Exercices sur les espaces euclidiens (2)

1 Soit E un espace euclidien de dimension 2.
Déterminer les endomorphismes de E qui commutent avec tous les automorphismes orthogonaux de E.

Indication : on pourra raisonner sur les matrices.

2 **Décomposition d'Iwasawa**

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On se propose de démontrer qu'il existe un unique couple de matrices (O, T), O orthogonale et T triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont positifs, telles que $A = OT$.

1°) **Existence**

On pose $E = \mathbb{R}^n$, muni de sa structure canonique d'espace euclidien et l'on note $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ sa base canonique. On note B' la base de E telle que la matrice de passage de B à B' soit A et B'' la base obtenue en orthonormalisant B' selon le procédé de Schmidt.
Utiliser les matrices de passage pour démontrer l'existence du couple (O, T).

2°) **Unicité**

Soit (O_1, T_1) et (O_2, T_2) deux couples satisfaisant au problème.
Démontrer que $T = T_2 T_1^{-1}$ est une matrice triangulaire et orthogonale. Conclure.

3 1°) On pose $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculer ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{A}\mathrm{X}$ pour $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \boldsymbol{M}_n(\mathbb{R})$.

2°) Déterminer $\displaystyle \sup_{(a_{i,j}) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$.

4 Soit a un vecteur quelconque fixé dans un espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 3.
Démontrer que l'application u de E dans lui-même définie pour tout vecteur x de E par $u(x) = x + a \wedge x$ est un automorphisme de E ; déterminer $u^{-1}(x)$.

5 Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et a un vecteur fixé non nul de E.
On considère l'application T de E dans lui-même définie pour tout vecteur x de E par $\mathrm{T}(x) = a \wedge (a \wedge x)$.
1°) Démontrer que T est un endomorphisme de E.
2°) Déterminer Ker T et Im T.
3°) Résoudre l'équation $\mathrm{T}(x) = b$ où b est un vecteur donné de E.
4°) Démontrer que pour tout réel λ, l'ensemble $\mathrm{E}_\lambda = \{x \in \mathrm{E} \,/\, \mathrm{T}(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de E ; préciser E_λ suivant les valeurs de λ.

6 Dans un espace euclidien orienté de dimension 3, on donne deux bases orthonormées directes (i, j, k) et (i', j', k').
Démontrer que la famille $(i - i', j - j', k - k')$ est liée.

7 Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ une matrice de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Calculer $\displaystyle \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \right)^2$.

8 Soit E un espace euclidien.
Déterminer l'ensemble des endomorphismes f de $\mathbf{L}$(E) tels que pour tout $g \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$ $f \circ g = g \circ f$.

Indication : démontrer que pour tout vecteur x non nul de E, le système $(x, f(x))$ est lié ; pour cela on pourra considérer la symétrie orthogonale par rapport à $\mathbb{R}x$.

9 Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Soit G un sous-groupe de (SO(E), $\circ$).

1°) Démontrer qu'il existe une rotation r dans G d'angle θ tel que $\cos\theta < 0$.
2°) Déterminer $\{x \in E \,/\, x \perp r(x)\}$ (en utilisant une base).
3°) En déduire les sous-groupes distingués de SO(E).

10 On munit l'espace $E = \mathbb{R}^3$ de son produit scalaire euclidien canonique.

Déterminer la nature de l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base canonique de E est :
$A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & -8 & -4 \end{pmatrix}$.

11 Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.
Soit $\boldsymbol{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base directe de E.
Déterminer la matrice dans la base $\boldsymbol{B}$ de la rotation R telle que $R(e_1) = -e_2$ et telle que l'ensemble des vecteurs invariants soit la droite vectorielle engendrée par le vecteur $e_1 - e_2 + e_3$.

12 Soit a et b deux vecteurs quelconques d'un espace vectoriel E euclidien orienté de dimension 3.
Résoudre dans E l'équation $a \wedge (b \wedge x) = (a \wedge b) \wedge x$.

13 Soit a et b deux vecteurs quelconques d'un espace vectoriel E euclidien orienté de dimension 3.
Résoudre dans E l'équation $a \wedge (b \wedge x) = b \wedge (a \wedge x)$.

