2^{e} Exercices sur les équations de droites

1 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère les droites D_1 et D_2 d'équations réduites respectives $y=1-x$ et $y=4-2x$.
1°) Tracer ces droites sur un graphique (prendre un centimètre ou un « gros » carreau pour unité de longueur).
2°) La droite D_1 coupe l'axe des abscisses en A, la droite D_2 coupe l'axe des abscisses en B, la droite D_2 coupe l'axe des ordonnées en C, la droite D_1 coupe l'axe des ordonnées en D.
Calculer les coordonnées des points A, B, C, D.
3°) Calculer l'aire du quadrilatère ABCD.

2 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), construire la droite D d'équation réduite $y=3x+1$ en utilisant le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.
On prendra un centimètre ou un « gros » carreau pour unité graphique.

3 1°) Résoudre par le calcul le système $\begin{cases} 3x-y=-1 \\ -4x+3y=-2 \end{cases}$ (méthode au choix).

2°) Sur le graphique ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), tracer les droites D et D' d'équations respectives $3x-y=-1$ et $-4x+3y=-2$.
Retrouver graphiquement le résultat du 1°).

4 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère le point A(– 2 ; – 3) et les droites D_1 et D_2 d'équations respectives $y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{5}{2}$ et $y=4x+14$.
1°) Démontrer que A n'appartient ni à D_1 ni à D_2.
2°) Faire la figure.
3°) Soit ***P*** un parallélogramme dont un des sommets est A et dont des côtés ont pour supports D_1 et D_2.
Déterminer les équations des droites portant les deux autres côtés de ***P***.
b) Calculer les coordonnées du centre de ***P***.

5 Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on considère les points A(– 1 ; 3) et B(7 ; – 2).
Faire un graphique (prendre le repère orthonormé avec un centimètre ou un « gros » carreau pour unité de longueur).

1°) Déterminer par le calcul l'équation réduite de la droite (AB).
2°) Déterminer l'ordonnée du point K de (AB) tel que $x_{\text{K}}=1$.
3°) Déterminer l'abscisse du point L de (AB) tel que $y_{\text{L}}=1$.
4°) La droite (AB) coupe l'axe des abscisses en U et l'axe des ordonnées en V.
Déterminer l'abscisse de U et l'ordonnée de V.

6 Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on considère la droite Δ d'équation réduite $y=2x-2$.
Pour le graphique, on prendra une demi-page et un centimètre ou un « gros » carreau pour unité graphique.
Le graphique sera complété au fur et à mesure.
1°) Tracer Δ.
2°) Soit A le point de Δ d'abscisse 1 et B le point de Δ d'ordonnée – 6.
Calculer l'ordonnée de A et l'abscisse de B.
3°) Soit Δ' la droite passant par le point C(2 ; 9) et de coefficient directeur – 3.
a) Tracer Δ' sur le même graphique que précédemment.
b) Déterminer l'équation réduite de Δ' par le calcul.
4°) Soit D le point de Δ' d'abscisse 3.
Calculer l'ordonnée de D.
5°) Quelle est la nature du quadrilatère ABOD ?

7 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère les droites Δ et Δ' d'équations réduites respectives $y=-2x+9$ et $y=x+3$.
La droite Δ coupe l'axe des ordonnées en un point A ; la droite Δ' coupe l'axe des abscisses en un point B ; les droites Δ et Δ' se coupent en un point C. On note D le point tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.
Faire une figure (on prendra un centimètre ou un « gros » carreau pour unité graphique).
Prendre une page complète pour faire la figure.

1°) Calculer les coordonnées de A, B, C.
2°) Calculer les coordonnées de D.
3°) Calculer les coordonnées du centre K du parallélogramme ABCD.

8 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A(– 3 ; – 1), B(3 ; 1) et C(4 ; – 2).

1°) Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice (on prendra un centimètre ou un « gros » carreau pour unité graphique).
2°) Calculer AB, AC et BC. Le triangle ABC est-il rectangle ?
3°) Soit D le point tel que ABCD soit un parallélogramme.
Calculer les coordonnées du point D.
4°) Soit E le symétrique de D par rapport à C.
Calculer les coordonnées de E.
5°) Tracer la droite Δ d'équation $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$.
6°) Quel est le coefficient directeur de Δ ?
7°) Déterminer par le calcul l'équation réduite de la droite (AD).
8°) Les droites (AD) et Δ sont-elles sécantes ? Si oui, on notera K le point d'intersection et on calculera ses coordonnées.
9°) Soit F le point de coordonnées (10 ; 3).
Les points A, B et F sont-ils alignés ?

