1ère L Option

Ombre au soleil de figures planes
Prévoir, dessiner, contrôler

1er chapitre du cours sur la perspective parallèle.

Depuis l'école primaire, un mode de représentation de l'espace est imposé : la perspective cavalière.

Le but du cours va être d'approfondir ce mode de représentation de l'espace en partant de la notion d'ombre au soleil (donc d'un point de vue physique très concret).
Un autre mode de représentation de l'espace sera étudié en terminale avec la perspective centrale.

Objectif : observer puis dégager les caractéristiques des ombres solaires des figures planes.

<u>Observations ; mise en évidence de propriétés</u>

Compétences :

- dégager les caractéristiques d'une figure
- comparer deux figures
- analyser ce qui est conservé (les invariants) ; ce qui ne l'est pas (déformations).

I. <u>Ombre au soleil de quadrilatères</u>

1°) Ombre au soleil d'un carré

Découpons un carré de carton, exposons-le aux rayons du soleil et observons son ombre portée au sol ou sur un mur parfaitement plan.

Suivant la façon dont on incline le carton, son ombre peut être un carré, un rectangle un losange ou encore un parallélogramme quelconque (figures 1 et 2). On obtient un carré lorsque l'on maintient le carton parallèle au plan de l'ombre. Il se peut aussi que l'ombre se réduise à un segment.

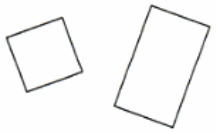


Figure 1

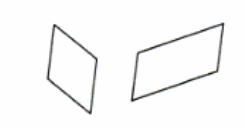


Figure 2

Etant donné qu'un carré, un rectangle et un losange sont des parallélogrammes, puisqu'ils ont toutes les caractéristiques de ce dernier, nous pouvons dire que **l'ombre solaire d'un carré est un parallélogramme lorsqu'elle ne se réduit pas à un segment**.

Observons l'ombre obtenu sur le sol supposé horizontal et parfaitement plan.

Quelles sont les formes possibles de l'ombre d'un carré exposé aux rayons du soleil ?

2°) Ombre au soleil d'un parallélogramme

Observons à présent l'ombre solaire d'un rectangle, d'un losange ou d'un parallélogramme quelconque.
En orientant convenablement chacune de ces formes, on constate que l'on peut obtenir une ombre qui soit indifféremment un parallélogramme, un losange, un rectangle et même un carré ! Les autres quadrilatères, tels le trapèze ou le quadrilatère quelconque, eux, ne peuvent être obtenus comme ombres solaires des premiers.

Du point de vue de l'ombre solaire, le carré, le rectangle, le losange, et le parallélogramme sont donc des figures interchangeables : l'ombre de chacune d'elles peut être n'importe laquelle de celles-là. Comme toutes ces figures sont des parallélogrammes, nous résumerons ces observations en disant que **l'ombre solaire d'un parallélogramme est un parallélogramme ou un segment.**

Quelles sont les ombres solaires possibles d'un rectangle, d'un losange, d'un parallélogramme ?

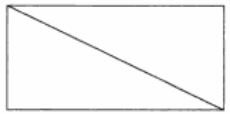
Ce sont exactement les mêmes que celles d'un carré.

3°) Ombre au soleil d'un triangle

Quelles sont les ombres solaires possibles d'un triangle équilatéral, isocèle, rectangle, quelconque ?
Peut-on prévoir ces ombres à partir de celles des quadrilatères ?

Les triangles sont des figures de base de la géométrie : on peut construire n'importe quel polygone au moyen de triangles, et, inversement, on peut découper les polygones en triangles afin d'en déduire des propriétés intéressantes. La question posée ici mobilise cette idée fondamentale.
En effet, plutôt que de contrôler les ombres des triangles, on peut les prévoir à l'aide de celles des quadrilatères.

Soit on forme des quadrilatères avec deux exemplaires d'un même triangle, judicieusement accolés : par exemple, le rectangle de la figure ci-dessous est composé de deux exemplaires du même triangle rectangle.



