Exercices sur les fonctions de deux variables (2)

1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x\,;\,y)=x^3+3x^2y+y^3$.

Existe-t-il des points pour lesquels $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x\,;\,y)=0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x\,;\,y)=0$?

La fonction f possède-t-elle des extremums locaux ? (on calculera $f(x\,;\,x)$).

2 On considère la fonction f définie par $f(x\,;\,y)=xy-\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{1}{x}$.

Déterminer les extremums globaux et locaux de f sur $\Omega=\left\{(x\,;\,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x>0\right\}$.

3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,\,y)=xy\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.

1°) On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(u)=u\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}$.

Étudier les variations de φ.

2°) On constate que $\forall(x,\,y)\in\mathbb{R}^2\quad f(x,\,y)=\varphi(x)\varphi(y)$.

Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.

3°) En utilisant la question 1°), démontrer que $\forall(x,\,y)\in\mathbb{R}^2\quad |f(x,\,y)|\leq\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

En déduire les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$.

4 Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,\,y)=x^4+y^4-(x-y)^2$.

1°) a) Vérifier que (0, 0) est un point critique de f.

b) Déterminer le signe de $f(h,\,h)$ et puis de $f(-h,\,h)$; en déduire la nature du point critique (0, 0).

2°) Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$. Donner les valeurs des extremums éventuels de f sur $\mathbb{R}^2$.

3°) Développer $(x^2-1)^2+(y^2-1)^2+(x+y)^2-2$.

En déduire les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$.

5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,\,y)=x\,\mathrm{e}^{x(y^2+1)}$.

1°) Déterminer le ou les point(s) critique(s) de f sur $\mathbb{R}^2$.

2°) a) Démontrer que $\forall(x,\,y)\in\mathbb{R}^2\quad f(x,\,y)\geq x\mathrm{e}^x$.

b) En étudiant la fonction $g:x\mapsto x\mathrm{e}^x$, conclure sur le (ou les) extremum(s) de f sur $\mathbb{R}^2$.

6 Déterminer les extremums de la fonction $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\(x,\,y)\mapsto\dfrac{y}{x^2+y^2+1}\end{array}$.

7 Soit F une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=F(t,t)$.

Démontrer que f est de classe C^1 et calculer $f'(t)$.

8 1°) Étudier la fonction $\varphi:t\mapsto\ln t+2t+1$. Démontrer qu'il existe un unique réel α tel que $\varphi(\alpha)=0$.

2°) On considère la fonction f définie sur $\Omega=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ par $f(x\,;\,y)=x\left(\ln x+x+y^2\right)$.

Déterminer le seul point critique de f.

Démontrer que f admet un minimum global sur Ω égal à $m=-\alpha(\alpha+1)$.

9 On cherche toutes les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall(x,\,y)\in\mathbb{R}^2\quad f(x)f(y)=\int_{x-y}^{x+y}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1°) Démontrer qu'une telle fonction est de classe C^∞.

2°) Démontrer qu'une telle fonction est impaire.

3°) Lorsque f n'est pas la fonction constante nulle, déterminer $f'(0)$.

4°) Démontrer que $\forall(x,\,y)\in\mathbb{R}^2\quad f''(x)f(y)=f(x)f''(y)$.

Conclure.

10 Soit f et g deux fonctions de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On considère la fonction u définie par $u(x,\,y)=x\,f\left(\dfrac{y}{x}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Démontrer que l'on a : $x^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$.

11 Soit φ une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On considère la fonction u définie par $u(x,\,y)=xy+x\,\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Démontrer que u vérifie : $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=xy+u(x,\,y)$.

12 Soit $\star$ une loi de groupe sur $\mathbb{R}$ telle que $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\(x,\,y)\mapsto x\star y\end{array}$ soit de classe C^1.

On note e l'élément neutre.