9 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A(– 3 ; – 1), B(1 ; – 2) et C(0 ; – 7).
Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice (prendre le centimètre ou un « gros » carreau pour unité graphique).

1°) Déterminer par le calcul les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
2°) Déterminer l'équation réduite de la droite (AC)
3°) Déterminer par le calcul les coordonnées du point E, symétrique de D par rapport à C.
4°) Déterminer par le calcul l'ordonnée du point F de la droite (AC) d'abscisse – 1.
5°) Déterminer par le calcul les coordonnées de K, milieu du segment [AE].
6°) Démontrer que les points D, K, F sont alignés. Que représente F pour le triangle ADE ?
7°) Déterminer l'équation réduite de la droite (DF).
8°) La droite (DF) est-elle sécante à l'axe des abscisses ? Si oui donner les coordonnées du point d'intersection G.

10 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère la droite D d'équation $y = -\frac{x}{2} + 2$.
Faire un graphique que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice (prendre un centimètre ou un gros carreau pour unité graphique).

1°) Tracer D.
2°) La droite D coupe l'axe des abscisses en A et l'axe des ordonnées en B.
Calculer les coordonnées du milieu K de [AB].
3°) Déterminer une équation de la droite (OK).
4°) Donner une équation de la parallèle D' à (OK) passant par A.
En quel point la droite D' coupe-t-elle l'axe des ordonnées ?

11 Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on considère les points A(1 ; 4), B(5 ; 1) et C(– 1 ; – 3).

Faire un graphique que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.
Prendre un centimètre ou un « gros » carreau pour unité graphique.

1°) Calculer les coordonnées du milieu K du segment [BC]. Placer ce point K.
2°) Tracer la droite Δ parallèle à (AK) et qui passe par B.
Déterminer une équation de la droite Δ.

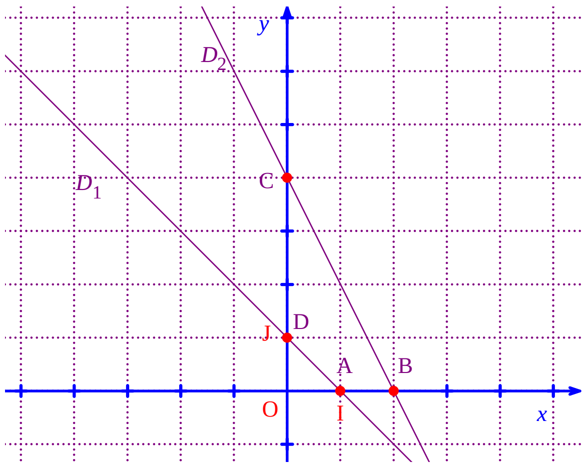
12 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A(– 1 ; 3), B(0 ; 1), C(3 ; 0), D(– 1 ; – 4).
1°) Déterminer l'équation réduite de chacune des droites (AB) et (CD).
2°) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont sécantes et déterminer par le calcul les coordonnées de leur point d'intersection K.

13 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A(– 1 ; 6), B(3 ; – 2) et C(– 5 ; 3).
1°) Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).
2°) Déterminer l'équation réduite de la droite Δ passant par C et parallèle à (AB).

Corrigé

1

1°)



On peut écrire les équations réduites des droites D_1 et D_2 sur le graphiques.

2°)

• Déterminons les coordonnées de A.

On sait que $y_A = 0$.
D'autre part, $y_A = 1 - x_A$ d'où $0 = 1 - x_A$ donc $x_A = 1$

Donc A(1 ; 0).

• Déterminons les coordonnées de B.

On sait que $y_B = 0$.
D'autre part, $y_B = 4 - 2x_B$ d'où $0 = 4 - 2x_B$ donc $x_B = 2$.

Donc B(2 ; 0).

• Déterminons les coordonnées de C.

On sait que $x_C = 0$.
D'autre part, $y_C = 4 - 2x_C$ d'où $y_C = 4 - 2 \times 0 = 4$ donc $y_C = 4$

Donc C(0 ; 4).

• Déterminons les coordonnées de D.

On sait que $x_D = 0$.
D'autre part, $y_D = 1 - x_D$ d'où $y_D = 1 - 0 = 1$.

D(0 ; 1)

3°) **Calculons l'aire du quadrilatère ABCD.**

Il n'y a pas de formule pour l'aire d'un quadrilatère quelconque.

