycentre

Où est situé le barycentre des points pondérés (A ; 1), (B ; 2), (C ; 3) ?

a. à l'intérieur du triangle ABC

b. sur l'un des trois côtés du triangle ABC

c. à l'extérieur du triangle ABC

d. sur la médiane issue de A dans le triangle ABC

4°) Changer les coefficients sans changer un de barycentre

Soit G le barycentre des points pondérés (A ; −2), (B ; 3), (C ; 1).

De quels points pondérés G est-il aussi le barycentre ?

a. (A ; 1), (B ; $-\frac{3}{2}$), (C ; $\frac{1}{2}$)

b. (A ; 2), (B ; 3), (C ; 1)

c. (A ; −4), (B ; −6), (C ; −2)

d. (A ; $\frac{1}{3}$), (B ; $-\frac{1}{2}$), (C ; $-\frac{1}{6}$)

11 Soit ABC un triangle et I le milieu de [AB].

Soit J le point défini par $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

Démontrer que (AJ)//(CI).

Réponses

10 1°) b 2°) a 3°) a 4°) d

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne la droite D d'équations $3x+4y-z+1=0$ et $x+y+2z+2=0$.

Calculer la distance de l'origine à cette droite.

On considère la suite (u_n) définie par ses premiers termes $u_0=0$, $u_1=1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$.

Démontrer que $\forall (n\,;\,p) \in \mathbb{N}^2$ $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_{p+k} = u_{p+2n}$.

On considère la suite (a_n) de réels et, pour tout entier naturel k, on pose $b_k = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} a_l$.

Démontrer alors la formule de Pascal : pour tout entier naturel n on a

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k.$$

Indication :

Dans l'expression $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k$, remplacer b_k par sa valeur donnée plus haut puis simplifier l'expression obtenue pour retrouver a_n.