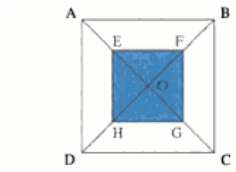
Soit on découpe des quadrilatères, par une de leurs diagonales, en deux triangles.

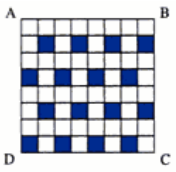
Pour obtenir les ombres de triangles nous décomposerons les parallélogrammes déjà observés en triangles identiques. Le parallélogramme quelconque est composé de deux triangles quelconques, le rectangle de deux triangles rectangles et le losange de triangles isocèles, voire équilatéraux (on pourrait faire les figures). On en conclut que l'ombre solaire de n'importe lequel de ces triangles peut donner n'importe lequel d'entre eux.
Ainsi, l'ombre solaire d'un triangle équilatéral peut être un triangle quelconque, puisque l'ombre d'un losange peut être un parallélogramme quelconque. Mais elle peut également un triangle isocèle ou rectangle.

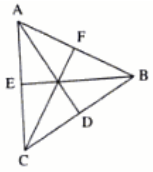
Bien sûr, nos observations ont des limites : les ombres ne sont pas toujours nettes, les cartons s'incurvent un peu, nos mesures ne sont peut-être pas assez précises. La géométrie a justement pour objet de contrôler et de justifier ce que nous pensons avoir vu.

II. Ombre au soleil de vitraux

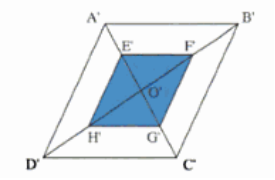
On considère les trois vitraux ci-dessous.

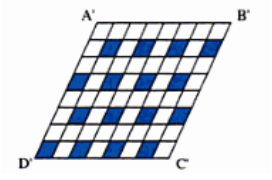


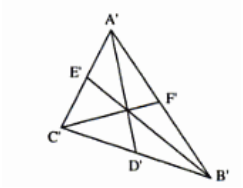




On les expose aux rayons du soleil.
On va dessiner leur ombre à l'intérieur d'un cadre donné.







1er vitrail

Le cadre extérieur du premier vitrail est un carré.
Son ombre peut donc être un parallélogramme quelconque.
Voici deux manières de compléter l'ombre du vitrail à l'intérieur de ce parallélogramme.

1ère manière :

On trace les segments [A'C'] et [D'B'] : à leur intersection, on trouve l'ombre du point O, soit O'. Tout comme O est le milieu des diagonales [AC] et [BD], O' demeure le milieu des diagonales [A'C'] et [B'D']. L'ombre de E, soit E' se trouve au milieu du segment [A'O'], tout comme E est le milieu de [AO].
De même, on trouve F' au milieu de [B'O'], G' au milieu de [C'O'] et H' au milieu de [D'O'].

2e manière :
On peut aussi, une fois E' localisé, tracer (E'F') parallèle à (A'B'), ce qui conduit à F'. On trace alors (F'G') parallèle à (B'C') et ainsi de suite. Le théorème de Thalès permet d'expliquer pourquoi ces deux constructions Fournissent le même résultat.

2e vitrail

La deuxième figure représente, elle, une ombre solaire du 2e vitrail : les segments [A'B'] et [A'D'] sont partagés en huit parties égales, tout comme les segments [AB] et [AD] ; les plombs situés sur les droites parallèles possèdent des ombres parallèles. Les carrés du quadrillage deviennent donc des parallélogrammes.

3e vitrail

La troisième figure est susceptible de représenter l'ombre solaire du 3e vitrail. Le cadre extérieur est un triangle équilatéral : son ombre peut être un triangle quelconque. Les droites (AD), (BE) et (CF) dessinées sur la figure du vitrail sont à la fois hauteurs du triangle équilatéral, ses médianes, les médiatrices de ses côtés ou les bissectrices de ses angles : leur ombre (A'D'), (B'E') et (C'F') ne sont plus que les médianes du triangle quelconque A'B'C' qui représente l'ombre du vitrail sur la figure.