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{OBC} - \mathcal{A}_{OAD}$$

$$\mathcal{A}_{OBC} = \frac{OB \times OC}{2}$$

OB et OC peuvent être données directement sans utiliser la formule de distance dans un repère orthonormé.

OB = 2 et OC = 4

Donc $\mathcal{A}_{OBC} = 4$ (unité d'aire sous-entendue)

$\mathcal{A}_{OAD} = 1$

$$\mathcal{A}_{ABCD} = 4 - 1$$
$$= 3$$

Autre façon :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ABCD} &= \mathcal{A}_{OBC} - \mathcal{A}_{OAD} \\ &= \frac{OB \times OC}{2} - \frac{OA \times OD}{2} = \frac{2 \times 4}{2} - \frac{1 \times 1}{2} \\ &= 4 - 0,5 \\ &= 3,5\end{aligned}$$

2 Il n'y a pas de calcul à faire : la droite D a pour coefficient directeur 3 et pour ordonnée à l'origine 1.
On place le point A(0 ; 1).
On décale d'une unité vers la droite (immuable) et on remonte de 3 unités vers le haut.

3 1°) La solution du système est le couple (– 1 ; – 2).

4 3°) b) $I\left(-\frac{45}{22} ; \frac{29}{22}\right)$

$\boxed{5}$ 1°) (AB) : $y=-\frac{5}{8}x+\frac{19}{8}$

2°) $K\left(1\,;\frac{7}{4}\right)$

Modèle de rédaction :

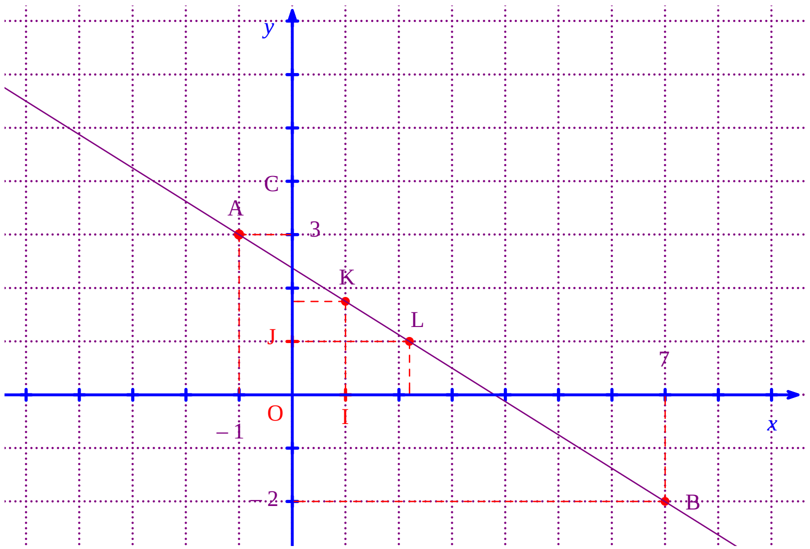
K $\in$ (AB) donc $y_K=-\frac{5}{8}x_K+\frac{19}{8}$ d'où $y_K=-\frac{5}{8}\times 1+\frac{19}{8}$ etc…

3°) $L\left(\frac{11}{5}\,;1\right)$

4°) $U\left(\frac{19}{5}\,;0\right)$; $y_V=\frac{19}{8}$ (ordonnée à l'origine de la droite (AB))

Solution détaillée :

A(– 1 ; 3) B(7 ; – 2)



1°) **Déterminons par le calcul l'équation réduite de la droite (AB).**

On a : $x_A \neq x_B$ donc (AB) admet une équation réduite de la forme $y=ax+b$ où a et b sont deux réels.

$$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$
$$=\frac{-2-3}{7+1}$$
$$=-\frac{5}{8}$$

L'équation réduite de (AB) s'écrit donc $y=-\frac{5}{8}x+b$.

On sait que A $\in$ (AB) d'où $y_A=-\frac{5}{8}x_A+b$ donc $\frac{5}{8}+b=3$ soit $b=\frac{19}{8}$.

On en conclut que l'équation réduite de (AB) s'écrit $y=-\frac{5}{8}x+\frac{19}{8}$.

2°) **Déterminons l'ordonnée du point K de (AB) tel que $x_K=1$.**

$$y_K=-\frac{5}{8}x_K+\frac{19}{8}$$
$$=\frac{14}{8}$$
$$=\frac{7}{4}$$

K a pour ordonnée $\frac{7}{4}$.

3°) **Déterminons l'abscisse du point L de (AB) tel que $y_L=1$.**

On a : $y_L=-\frac{5}{8}x_L+\frac{19}{8}$.