Démontrer $\forall(x,\,y)\in\mathbb{R}^2\quad D_2f\,(x\star y,\,e)=D_2f\,(x,\,e)\;\;D_2f\,(y,\,e)$ où D_2 désigne l'opérateur de dérivation par rapport à la deuxième variable.

Indication : considérer la fonction g définie par $g\,(z)=f\,(x\star y,\,z)$.

13 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \frac{1}{2} \times \cos x \cos y + xy$.

Vérifier que (0, 0) est point critique de *f*.
f admet-elle un extremum local en (0, 0) ?

14 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 - 2x + y^3$.

Déterminer le (les) point(s) critique(s) de *f*.
Calculer $f(0, -2)$ et $f(0, 2)$.
La fonction *f* admet-elle un extremum global ?

15 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ par $f(x, y) = \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$.

1°) Démontrer que *f* est prolongeable par continuité en (0, 0).
On note $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

2°) Calculer $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0;0)$ et $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(0;0)$.

16 Soit *f* une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère la fonction *F* définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad F(x, y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Démontrer que *F* est de classe C^1.
Calculer $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$.

17 Soit *g* une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2.

On pose $f(x, y) = g(x + y, x - y)$.

1°) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

2°) On pose $G(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$ et $H(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$.

En utilisant *G* et *H*, calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

3°) Déterminer *g* telle que l'on ait : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

18 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + y$.
Représenter le gradient aux points (1 ; 0), (2 ; 0) et (0 ; 1).

19 On considère le champ de vecteurs qui à tout point (*x*, *y*) de $\mathbb{R}^2$ associe le vecteur $\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3x+1 \end{pmatrix}$.

Tracer $\vec{V}(1, 2)$ et $\vec{V}(2, 1)$.

20 On considère le champ de vecteurs qui à tout point (*x*, *y*) de $\mathbb{R}^2$ associe le vecteur $\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} 6x+2y \\ 2x \end{pmatrix}$.

Vérifier que $f(x, y) = 3x^2 + 2xy$ est un potentiel de $\vec{V}$.

21 On considère le champ de vecteurs $\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy+1 \\ x^2+2 \end{pmatrix}$.

1°) Représenter $\vec{V}$ au point (0 ; 0), (0 ; 1) et (1 ; 1).
2°) Le champ $\vec{V}$ admet-il des potentiels ?
3°) $f_1(x, y) = x^2 y + y$ est-il un potentiel de $\vec{V}$? $f_2(x, y) = x^2 y + x + 2y$ est-il un potentiel de $\vec{V}$?
4°) Trouver d'autres potentiels de $\vec{V}$.

22 On considère le champ de vecteurs $\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}$.

1°) Représenter $\vec{V}$ au point $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, au point $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et au point $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2°) Démontrer que $\vec{V}$ admet un potentiel.
3°) Vérifier que $f(x,y) = x^2 y$ est un potentiel de $\vec{V}$.
4°) En déduire tous les potentiels de $\vec{V}$.

23 On considère le champ de vecteurs $\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}$.

1°) Représenter $\vec{V}$ au point $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, au point $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et au point $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2°) Démontrer que $\vec{V}$ admet un potentiel.
3°) Vérifier que $f(x, y) = x^2 y$ est un potentiel de $\vec{V}$.
4°) En déduire tous les potentiels de $\vec{V}$.

24 Déterminer si le champ de vecteurs $\vec{V}$ admet un potentiel. Si la réponse est oui, déterminer tous les potentiels.

1°) $\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ \sin y \end{pmatrix}$ 2°) $\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} \sin y \\ (\cos y)x \end{pmatrix}$ 3°) $\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} e^x + y \\ x \end{pmatrix}$ 4°) $\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} e^x y^2 \\ 2ye^x + e^y \end{pmatrix}$

5°) $\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} e^x + \sin y \\ (\cos y)x + y^2 \end{pmatrix}$.

25 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

1°) Déterminer le ou les point(s) critique(s) de f sur $\mathbb{R}^2$. On pourra utiliser la calculatrice.