14 Pour quelles valeurs des réels a et b la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$?

Dans chaque cas, déterminer la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

15 On munit l'espace $E=\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire euclidien canonique.

Déterminer la nature de l'endomorphisme *f* de *E* dont la matrice dans la base canonique de *E* est :

$$A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

16 On munit l'espace $E=\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire euclidien canonique.

Déterminer la nature de l'endomorphisme *f* de *E* dont la matrice dans la base canonique de *E* est :

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

17 On munit l'espace $E=\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire euclidien canonique.

Déterminer la nature de l'endomorphisme *f* de *E* dont la matrice dans la base canonique de *E* est :

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

18 On munit l'espace $E=\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire euclidien canonique.

Déterminer la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'endomorphisme *f* de *E* dont la matrice dans la base canonique de *E* est $A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & -1 & -8 \\ -4 & -8 & -1 \end{pmatrix}$.

19 Déterminer la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique dont la matrice dans la base canonique est $A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$.

20 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique dont la matrice dans la base canonique est $A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2 ; en déduire la nature et les éléments caractéristiques de *f*.

21 On se place dans l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.
On pose $P=\{(x,y,z)\in E\,/\,4x-4y+7z=0\}$ et $P'=\{(x,y,z)\in E\,/\,4x-y+z=0\}$.
Déterminer la nature de $f=S_{P'}\circ S_P$ et donner ses éléments caractéristiques.

22 On se place dans l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.
On pose $P=\{(x,y,z)\in E\,/\,x+2y+3z=0\}$ et $P'=\{(x,y,z)\in E\,/\,5x-y-z=0\}$.
Déterminer la nature de $f=S_{P'}\circ S_P$ et donner ses éléments caractéristiques.

23 On se place dans l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.
Déterminer la matrice dans la base canonique de *E* de l'affinité vectorielle orthogonale dont la base est le plan $P=\{(x,y,z)\in E\,/\,2x+y-z=0\}$ et de rapport -3.

24 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, on pose $u=(1,-1,3)$.

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbb{R}u$.

25 1°) Soit $E=\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire euclidien canonique. On note $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ la base canonique de *E* et pour toute permutation σ appartenant au groupe symétrique S_n, on note f_σ l'endomorphisme de *E* tel que $\forall i\in\{1,\dots,n\}\quad f_\sigma(e_i)=e_{\sigma(i)}$.
Démontrer que f_σ est un automorphisme de *E* et calculer son déterminant.
2°) Dans cette question, on prend $n=3$. Pour tout élément σ de S_n, déterminer la nature de f_σ.

26 Pour toute matrice $A=(a_{i,j})$ de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on pose $S(A)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}$.

Calculer les extremums de *S* sur $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ où ces extremums sont atteints.

Indication :
En notant encore *A* l'automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique vérifier que $S(A)=(AU\,|\,U)$ avec $U=(1,\dots,1)$.

Réponses

1

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} b=c \\ a=d \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b=-c$$

On obtient : $b=c=0$. Les endomorphismes cherchés ont pour matrices λI_2.

3

1°)

$$\mathrm{AX}=\sum_{j=1}^{n} \mathrm{C}_j(\mathrm{A})$$

$$^t\mathrm{XAX}=\sum_{j=1}^{n} {}^t\mathrm{XC}_j(\mathrm{A})$$

$^t\mathrm{XC}_j(\mathrm{A})$ est la somme des éléments de la colonne $\mathrm{C}_j(\mathrm{A})$

$$^t\mathrm{XAX}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,\,j}$$

4

$$y=a+a\wedge x$$

$$(y\,|\,x)=\|\,x\,\|^2$$

$$(y\,|\,a)=(x\,|\,a)$$

$$\begin{aligned} a\wedge y &= a\wedge x+a\wedge(a\wedge x) \\ &= a\wedge x+(a\,|\,x)a-\|\,a\,\|^2 x \\ &= -x+(a\,|\,x)a-\|\,a\,\|^2 x \\ &= \left(-1-\|\,a\,\|^2\right)x+(a\,|\,y)a \end{aligned}$$

$$x=\frac{(a\wedge y)-y-(a\,|\,y)a}{-1-\|\,a\,\|^2}$$

$$x=\frac{1}{1+\|\,a\,\|^2}\left(y+(a\,|\,y)a-a\wedge y\right)$$

6

Démontrons que la famille $(i-i',\ j-j',\ k-k')$ est liée.

Pour cela, démontrons que $\mathrm{D}=\det(i-i',\ j-j',\ k-k')$ est nul.

Par multilinéarité du déterminant, on peut développer D de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \mathrm{D} &= \det(i,\ j-j', k-k')-\det(i',\ j-j', k-k') \\ &= \det(i,\ j, k-k')-\det(i,\ j', k-k')-\det(i',\ j, k-k')+\det(i',\ j', k-k') \\ &= \det(i,\ j, k)-\det(i,\ j, k')-\det(i,\ j', k)+\det(i,\ j', k')-\det(i',\ j, k)+\det(i',\ j, k')+\det(i',\ j', k)-\det(i',\ j', k') \end{aligned}$$

Or $\det(i,\ j, k)=\det(i',\ j', k')=1$ car ce sont les déterminants de bases orthonormées directes.