Donc $-\frac{5}{8}x_L+\frac{19}{8}=1$ soit $-\frac{5}{8}x_L=-\frac{11}{8}$ d'où $x_L=\dfrac{-\frac{11}{8}}{-\frac{5}{8}}=-\frac{11}{\cancel{8}}\times\left(-\frac{\cancel{8}}{5}\right)$.

Par suite, on a : $x_L=\frac{11}{5}$.

L a pour abscisse $\frac{11}{5}$.

4°) $\mathbf{(AB)\cap(Ox)=\{U\}}$ $\mathbf{(AB)\cap(Oy)=\{V\}}$

Déterminons l'abscisse de U et l'ordonnée de V.

On a : $y_U=0$ donc $-\frac{5}{8}x_U+\frac{19}{8}=0$ soit $-5x_L+19=0$ d'où $x_U=\frac{19}{5}$.

U a pour abscisse $\frac{19}{5}$.

On a : $x_V = 0$ donc $y_V = -\frac{5}{8} \times 0 + \frac{19}{8} = \frac{19}{8}$.

V a pour ordonnée $\frac{19}{8}$.

$\boxed{6}$

2°) A(1 ; 0) et B(– 2 ; – 6)
3°)
a) Tracé de Δ' :
On part du point C (puisque l'on sait que la droite Δ' passe par C).
On construit le vecteur $\vec{u}\,(1\,;\,-3)$.
b) Δ' : $y = -3x + 15$
4°) D(3 ; 6)
5°) $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} -3 \\ -6 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{DO}\begin{vmatrix} -3 \\ -6 \end{vmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DO}$

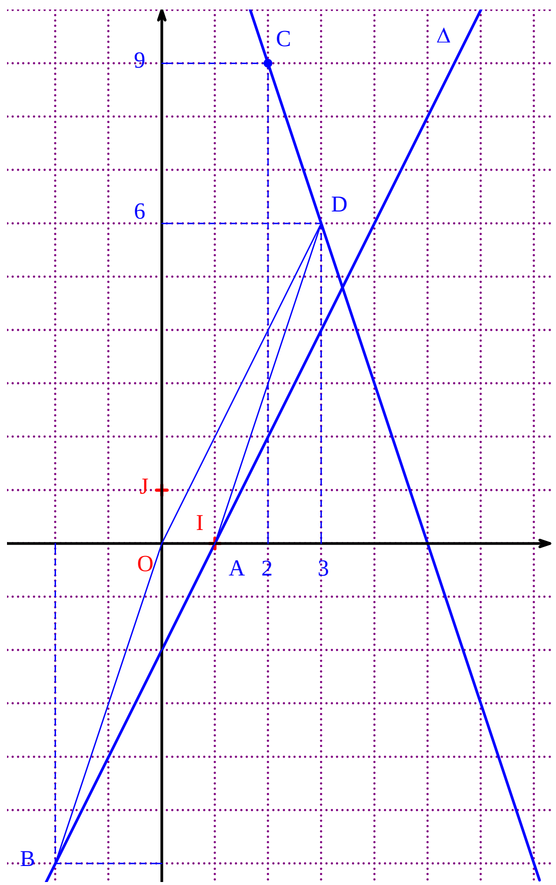
Donc le quadrilatère ABOD est un parallélogramme.

Solution détaillée :

1°) **Tracé de Δ**

Δ : $y = 2x - 2$

x	0	4
y	– 2	6



2°) **Déterminons l'ordonnée de A et l'abscisse de B.**

A $\in \Delta$ donc $y_A = 2x_A - 2$
$= 2 \times 1 - 2$
$= 0$

Donc l'ordonnée du point A est égale à 0.

A(1 ; 0)

B $\in \Delta$ donc $y_B = 2x_B - 2$ donc $2x_B - 2 = -6$ d'où $x_B = -2$
Donc l'abscisse du point B est égale à – 2.

B(– 2 ; – 6)

3°) b) **Déterminons l'équation réduite de Δ'.**

Δ' a pour coefficient directeur – 3 donc l'équation réduite de Δ' est de la forme $y = -3x + p$.

C $\in \Delta'$ donc $y_C = -3x_C + p$

$9 = -3 \times 2 + p$

$9 = -6 + p$

$p = 15$

Conclusion : l'équation réduite de Δ' s'écrit $y = -3x + 15$.

4°) **Calculons l'ordonnée de D.**

D $\in \Delta'$ donc $y_D = -3x_D + 15$

$= -3 \times 3 + 15$

$= 6$

Donc l'ordonnée de D est égale à 6.

