1ère L Option
Contrôle du vendredi 22 mai 2009
(3 heures)

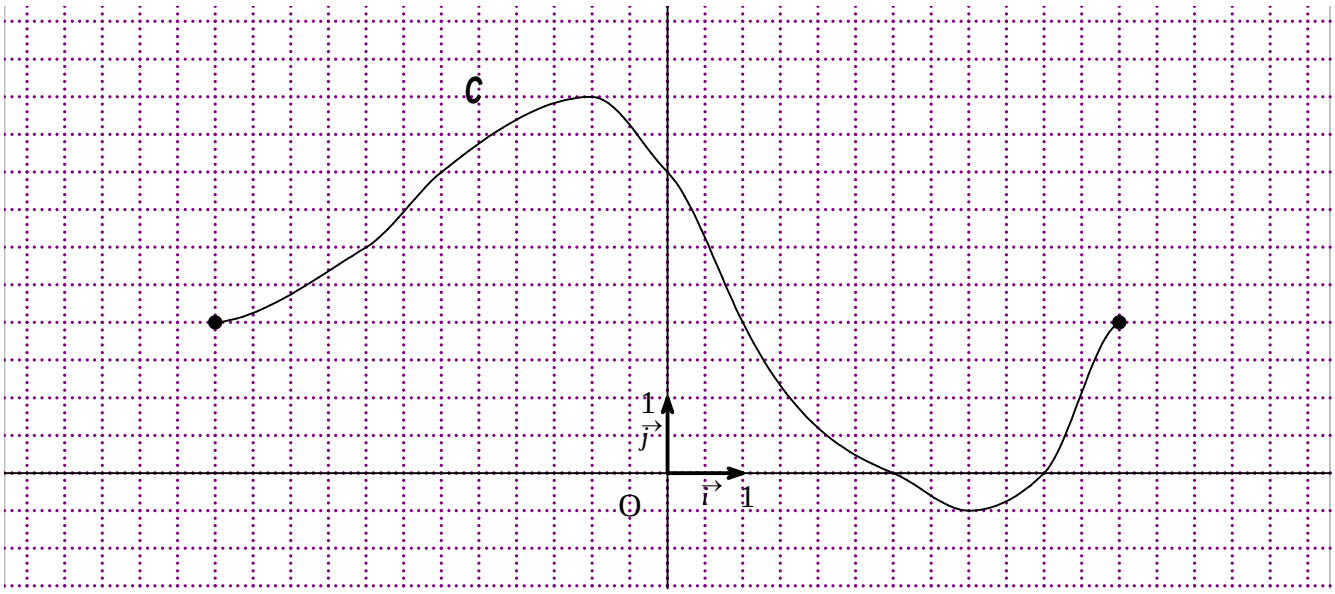
Le sujet comporte trois parties : fonctions, probabilités, arithmétique.
Il faut à peu près une heure pour traiter chaque partie.
Ces trois parties sont à rédiger sur <u>trois copies séparées</u>.

Chacune des copies doit être présentée avec un cartouche de présentation comprenant le nom, la date, et l'intitulé exact et <u>le numéro des exercices</u> permettant de faciliter le report des points au début de chaque copie.

La calculatrice est autorisée.
On soignera l'écriture et la présentation. Tous les résultats doivent encadrés <u>en rouge à la règle</u>.

1ère partie : Fonctions ; dérivées (20 points)

I. (5 points) On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction *f* définie et dérivable sur l'intervalle [– 6 ; 6] dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).



1°) Donner les images des nombres – 4 et 4 par *f*.
2°) Donner les antécédents par *f* de 0 et 2.
3°) Donner le tableau de variations de *f* sur [– 6 ; 6]. Utiliser la règle pour faire le tableau et les flèches.
4°) Recopier et compléter les phrases :

« L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$ est égal à : …….. . »

« L'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) \leq 0$ est égal à : …….. . »

II. (4 points) Dans chaque cas, calculer la dérivée de la fonction *f* dont on donne l'expression.
Donner le résultat directement sans détailler les calculs.