2°) Calculer la matrice hessienne $H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ et le déterminant de cette matrice.

3°) La fonction *f* admet-elle des extremums ?

26 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^4 + y^3 - 4y - 2$.

1°) Déterminer le ou les point(s) critique(s) de f sur $\mathbb{R}^2$.

2°) Calculer la matrice hessienne $H(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ et le déterminant de cette matrice.

3°) La fonction f admet-elle des extremums ?

27 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

1°) Déterminer le ou les point(s) critique(s) de f sur $\mathbb{R}^2$.

2°) Calculer la matrice hessienne $H(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ et le déterminant de cette matrice.

3°) La fonction f admet-elle des extremums ?

28 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$ si $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ et $f(0, 0, 0) = 0$.

1°) Étudier la continuité de f.
2°) Démontrer que f est dérivable en (0, 0, 0) selon tout vecteur non nul.
3°) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$?

29 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^z + z\mathrm{e}^x$.

1°) Démontrer que si (x, y, z) est un point critique de f, alors $xyz = -1$, $x < 0$, $y < 0$, $z < 0$.
Donner un point critique de f.
2°) a) Soit (x, y, z) un point critique. On pose $a = \mathrm{e}^x$, $b = \mathrm{e}^y$, $c = \mathrm{e}^z$.
Exprimer les dérivées partielles secondes de f en (x, y, z) en fonction de a, b, c.
b) La fonction f admet-elle des extremums locaux ?
Indication : on pourra utiliser la formule de Taylor.

30 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \mathrm{e}^{xy}$.

Calculer $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, y)$, $\dfrac{\partial^n f}{\partial y^n}(x, y)$, $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial^m x \partial^n y}(x, y)$ où m et n sont des entiers naturels quelconques.

31 Soit φ une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1°) On considère la fonction f définie par $f(x, y) = \varphi(xy)$.

Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

2°) Même question avec la fonction g définie par $g(x, y) = \varphi(x + y)$.

32 1°) Soit F une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On considère la fonction g définie par $g(t) = F(t, y(t))$.

Calculer $g'(t)$.

2°) **Application**
Soit y une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que pour tout réel t appartenant à I on ait :
$y'(t)\big(-t\sin(ty(t))\big) - y(t)\sin(ty(t)) = 0$

Démontrer qu'il existe une constante k telle que pour tout réel t dans I on ait $\cos(ty(t)) = k$.

33 Soit F une fonction de classe C^2 définie sur]0 ; + ∞[à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On note G la fonction définie sur l'ouvert Ω =]0 ; + ∞[×]0 ; + ∞[par $G(x, y) = F(xy) - F(x) - F(y)$.
1°) Démontrer que a = (1, 1) est un point critique de G.
2°) On pose $m = F'(1) + F''(1)$.
La fonction G présente-t-elle un extremum local en a lorsque :
• $m > 0$? • $m < 0$?

3°) Dans cette question, on considère la fonction f définie sur]0 ; + ∞[par $f(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{t}$.

On note F la primitive de f qui s'annule en 0.

a) Démontrer que a est l'unique point critique de G.
b) La fonction G admet-elle un extremum local en a ?

34 On considère la fonction définie par $f(x, y) = x \times \ln y - y \times \ln x$.
Démontrer que (e ; e) est un point critique.
Faire un développement limité de $f(\mathrm{e} - h ; \mathrm{e} + h)$; en déduire la nature de ce point critique.

35 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \mathrm{e}^{axy}$ où a est un réel fixé.

Calculer $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, y)$, $\dfrac{\partial^n f}{\partial y^n}(x, y)$, $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial^m x \partial^n y}(x, y)$.

36 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $\boldsymbol{P}_n$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}$[X, Y] homogènes de degré n ;

$\boldsymbol{Q}_n = \{ XY\,P(X, Y),\ P \in \boldsymbol{P}_{n-1} \}$;

$\boldsymbol{R}_n = \{ P \in \boldsymbol{P}_n \ / \ \dfrac{\partial^2 P}{\partial X \partial Y} = 0 \}$.