D(3 ; 6)

5°) **Déterminons la nature du quadrilatère ABOD.**

$\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} x_B - x_A = -2 - 1 = -3 \\ y_B - y_A = -6 \end{vmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{DO} \begin{vmatrix} x_O - x_D = -3 \\ y_O - y_D = -6 \end{vmatrix}$

On a donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DO}$.

Par conséquent, le quadrilatère ABOD est un parallélogramme.

7 1°) A(0 ; 9) B(– 3 ; 0) C(2 ; 5)

2°) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$

D(5 ; 14)

3°) ABCD est un parallélogramme donc K est le milieu des diagonales.

En particulier, K est le milieu de [AC].

K(1 ; 7)

8 2°) $AB = 2\sqrt{10}$, $BC = \sqrt{10}$, $AC = 5\sqrt{2}$

3°) D(– 2 ; – 4)

5°) E(10 ; 0)

7°) Le coefficient directeur de Δ est égal à $\frac{1}{2}$.

8°) (AD) : $y = -3x - 10$

9°) (AD) et Δ n'ont pas le même coefficient directeur donc elles ne sont pas parallèles.

Par suite, elles sont sécantes en un point K.

$K\left(-\frac{19}{7} ; -\frac{13}{7}\right)$

10°) $\overrightarrow{AB}(6 ; 2)$ et $\overrightarrow{AF}(13 ; 4)$

$6 \times 4 - 2 \times 13 = -2 \neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}$ ne sont pas colinéaires d'où les points A, B, F ne sont pas alignés.

Voici d'« horribles » rédactions que m'avait écrites Victor Vergnory courant juillet 2013

- Calculons pour quelle valeur de x $(AD) = \Delta$.
- Calculons pour quelle valeur de x (AD) et Δ se croisent.
- Calculons pour quelles valeurs de x les équations réduites de (AD) et Δ sont égales.

Bonne tournure :

L'abscisse du point d'intersection de (AD) et de Δ est la solution de l'équation $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = -3x - 10$.

9 1°) D(– 4 ; – 6)

2°) (AC) : $y = -2x - 7$

3°) E (4 ; – 8)

4°) F(– 1 ; – 5)

5°) $K\left(\frac{1}{2} ; -\frac{9}{2}\right)$

6°) $\overrightarrow{DK}\left(\frac{9}{2} ; \frac{3}{2}\right)$ $\quad$ $\overrightarrow{DF}(3 ; 1)$ $\quad$ On utilise la colinéarité.

$x_{\overrightarrow{DK}} \times y_{\overrightarrow{DF}} - y_{\overrightarrow{DK}} \times x_{\overrightarrow{DF}} = 4,5 \times 1 - \frac{3}{2} \times 3 = 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires.

Comme ils ont un point commun, on en déduit que les points D, K, F sont alignés.

Le point K est le milieu du segment [AE] donc (DK) est une médiane du triangle ADE.

Le point C est le milieu du segment [DE] donc (AC) est une médiane du triangle ADE.

Or $F \in (AC)$ et $F \in (DK)$.

Donc F est le point d'intersection de deux médianes du triangle ADE.

On en déduit que F est le centre de gravité du triangle ADE.

7°) (DF) : $y = \frac{1}{3}x - \frac{14}{3}$

8°) (DF) a un coefficient directeur non nul donc (DF) n'est pas parallèle à l'axe des abscisses.

Donc (DF) coupe l'axe des abscisses en un point G.

G $\in$ (Ox) donc $y_G = 0$.

De plus, $G \in (DF)$ donc $y_G = \frac{1}{3}x_G - \frac{14}{3}$ d'où $0 = \frac{1}{3}x_G - \frac{14}{3}$.

On trouve $x_G = 14$.

G(14 ; 0)

10

2°) A(4 ; 0) B(0 ; 2) K(2 ; 1)

11 1°) K(2 ; – 1) 2°) (AK) : $y = -5x + 9$ 3°) $y = -5x + 26$

$\boxed{\textbf{12}}$

A(– 1 ; 3)   B(0 ; 1)   C(3 ; 0)   D(– 1 ; – 4).

1°) (AB) : $y = -2x + 1$;   (CD) : $y = x - 3$

2°) I$\left(\frac{4}{3} ; -\frac{5}{3}\right)$

$\boxed{\textbf{13}}$

A(– 1 ; 6) ; B(3 ; – 2) ; C(– 5 ; 3)

1°) (AB) : $y = -2x + 4$

2°) Δ : $y = -2x - 7$