On utilise : la permutation circulaire par laquelle le déterminant est invariant.
La définition du déterminant : $\det(i,\ j, k)=(i\wedge j\,|\,k)$.

$$\mathrm{D}=1-(k\,|\,k')-(j\,|\,j')+(i'\,|\,i)-(i\,|\,i')+(j'\,|\,j)+(k'\,|\,k)-1$$

Les termes s'annulent deux à deux donc on a bien $\mathrm{D}=0$.
La famille $(i-i',\ j-j',\ k-k')$ est liée.

10 On munit l'espace $E=\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire euclidien canonique.

Déterminer la nature de l'endomorphisme *f* de *E* dont la matrice dans la base canonique de *E* est :

$$A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & -8 & -4 \end{pmatrix}.$$

- *A* est orthogonale (famille des vecteurs colonnes orthonormée)
- La matrice n'est pas symétrique.
- On forme $B=\frac{1}{2}\left(A-{}^tA\right)$.

$$B=\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & 15 \\ 3 & -15 & 0 \end{pmatrix}=\mathrm{Mat}\ \varphi_x \text{ avec } x=\frac{1}{18}\begin{pmatrix} -15 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Car $X=\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

$$\text{Mat } \varphi_x(y) = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qw - rv \\ rv - pw \\ pv - qu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Calculons $AX = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & -8 & -4 \end{pmatrix} \times \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -15 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$AX = \frac{1}{2\times 9^2}\begin{pmatrix} -135 \\ -27 \\ 27 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -15 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = X$$

$\Rightarrow$ A est la matrice d'une rotation

$\Rightarrow$ $\operatorname{tr} A = 2\cos\alpha + 1$ avec α angle de f dans E orienté selon la base canonique

$\operatorname{tr} A = 0 \;\Rightarrow\; 2\cos\alpha + 1 = 0$ et $\sin\alpha \geqslant 0$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}$$

$f = R_{\frac{2\pi}{3}, x}$ avec $x = (-15, -3, 3)$ dans E orienté selon la base canonique

8

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right)^2 = \sum_{\substack{(j,j') \\ 1\leqslant j\leqslant n \\ 1\leqslant j'\leqslant n}} a_{i,j}a_{i,j'}$$

$$S = \sum_{\substack{(i,j,j') \\ 1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n \\ 1\leqslant j'\leqslant n}} a_{i,j}a_{i,j'}$$

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\substack{(j,j') \\ 1\leqslant j\leqslant n \\ 1\leqslant j'\leqslant n}} a_{i,j}a_{i,j'}\right)$$

$$S = \sum_{\substack{(j,j') \\ 1\leqslant j\leqslant n \\ 1\leqslant j'\leqslant n}} \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(a_{i,j}a_{i,j'}\right)}_{\delta_{j,j'}}$$

$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,j'} = \delta_{j,j'}$ car la matrice A est orthogonale.

Seuls, les $j = j'$ contribuent c'est-à-dire n couples.

$S = n$

20 $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(2, 2, 1)$

Équation de l'image

Questions de cours

$\boxed{1}$ Forme des matrices de $O_2(\mathbb{R})$.

$\boxed{2}$ Automorphismes orthogonaux (« conservation » de la norme et du produit scalaire).

$\boxed{3}$ $O_n(\mathbb{R})$ (définition d'une matrice orthogonale, structure de groupe).

$\boxed{4}$ Symétrie orthogonale. Définition, écriture matricielle dans une base adaptée.

$\boxed{5}$ Orientation d'un espace vectoriel euclidien ; définition du produit mixte (forme volume).

$\boxed{6}$ Rotation-miroir : définition, illustration, écriture mathématique, matrice dans une base adaptée.

$\boxed{7}$ Soit E un espace euclidien. Démontrer que l'ensemble O(E) muni de la loi de composition des applications est un groupe.

$\boxed{8}$ Démontrer que, pour un endomorphisme d'un espace euclidien, la conservation du produit scalaire est équivalente à la conservation de la norme.

$\boxed{9}$ Description des éléments de $SO_3(\mathbb{R})$.

$\boxed{10}$ Automorphismes orthogonaux (définition et caractérisation matricielle).

$\boxed{11}$ Caractérisation d'un automorphisme orthogonal par la conservation des bases orthonormées (l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée).

$\boxed{12}$ Définition des automorphismes orthogonaux directs et indirects.