Démontrer que l'on a : $\boldsymbol{P}_n = \boldsymbol{Q}_n \oplus \boldsymbol{R}_n$.

34 On considère la fonction définie par $f(x, y) = x \times \ln y - y \times \ln x$.

1°) Démontrer que si (a, b) est un point critique de f, alors $\ln b - \frac{b}{a} = 0$ et $\ln a - \frac{a}{b} = 0$.

Démontrer ensuite que si l'on pose $x_0 = \frac{a}{b}$, alors $g(x_0) = 0$ où g est la fonction $x \mapsto x^2 - x\ln x - 1$.

En déduire la valeur de x_0 puis que (e ; e) est le seul point critique.

2°) Faire un développement limité en 0 de $f(\mathrm{e} - h ; \mathrm{e} + h)$; en déduire la nature de ce point critique.

35 On considère la fonction définie sur $D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par $f(x, y) = x + y + \frac{1}{xy}$.

1°) Démontrer que le points (1, 1) est le seul point critique de f.

2°) a) Démontrer que pour tout $(x, y) \in D$, on a : $f(x, y) - f(1, 1) = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + 2\sqrt{xy} + \frac{1}{xy} - 3$.

b) On pose $g(X) = 2X + \frac{1}{X^2} - 3$.

Démontrer que pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$, on a $g(X) \geq 0$.

c) Démontrer que pour tout $(x, y) \in D$, on a : $f(x, y) - f(1, 1) \geq 0$. Que peut-on en conclure ?

36 Déterminer les extremums de la fonction $f : (x, y) \mapsto \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{1-x-y}$ sur l'intervalle [0, 1].
(On rappelle que la moyenne géométrique de trois nombres positifs ou nuls est toujours inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique).

37 1°) Établir que l'équation $\mathrm{e}^{-x} = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. .

2°) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + \mathrm{e}^{-x}$.

a) Démontrer que f admet un unique point critique (x_0, y_0) et établir que $\begin{cases} x_0 - \mathrm{e}^{-x_0} = 0 \\ y_0 = \frac{x_0}{2} \end{cases}$.

b) Démontrer que f admet un extremum local en (x_0, y_0). Est-ce un minimum ou un maximum ?

c) Vérifier que $f(x_0, y_0) = \frac{{x_0}^2}{2} + x_0$ et déterminer une valeur approchée de $f(x_0, y_0)$.

38 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par $f(x, y) = \frac{\ln x}{y} + \frac{\ln y}{x}$.

Démontrer que (e ; e) est un point critique de f.
f admet-elle un extremum local en (e ; e) ?

39 Soit a un réel strictement positif.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$.

Déterminer les points critiques de f.
Déterminer les extremums locaux et préciser leur nature.

Corrigé

1 Le point (0, 0) est le seul point critique de f mais f n'admet pas d'extremum en ce point.
N.B. : La condition sur les dérivées secondes donne : $rt - s^2 = 0$; par conséquent, elle ne permet pas de conclure.

2 Le point (1, 1) est un point critique mais f n'admet pas d'extremum en ce point.
$f(1,1) = \frac{3}{2}$ et $f(1+h, 1+h) \underset{0}{\sim} \frac{3h}{2}$

3 2°) $(0, 0)$; $(0, -1)$; $(0, 1)$; $(1, 1)$; $(1, -1)$; $(1, 0)$; $(-1, -1)$; $(-1, 1)$; $(-1, 0)$.

4 1°) a) $f(0, 0) = 0$ b) $f(h, h) \geq 0$; $f(h, -h) = 2h^4 - 4h^2 < 0$ dans un voisinage de 0.
Le point (0, 0) n'est pas un extremum.
2°) $(0, 0)$; $(-1, 1)$; $(1, -1)$. On a : $f(0, 0) = 0$; $f(-1, 1) = f(1, -1) = -2$.