III. Ombre au soleil d'un bâton

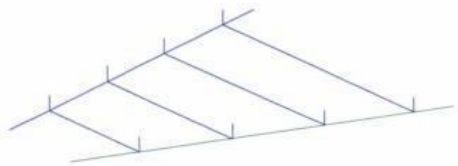
1°) Ombre au soleil d'un bâton

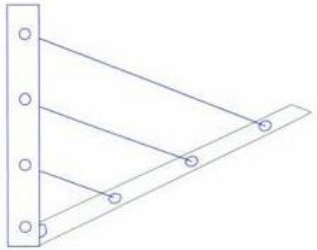
L'ombre au soleil d'un bâton sur un sol plan est :
- soit un segment ;
- soit un point.

L'ombre n'a en général pas la même longueur sur le bâton.

2°) Ombre au soleil d'un bâton gradué

Ce paragraphe repose sur l'observation de l'ombre au soleil d'un bâton planté de clous à distance régulière et celle d'une planche dans laquelle on a foré des trous à intervalle régulier (voir figures ci-dessous).
On constate (en s'aidant éventuellement d'une règle gradué) que, sur l'ombre du bâton, les ombres des clous sont placées à intervalles réguliers et que dans l'ombre de la planche, les trous restent équidistants.





IV. Invariants de l'ombre au soleil : ce que les ombres solaires conservent

1°) L'ombre au soleil conserve **l'alignement** et l'ordre des points.
2°) L'ombre au soleil conserve **le parallélisme** des droites.
3°) L'ombre au soleil conserve **les milieux** des segments et les rapports de longueur sur un segment.

V. Non conservations liées aux déformations

1°) L'ombre au soleil ne conserve pas les longueurs.

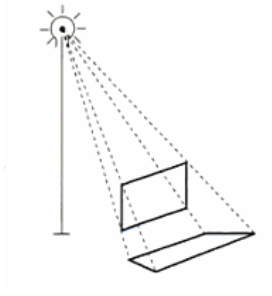
On a en effet observé des allongements et des rétrécissements.

2°) L'ombre au soleil ne conserve pas les angles.

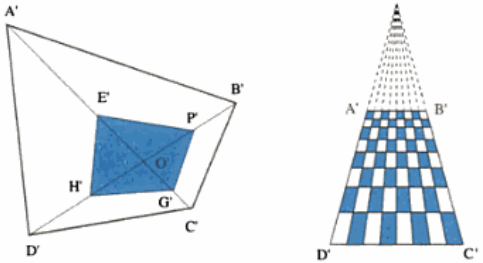
VI. D'autres type d'ombres

1°) Eclairage par une source lumineuse ponctuelle

Pour obtenir comme ombre d'un parallélogramme un quadrilatère qui ne soit pas un parallélogramme, il faudrait l'exposer non pas au soleil mais sous un autre éclairage tel une source lumineuse ponctuelle placée assez près de la figure comme le montre la figure ci-dessous.



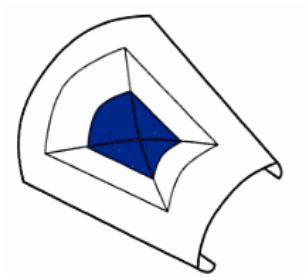
Tous les invariants de l'ombre solaire ne sont plus respectés par ce type d'éclairage. Ainsi en exposant les deux premiers vitraux des figures données dans le I aux rayons d'une source ponctuelle on aurait pu obtenir des ombre comme celles représentées ci-dessous : les ombres de segments parallèles ne sont plus forcément parallèles mais semblent converger vers un même point si on les prolonge ; des points situés à intervalles réguliers ne le sont plus sur l'ombre. Par contre, des points alignés ont des ombres alignées.



Les ombres de figures éclairées par une source ponctuelle (ombre au flambeau) seront étudiées en détail en Terminale (notions de perspective centrale).