1°) $f(x) = 5x^2 - 2 + \frac{x}{2}$ 2°) $f(x) = \frac{x}{1+x}$ 3°) $f(x) = \frac{1+x}{x}$ 4°) $f(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x}$

III. (6 points) On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1°) Calculer $f'(x)$.

2°) Dresser un tableau comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.

Calculer l'extremum de f et compléter le tableau avec la valeur de cet extremum.

3°) Recopier et compléter le tableau de valeurs :

x	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$													

Sur un graphique, tracer le repère (O, I, J) <u>en prenant le centimètre pour unité de longueur</u>.
Placer les points du tableau de valeurs. Tracer $\mathcal{C}$ en reliant ces points « à la main ».
Vérifier sur calculatrice graphique.
Tracer la tangente horizontale.

4°) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 2. Tracer *T* sur le graphique précédent.

5°) Placer les points E(1 ; 1) et F(–1 ; –3) sur le graphique précédent.
Déterminer l'équation réduite de la droite (EF).

6°) La droite (EF) est la représentation graphique d'une fonction affine *g*.

Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = g(x)$.

Retrouver le résultat graphiquement.

IV. (5 points) On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 12x - x^3$.

1°) Calculer $f'(x)$; donner le résultat <u>sous une forme factorisée</u>.

2°) Dresser un tableau comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ (en détaillant bien) et les variations de *f*.

Calculer les extremums locaux de f et compléter le tableau de variations avec ces valeurs.
Décrire les variations de *f* à l'aide de phrases.

3°) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

2e partie : Probabilités (20 points)

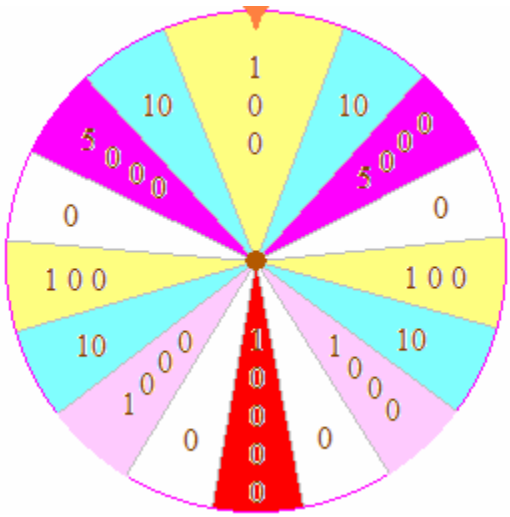
Donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

I. (4 points) On tire au hasard une bille dans une urne contenant 25 billes numérotées de 1 à 25.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « le numéro inscrit sur la bille est pair » ;
B : « le numéro inscrit sur la bille est un diviseur de 24 ».

II. (4 points) Une roue de loterie est partagée en 8 secteurs successifs numérotés de 1 à 8.
Quand on lance cette roue, elle tourne puis s'arrête librement devant un index triangulaire. On dit alors que le numéro du secteur pointé par l'index est le numéro sorti. On suppose que les numéros de même parité ont la même probabilité de sortir et les numéros pairs ont une probabilité de sortir égale au double de la probabilité de sortir des numéros impairs.

Calculer la probabilité de sortie de chaque numéro impair et de celle de chaque numéro pair.

III. (4 points) Voici à droite une roue de la fortune. L'heureux joueur sélectionné lance la roue et la somme gagnée est celle qui correspond à la couleur marquée par l'onglet supérieur lorsque la roue s'arrête. Toutes les tranches sont égales sauf une tranche de 100 € qui est double des autres. Les sommes gagnées sont indiquées. Si la roue s'arrête dans le blanc, on ne gagne rien mais mathématiquement c'est un gain : gain nul ! Le gain maximum est de 10 000 €.
On admet que toutes les positions d'arrêt de la roue ont la même probabilité de se réaliser.
Calculer la probabilité des événements suivants :
E_1 : « Le joueur a gagné au moins 100 € » ;
E_2 : « Le joueur a gagné moins de 1000 € » ;
E_3 : « Le joueur a gagné plus de 1000 € » ;
E_4 : « Le joueur n'a rien gagné ».