5 1°) Le seul point critique est $(-1, 0)$.
2°) a) Faire attention à distinguer deux cas : $x \geq 0$ et $x \leq 0$.

6 Les seuls points critiques sont (0, 1) et (0, – 1).
f admet un maximum global en (0, 1) et un minimum global en (0, – 1).

12 On considère le chemin (la courbe paramétrée) $\gamma : t \mapsto (x \star y, t)$.

$g = f \circ \gamma$

$\gamma : t \mapsto (u(t), v(t))$

On applique la formule de dérivation d'une composée $g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \times u'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \times v'(t)$).

$g'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x \star y, z) \times 0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x \star y, z) \times 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(x \star y, z)$

$g'(e) = \frac{\partial f}{\partial y}(x \star y, e)$

Ensuite, on considère les fonctions $l : t \mapsto y \star t$ et $h : t \mapsto x \star t$.
On a : $g = h \circ l$ (on utilise l'associativité de la loi *).

$g'(t) = l'(t) \times h'[l(t)]$

En fait l'énoncé marcherait en supposant simplement que la loi ★ est associative et possède un élément neutre.

13 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -\frac{1}{2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = -\frac{1}{2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$

$rt - s^2 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$

25 $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\ y) = 2x + 3y^2 - 15 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\ y) = 6xy - 12 \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,\ y) = 0 \iff y^3 - 15y + 4 = 0$$
$$\iff (y+4)(y^2 - 4y + 1) = 0$$
$$\iff y = -4 \text{ ou } y = 2 + \sqrt{3} \text{ ou } y = 2 - \sqrt{3}$$

$\left(-\dfrac{33}{2}, -4\right)$, $\left(-3 - 6\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\right)$, $\left(-3 + 6\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\right)$

26 1°) $\left(0, -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ et $\left(0, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$

Le point (1 ; 2) est le seul point critique de *f*.

2°) $H(x, y) = \begin{pmatrix} 12x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$

$\det H(x, y) = 72x^2 y$

3°) $g(y) = y^3 - 4y - 2$

27 1°) Le point (1 ; 2) est le seul point critique de *f*.

2°) $H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$

$\det H(x, y) = 36x^2 - 36y^2$

3°) $\det H(1,2) < 0$ donc le point (1 ; 2) est un point col.

28 1°) *f* est continue en (0, 0, 0) (le mieux est de passer en polaires).

2°) $f(ta, tb, tc) = tf(a, b, c)$ (la fonction *f* est homogène)

La dérivée de *f* en (0, 0, 0) selon le vecteur (*a*, *b*, *c*) est égale à $f(a, b, c)$)

3°) La fonction *f* n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ sinon la dérivée de *f* en (0, 0, 0) selon tout vecteur non nul devrait être nulle, ce qui n'est pas.

29 1°) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\ y,\ z) = e^y + ze^x$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\ y,\ z) = xe^y + e^z$; $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,\ y,\ z) = ye^z + e^x$

$e^{y-x} = -z$
$e^{z-y} = -x$
$e^{x-z} = -y$

On multiplie membre à membre.

(– 1, – 1, – 1) est un point critique de *f*.

2°)

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\ y,\ z) = ze^x = -b$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\ y,\ z) = xe^y = -c$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,\ y,\ z) = ye^z = -a$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,\ y,\ z) = b$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,\ y,\ z) = c$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,\ y,\ z) = b$

On pose $Q(h) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X)h_1^2 + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X)h_2^2 + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(X)h_3^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X)h_1 h_2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(X)h_2 h_3 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(X)h_1 h_3$.

$Q(h) = -bh_1^2 - ch_2^2 - ah_3^2 + 2ch_1h_2 + 2ah_2h_3 + 2bh_1h_3$

Si *X* est un point critique, on a : $f(X+h) = f(X) + \dfrac{1}{2}Q(h) + \| h \|^2 \varepsilon(h)$.