2°) Ombre au soleil sur une surface courbe

Par ailleurs, si l'on avait observé des ombres portées par le soleil sur une surface non plane, comme sur la figure ci-dessous, on aurait vu que des droites peuvent avoir des ombres courbes. L'alignement des points n'est dès lors plus conservé.



VII. <u>Intérêt : pourquoi s'intéresser aux ombres au soleil ?</u>

Fondamentalement, dessiner en perspective cavalière revient à dessiner une ombre solaire. En effet, comme on le verra en détail dans le chapitre suivant, les représentations de figures planes en perspectives cavalière ont les mêmes caractéristiques que les ombres solaires de ces figures : elles les déforment en respectant les mêmes invariants.

Le dessin en perspective relève plus a priori de l'arbitraire : pourquoi par exemple représenter un carré au moyen d'un parallélogramme ?
On peut le justifier précisément en se référant au fait que l'ombre solaire d'un carré *peut* être un parallélogramme : ce dernier est donc une certaine « vision » du carré.
D'où l'intérêt de commencer par les ombres.

VIII. <u>Ombre au soleil d'autres figures</u>

Ombre au soleil d'un cercle (ou d'un disque) : cercle, ellipse ou segment

(ombre au soleil d'un cercle → ellipse)

IX. <u>Découverte du théorème de Thalès</u>

Sources du cours :
Des situations pour enseigner la géométrie 1re/4e
Par Véronique Blanquet, COJEREM, Collèges Jésuites Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques

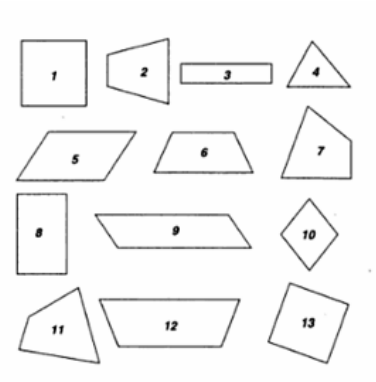
Autre début possible :

Depuis l'école primaire, l'élève est familiarisé avec la PC pour représenter les objets (solides) usuels de l'espace.

1ère L Option

Exercices sur l'ombre au soleil de figures planes

1 Parmi les figures suivantes, quelles sont celles qui pourraient être l'ombre d'un carré exposé au soleil ?
Entourer les numéros des figures qui conviennent.
Préciser les défauts des figures qui ne conviennent pas.



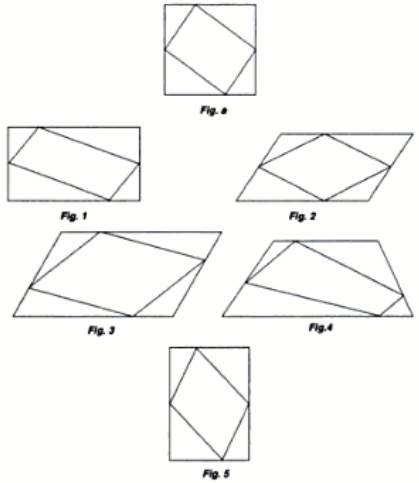
2 **Répondre par « Vrai » ou « Faux ».**

1°) L'ombre d'un carré peut être :
- un carré
- un rectangle
- un parallélogramme
- un trapèze
- un triangle
- une autre figure (préciser laquelle)

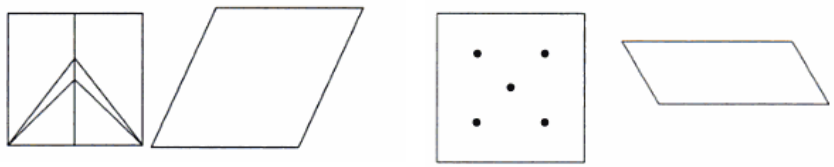
2°) L'ombre d'un parallélogramme peut être :
- un carré
- un rectangle
- un parallélogramme
- un trapèze
- un triangle
- un quadrilatère non trapèze
- une autre figure (préciser laquelle)