IV. (8 points) Un sac opaque contient 9 jetons numérotées de 1 à 9, indiscernables au toucher : c'est-à-dire que chaque jeton tiré du sac a la même probabilité d'apparaître.
En procédant à trois tirages successifs d'un jeton sans remettre le jeton précédemment tiré, on s'intéresse à la formation de nombres de 3 chiffres : le chiffre des centaines est le numéro du premier jeton tiré, le chiffre des dizaines est le second, le chiffre des unités est le dernier. Par exemple, si on sort le 8 puis le 1 puis le 4, on formera 814.
1°) Déterminer à l'aide d'un arbre que l'on se contentera d'esquisser au brouillon combien de nombres de trois chiffres il est possible d'obtenir en procédant à trois tirages successifs sans remise d'un jeton dans le sac.
2°) Louis a procédé à un tirage des trois jetons et s'étonne d'avoir tiré 1, 2, 3 dans cet ordre.
Quelle est donc la probabilité de tirer successivement trois chiffres consécutifs dans l'ordre croissant ou décroissant ?
3°) A quelle condition un nombre entier est-il divisible par 5 ?
Quelle est la probabilité de former un nombre divisible par 5 ?
4°) Questions bonus :
Quelle est la probabilité de former un nombre divisible par 9 ? de former un nombre divisible par 18 ?

3e partie : Arithmétique (20 points)

I. (3 points)

Recopier et compléter les phrases en remplaçant les pointillés par : « est » ou « n'est pas »
682 …… divisible par 76.
8 406 …… un multiple de 108.
16 …… un diviseur de 2 384.
2 384 ……. divisible par 16.
2 384 …….. un multiple de 16.
76 …….. un diviseur de 682.

II. (2 points) Un fleuriste a reçu 1 756 roses blanches et 1 317 roses rouges. Il désire utiliser toutes ces fleurs pour réaliser des bouquets identiques, c'est-à-dire comprenant un même nombre total de roses et la même répartition entre les roses blanches et les roses rouges.
1°) Quel sera le nombre maximum de bouquets identiques que ce fleuriste pourra réaliser ?
2°) Quel sera la composition de chaque bouquet ?

III. (2 points) Calculer le PGCD des nombres 42 et 65. En déduire que 42 et 65 sont premiers entre eux.

IV. (1 point) Dans une bibliothèque, il y a 360 livres qu'il faut ranger sur des étagères contenant 22 livres chacune.
Combien faut-il d'étagères pour ranger tous ces livres ?

V. (4 points) On pose N = $\overline{2x2x}^{(7)}$ avec $x \in \mathbb{N}$ et $0 \leq x \leq 6$.

1°) Dans cette question, on prend $x = 3$.
Donner l'écriture du nombre N dans la base 10.
2°) Dans cette question, x est un entier naturel quelconque tel que $0 \leq x \leq 6$.
a) Donner l'écriture de N dans la base 10 en fonction de x.
b) En utilisant le résultat de la question précédente que N est un multiple de 50.
3°) Démontrer que pour tout entier naturel x tel que $0 \leq x \leq 6$, le nombre N' = $\overline{1xx1}^{(7)}$ est un multiple de 8.

VI. (2 points)
1°) Ecrire le nombre 2693 en base 6.
2°) Ecrire le nombre 1000 en base 12.

VII. (2 points) Déterminer le PGCD de 1320 et 682 en utilisant leurs décompositions en facteurs premiers.

VIII. (1 point) La somme de quatre entiers naturels consécutifs est égale à 2010.
Quels sont ces entiers ?
On résoudra l'exercice au moyen d'une équation (aucune réponse trouvée par une autre méthode ne sera prise en compte).

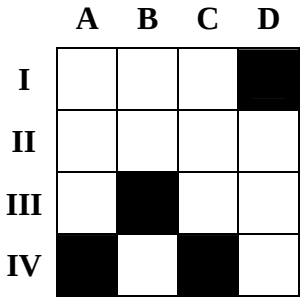
IX. (1 point) Soit n un entier naturel.
Démontrer que si n est impair, alors 8 divise $n^2 - 1$.