$Q(r,0,0) = -br^2 < 0$
$Q(r,r,r) = (a+b+c)r^2 > 0$

Aucun point critique n'est pas un extremum local.

32 Considérer la fonction *F* définie par $F(t, y) = \cos(ty)$.

33 1°) $\dfrac{\partial G}{\partial x}(x, y) = yF'(xy) - F'(x)$, $\dfrac{\partial G}{\partial y}(x, y) = xF'(xy) - F'(y)$, $\dfrac{\partial G}{\partial x}(1,1) = F'(1) - F'(1) = 0$

2°) $\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, y) = y^2 F''(xy) - F''(x)$ $\quad \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}(a, a) = 0$

$\dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x, y) = x^2 F''(xy) - F''(y)$ $\quad \dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2}(a, a) = 0$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(x, y) = F'(xy) + xyF''(xy)$$
$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(a) = F'(1) + F''(1)$$

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(a)\right)^2 - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(a)\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(a) < 0$$

36 $\sqrt[3]{e^x\ e^y\ e^{1-x-y}} \leq \dfrac{e^x + e^y + e^{1-x-y}}{3}$ soit $3e^{\frac{1}{3}} \leq f(x, y)$

Il y a égalité si et seulement si $x = y = 1 - x - y$ soit $x = y = \dfrac{1}{3}$.

37 2°) b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 + e^{-x}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 4$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2$

$\Delta = \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right]^2 - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \times \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 4 - (8 + 4x_0) = -4(x_0 + 1) < 0 \to$ extremum local (minimum)

$\boxed{38}$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \dfrac{2\ln y}{x^3} - \dfrac{1}{x^2 y}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \dfrac{2\ln x}{y^3} - \dfrac{1}{y^2 x}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\dfrac{1}{xy^2} - \dfrac{1}{yx^2}$

$\Delta = \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathrm{e}, \mathrm{e})\right]^2 - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathrm{e}, \mathrm{e}) \times \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathrm{e}, \mathrm{e}) = 0 - \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}\right)^2 < 0 \rightarrow$ extremum local

Questions de cours

1 Définition des dérivées partielles. Définition du gradient. Dérivée partielle d'une somme, d'un produit, d'un quotient…

2 Dérivées directionnelles.

3 Expression d'une dérivée directionnelle à l'aide des dérivées partielles (énoncé et démonstration).

4 Signification de dx et dy (1-forme).

5 Définition d'un extremum local et d'un extremum global pour une fonction de deux variables.
Condition nécessaire d'extremum pour une fonction de deux variables de classe C^1. Points critiques.
Comparaison avec le cas d'une fonction d'une seule variable.

6 Définition des dérivées partielles secondes ; théorème de Schwartz. Contraposée du théorème de Schwartz.

7 Formule de dérivée d'une composée.

8 Changement de variable en coordonnées polaires.

9 Caractérisation des fonctions constantes à l'aide du gradient.

10 **Lemme d'extension**

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ de classe C^1.

Les fonctions $(x\,;y) \mapsto f(x)$ et $(x\,;y) \mapsto f(y)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

11 Dérivée d'une fonction selon un champ de vecteurs. Opérateur de dérivation attaché à un champ.

12 Définition d'une fonction de classe C^1 sur un ouvert $\mathbb{R}^2$.
Propriété :

Si une fonction est de classe C^1 sur un ouvert, alors elle admet une dérivée directionnelle selon tout vecteur non nul.

13 Développement limité à l'ordre 1 en un point pour une fonction de deux variables.

Si f est de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors elle admet un développement limité à l'ordre 1 en tout point.

14 Développement limité à l'ordre 2 en un point d'une fonction de deux variables.

15 Opérateurs de dérivation en coordonnées polaires.

16 Théorème d'approximation différentielle (énoncé).

17 Dérivée de $f \circ \gamma$ où γ est une courbe paramétrée de I dans Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.