3°) L'ombre d'un triangle équilatéral peut être :
- un triangle équilatéral
- un triangle rectangle
- un triangle isocèle
- un triangle quelconque
- une autre figure (préciser laquelle)

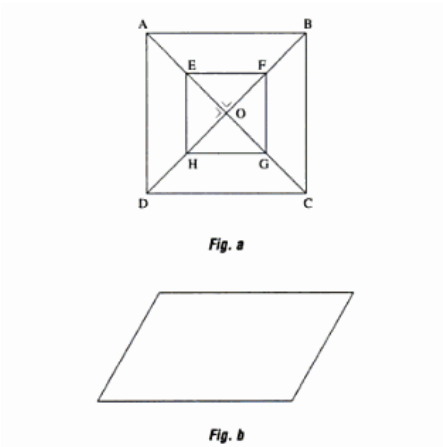
3 Parmi les figures suivantes, quelles sont celles qui pourraient être l'ombre du vitrail de la figure a ?
Supprimer les numéros de celles qui ne conviennent pas et préciser pourquoi.



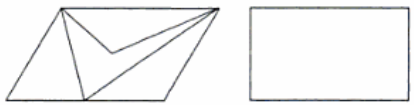
4 Dessiner l'ombre des figures ci-dessous dans le cadre tracé à droite.



5 On considère le vitrail donné en vraie grandeur sur la figure a.
Dessiner son ombre au soleil dans le cadre de la figure b.



6 Dessiner en vraie grandeur dans le cadre tracé à droite le vitrail dont on donne l'ombre à gauche.



7 Parmi les figures données ci-dessous, quelles sont celles qui ne sont pas l'ombre du vitrail représenté à la figure c ? Entourer les défauts.

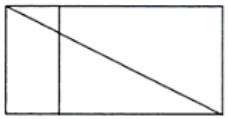


Fig. c

8 Compléter les figures ci-dessous qui sont des ombres de la figure b.

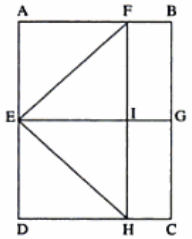
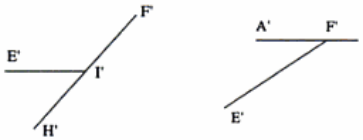
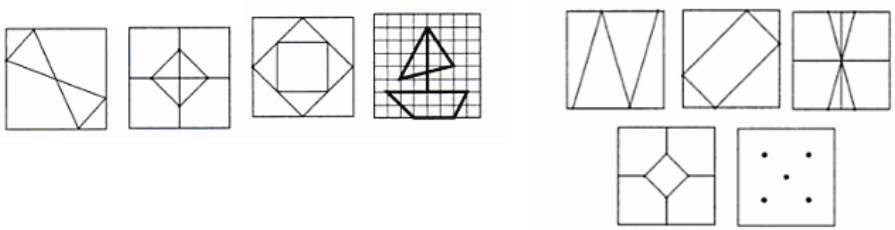


Fig. b



9 Dans chaque cas, on donne un vitrail vu en « vraie grandeur ». On demande de tracer son ombre dans le cadre. Après avoir analysé les caractéristiques de la figure, tracer en utilisant les invariants de l'ombre au soleil.

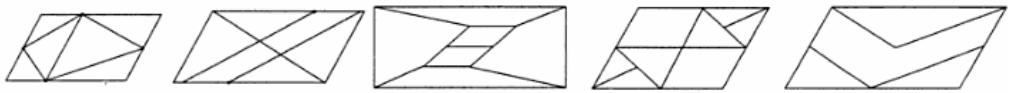
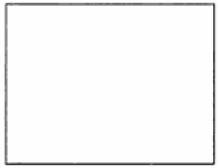
Donnée du vitrail



Cadre de l'ombre

10 Dans chaque cas, on donne l'ombre d'un vitrail. On demande de dessiner le vitrail dans le cadre rectangulaire donné ci-dessous.

Donnée de l'ombre :



Cadre du vitrail :