X. (1 point) Soit n un entier naturel.
Le nombre $1 + 3^n$ est-il pair ?

XI. (1 point) Soit x un entier tel que $0 \leq x \leq 9$.
Comment choisir x pour que $A = \overline{112x}^{(10)}$ soit divisible par 9 ?

Bonus

Nombres croisés
Recopier et compléter la grille avec les nombres que l'on découvrira grâce aux définitions.



Horizontalement

I : PGCD (125 ; 250).
II : Ce nombre est un multiple de 9.
III : Le chiffre des unités d'un nombre divisible par 9. Ce nombre est divisible par 5.
IV : Le reste de la division euclidienne de 121 par 8.
Le quotient dans celle de 245 par 112.

Verticalement

A : Le plus petit multiple de 24 à 3 chiffres.
B : Le quotient de la division euclidienne de 274 par 10. Diviseur commun à tous les entiers naturels.
C : PGCD (1 542 ; 3 598).
D : 3 est un diviseur de ce nombre.

Correction du contrôle
1ère L Option

1ère partie : Fonctions ; dérivées (20 points)

I. (5 points)

1°) $f(-4)=3$
L'image de – 4 par *f* est 3.
$f(4)=-0{,}5$
L'image de 4 par *f* est – 0,5.

2°) Les antécédents de 0 par *f* sont 3 et 5.
Les antécédents de 2 par *f* sont –6, 1 et 6.

3°) Tableau de variations de *f* sur [– 6 ; 6].

x	–6		–1		4		6
Variations de *f*	2	↗	5	↘	–1	↗	2

4°) L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)\leq 0$ est égal à : [3 ; 5].

Explication :
On cherche les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}$ pour lesquels l'ordonnée est négative ou nulle (c'est-à-dire situés en dessous ou sur l'axe des abscisses).

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x)\leq 0$ est égal à : [–1 ; 4].

Explication :
La dérivée est négative ou nulle lorsque la fonction *f* est décroissante.
Or la fonction *f* est décroissante sur l'intervalle [–1 ; 4].

II.

1°) $f'(x)=10x+\frac{1}{2}$ 2°) $f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ 3°) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ 4°) $f'(x)=2+\frac{1}{x^2}$

III. $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

1°) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme du second degré.

Pour tout réel x, on a : $f'(x) = -2x + 2$.

2°)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	–	
Variations de f		↗	4	↘	

3°)

x	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	–5	–2,25	0	1,75	3	3,75	4	3,75	3	1,75	0	–2,25	–5

4°) La tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 2 a pour équation : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$.

Or : $f(2) = 3$ et $f'(2) = -2 \times 2 - 2 = -6$.

Donc T a pour équation : $y = -6(x-2) + 3$ soit $y = -6x + 15$.

5°) La droite (EF) a pour équation réduite $y = ax + b$.
Le coefficient directeur a se calcule par la formule :

$$a = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{-3-1}{-1-1} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

L'ordonnée a l'origine b peut se lire graphiquement.

$b = 2$

(EF) a pour équation réduite $y = 2x - 1$.

6°) La droite (EF) est la représentation graphique de la fonction affine g définie par $g(x) = 2x - 1$.
L'équation $f(x) = g(x)$ est successivement équivalente aux équations suivantes :

$-x^2 + \cancel{2x} + 3 = \cancel{2x} - 1$
$-x^2 = -4$
$x^2 = 4$
$x = 2$ ou $x = -2$

Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont –2 et 2.

IV. $f(x) = 12x - x^3$.

1°) $f'(x) = 12 - 3x^2$

$f'(x) = 3(4 - x^2)$

$f'(x) = 3(2-x)(2+x)$

2°) Tableau de variations de *f*.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Signe de $2-x$		+		+	0	+	
Signe de $2+x$		–	0	+		+	
Signe de $f'(x)$		–	0	+	0	–	
Variations de *f*		↘	–16	↗	16	↘	

Calcul des extremums locaux de *f* :

$f(-2)=12\times(-2)-(-2)^3=-24+8=-16$
$f(2)=12\times 2-2^3=24-8=16$
On complète le tableau de variations avec ces valeurs.

La fonction f est décroissante sur les intervalles $]-\infty\ ;-2]$ et $[2\ ;+\infty[$.
La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-2\ ;2]$.

3°) L'équation $f(x)=0$ est successivement équivalente aux équations suivantes :

$12x-x^3=0$
$x(12-x^2)=0$
$x(\sqrt{12}+x)(\sqrt{12}-x)=0$
$x(2\sqrt{3}+x)(2\sqrt{3}-x)=0$
$x=0$ ou $x=-2\sqrt{3}$ ou $x=2\sqrt{3}$

Les solutions de l'équation sont 0, $-2\sqrt{3}$ et $2\sqrt{3}$.

Barème retenu pour la 1ère partie

I. 5 points pour les questions 1°) à 4°).

II. 4 points

III.

1°) 1
2°) 2
3°) 2
4°) 1

(5° et 6° non comptés)

IV. 1°) 2
2°) 3
3°) non compté

2e partie : Probabilités (20 points)

I. (4 points)

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité.

Il y a 12 numéros pairs.

$P(\mathrm{A}) = \frac{12}{25}$

Il y a 8 diviseurs de 24 : 1 ; 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24 (qu'il ne faut pas oublier).

$P(\mathrm{B}) = \frac{8}{25}$.

II. Soit x la probabilité d'obtenir un numéro impair.
La probabilité d'obtenir un numéro pair est égale à $2x$.

La somme des probabilités de tous les résultats est égale à 1.
On a : $2x \times 4 + 4x = 1$ soit $12x = 1$ d'où $x = \frac{1}{12}$.

La probabilité d'obtenir un numéro impair est égale à $\frac{1}{12}$.
La probabilité d'obtenir un numéro pair est donc égale à $2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$.

III. Attention à la case 100 qui compte double.

$P(\mathrm{E}_1) = \frac{9}{17}$; $P(\mathrm{E}_2) = \frac{12}{17}$; $P(\mathrm{E}_3) = \frac{3}{17}$; $P(\mathrm{E}_4) = \frac{4}{17}$

IV. (8 points)
Dans tout l'exercice, nous sommes dans un cas d'équiprobabilité.

1°) Il est possible d'obtenir 9×7×6 = 504 nombres de trois chiffres en procédant à trois tirages successifs sans remise d'un jeton dans le sac.
2°) On considère l'événement E : « tirer successivement trois chiffres consécutifs dans l'ordre croissant ou décroissant ».

Il y a 14 résultats possibles pour l'événement E :
(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6), (5, 6, 7), (6, 7, 8), (7, 8, 9)
(9, 8, 7), (8, 7, 6), (7, 6, 5), (6, 5, 4), (5, 4, 3), (4, 3, 2), (3, 2, 1).

Donc $P(\mathrm{E}) = \frac{14}{504} = \frac{1}{36}$

3°) Un nombre entier est divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5.
Soit F l'événement : « former un nombre divisible par 5 ».
Le nombre de résultats possibles pour F est égal à 56.

Donc $P(\mathrm{F}) = \frac{56}{504} = \frac{1}{9}$

4°) Questions bonus :

Quelle est la probabilité de former un nombre divisible par 9 ? de former un nombre divisible par 18 ?

3e partie : Arithmétique

I. (6 points)

8 406 n'est pas un multiple de 108.
16 n'est pas un diviseur de 2 384.
2 384 est divisible par 16.
2 384 est un multiple de 16.
76 n'est pas un diviseur de 682.

II. (4 points)
1°)
$\mathrm{PGCD}(1756\,;1317) = 439$ (on peut par exemple utiliser l'algorithme d'Euclide)
Le nombre maximum de bouquets identiques que ce fleuriste pourra réaliser est de 439.
2°) $\frac{1756}{439} = 4$ et $\frac{1317}{439} = 3$

Chaque bouquet sera composé de 4 roses blanches et 3 roses rouges.

III. (2 points)

$\mathrm{PGCD}(42\,;65) = 1$ (on peut par exemple utiliser l'algorithme d'Euclide).
Deux nombres sont premiers entre eux si et seulement si leur PGCD est égal à 1.
Donc 42 et 65 sont premiers entre eux.

IV. (1 point)

On effectue la division euclidienne de 360 par 22.
$360 = 16 \times 22 + 8$

Il faut donc 17 étagères pour ranger tous les livres.

Autre méthode : on effectue une division décimale.

$\frac{360}{22} = 16{,}36...$

Cette méthode est moins satisfaisante que la méthode par division euclidienne.

V. (4 points) On pose N = $\overline{2x2x}^{(7)}$ avec $x \in \mathbb{N}$ et $0 \leq x \leq 6$.

1°) Dans cette question, on prend $x = 3$.

$\overline{2323}^{(7)} = 3\times 7^0 + 2\times 7^1 + 3\times 7^2 + 2\times 7^3 = 3+14+147+686 = 850$

Donc : $\overline{2323}^{(7)} = \overline{850}^{(10)}$

2°)

a) $\mathrm{N} = x\times 7^0 + 2\times 7^1 + x\times 7^2 + 2\times 7^3$
$\mathrm{N} = x+14+49x+686$
$\mathrm{N} = 50x+700$

b) On peut écrire en factorisant : $\mathrm{N} = 50(x+14)$.

Or $x \in \mathbb{N}$ donc $(x+4) \in \mathbb{N}$; par suite, N est un multiple de 50.

3°) En adoptant la méthode que précédemment, on peut écrire :

$\mathrm{N}' = 1\times 7^0 + x\times 7^1 + x\times 7^2 + 1\times 7^3$
$\mathrm{N}' = 1+7x+49x+343$
$\mathrm{N}' = 50x+700$
$\mathrm{N}' = 56x+344$
$\mathrm{N}' = 8(7x+43)$

Donc on en déduit que N’ est un multiple de 8.

VI. (2 points)

1°) $2693 = 6\times 448+5$
$448 = 6\times 74+4$
$74 = 6\times 12+2$
$12 = 6\times 2+0$
$2 = 6\times 0+2$ (on s’arrête ici car le quotient est nul)

On utilise les restes obtenus dans les différentes divisions euclidienne par 6.

Ainsi on peut écrire : $\overline{2693}^{(10)} = \overline{20245}^{(6)}$.

2°) $1000 = 12\times 83+4$
$83 = 12\times 6+11$
$6 = 12\times 0+6$ (on s’arrête ici car le quotient est nul)

$\overline{1000}^{(10)} = \overline{6\beta 4}^{(12)}$

VII. (2 points)

$1320 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 11$
$682 = 2 \times 11 \times 31$

PGCD(1320 ; 682) = 22.

VIII. (1 point)

Choix de l'inconnue :

Soit x le plus petit des quatre entiers naturels cherchés.

Mise en équation :

On a : $x + (x+1) + (x+2) + (x+3) = 2010$

Résolution de l'équation :

$4x = 2010 - 6$
$x = \frac{2004}{4}$
$x = 501$

Conclusion :

Les entiers cherchés sont : 501, 502, 503 et 504.

On peut effectuer la vérification.

IX. (1 point)

Si n est impair, alors $n = 2p + 1$ où p est un entier naturel.
$n^2 - 1 = (2p+1)^2 - 1 = 4p^2 + 4p = 4p(p+1)$
Or le produit $p(p+1)$ est pair donc $p(p+1) = 2q$.

Par suite $n^2 - 1 = 8q$
On en déduit que 8 divise $n^2 - 1$.

X. (1 point)

3 est un nombre impair donc pour tout entier naturel n, 3^n est impair.
Comme 1 est impair, on en déduit que le nombre $1 + 3^n$ est pair car la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

XI. (1 point) Un entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres en base 10 est divisible par 9.

Donc $1+1+2+x$ doit être égal à 1, 3, 6 ou 9.
Il ne peut qu'être égal à 6 ou à 9.
$1+1+2+x=6$ pour $x=2$.
$1+1+2+x=9$ pour $x=5$.

Bonus

	A	B	C	D
I	1	2	5	
II	2	7	1	8
III	0		4	0
IV		1		9