$1^{\text{ère}}$ L Option

Arithmétique (4)
Systèmes de numération
Bases

On dit que nous sommes entrés dans « l'ère du numérique ». Sous cette expression, il y a la notion de nombre, omniprésente à l'époque actuelle.

Objectifs :

- fournir quelques éléments pour mieux comprendre le monde des nombres.
- compter dans une base autre que 10.

On est alors obligé de remonter aux sources de la base 10.

I. Activités d'introduction

1°) Entourer les paquets de 4 parmi la collection d'objets ci-dessous.

× ×

× ×

× ×

× ×

× × × × × × × × × × × × × × × ×

×

2°) Recommencer avec des paquets de 5.

3°) Qu'est-ce que compter en base 10 ?

Compter en base 10, c'est faire des paquets de 10.

4°) Compter en base en base 5.

Addition et soustraction en base 5.
Multiplication en base 5.

5°) Taper « histoire de chiffres.free.fr » Qu'est-ce qu'une base ? Exemples de bases : 2, 3, 5, 10 etc.

A quoi sert une base ?

Autres systèmes de numération ; voir chapitre spécial sur les numérations romaine, grecque, égyptienne, Maya.

II. Système décimal

1°) Principe de la décomposition en base 10

Tout nombre s'écrit dans le **système décimal** ou **système de base 10** avec les 10 chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Cette écriture fait intervenir les puissances successives de 10.

2°) Exemple

1 234 est formé de 4 unités, 3 dizaines, 2 centaines et un millier soit : $1\,234 = 4 + 3 \times 10 + 2 \times 10^2 + 1 \times 10^3$.

3°) Décomposition d'un entier naturel en base 10

Tout nombre N s'écrira dans le système décimal sous la forme :
$N = a_0 + a_1 \times 10 + a_2 \times 10^2 + ... + a_n \times 10^n$ où a_0, a_1 ... a_n sont des chiffres compris entre 0 et 9.

III. Passage d'une base donnée à la base 10

● **Dans le système de base 2, les deux chiffres utilisés sont 0 et 1.**

Le nombre $\overline{10011}^{(2)}$ (qui se note aussi $(10011)_2$ ou $10011_{(2)}$ ou 10011 en base 2) s'écrit dans le système décimal à l'aide des puissances successives de 2 :
$\overline{10011}^{(2)} = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^4 = 1 + 2 + 16 = 19$.

Deux remarques :

● On part de « derrière » pour écrire les puissances de 2 dans l'ordre croissant.

● $2^0 = 1$ (conventionnellement, tout nombre non nul élevé à la puissance 0 est égal à 1).

Le nombre qui s'écrit 10011 en base 2 est égal au nombre qui s'écrit 19 en base 10.

● **Dans le système de base 3, les trois chiffres utilisés sont 0, 1 et 2** ; tout nombre s'écrit avec les puissances successives de 3.

Le nombre $\overline{2102}^{(3)}$ est égal dans le système décimal à :
$\overline{2102}^{(3)} = 2 \times 3^0 + 0 \times 3^1 + 1 \times 3^2 + 2 \times 3^3 = 2 + 0 + 9 + 54 = 65$.

Rappel : $3^0 = 1$.

● **Dans le système de base 12,** on doit utiliser 12 « chiffres » :
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α et β α et β désignant 10 et 1l.

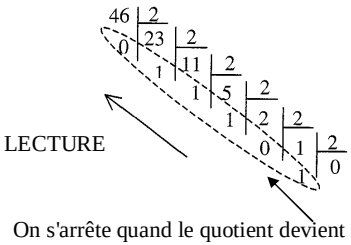
$\overline{9\beta l\alpha 3}^{(12)}$ vaut dans le système décimal :

$$\begin{aligned}\overline{9\beta l\alpha 3}^{(12)} &= 3 \times 12^0 + 10 \times 12^1 + 1 \times 12^2 + 11 \times 12^3 + 9 \times 12^4.\\ &= 3 + 120 + 144 + 19008 + 186624\\ &= 205\,899\end{aligned}$$

IV. Passage de la base 10 à une base donnée

1°) Exemple 1

Pour écrire le nombre décimal 46 en base 2, on effectue les divisions successives par 2 présentées de la façon suivante :

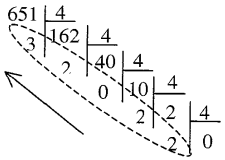


On s'arrête quand le quotient devient nul.
On trouve alors $46 = 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5$.

Le nombre cherché est formé de tous les restes obtenus en partant du dernier : $\overline{46}^{(10)} = \overline{101110}^{(2)}$

2°) Exemple 2

En base 4, le nombre décimal 651 devient :



$651 = 3 \times 4^0 + 2 \times 4^1 + 0 \times 4^2 + 2 \times 4^3 + 2 \times 4^4$

$\overline{651}^{(10)} = \overline{22023}^{(4)}$

3°) Méthode générale (algorithme)

On donne un entier naturel *N* écrit en base 10.

Pour déterminer l'écriture un nombre en base *a* où *a* est un entier supérieur ou égal à 2, on utilise un principe de divisions euclidiennes successives qui consiste à diviser chaque fois le quotient obtenu par *a*.

On s'arrête lorsque l'on obtient un quotient égal à 0 (arrêt de l'algorithme).

4°) Autre explication

- L'algorithme de changement d'une écriture en base 10 à une écriture en base *b*.

- Effectuer la division euclidienne du nombre qu'on veut modifier par la nouvelle base *b*. Le reste donne la valeur du premier chiffre ?

- Effectuer la division euclidienne du quotient par b ? Le reste donne la valeur du second chiffre… etc…

- On répète cette opération jusqu'à l'obtention d'un quotient nul.

Exemple :

Quelle est l'écriture de 1751 en base 3 ?

1751	3
25	583
11	
2	

583	3
28	194
13	
1	

194	3
14	64
2	

64	3
4	21
1	

21	3
0	7

7	3
1	2

2	3
2	0

L'écriture de 1751 en base 3 est : $\overline{2101212}^{(3)}$.

Avec moins de symboles, l'écriture du nombre est beaucoup plus longue.

4°) Remarque

Cette méthode pour décomposer un nombre écrit en base 10 est un algorithme qui peut être programmé sur tableur.

V. Algorithme

Qu'est ce qu'un algorithme en langage naturel ?

Problème à résoudre : **donner l'écriture d'un entier naturel en base 8.**	
Première proposition J'effectue la division euclidienne de N par 8. J'obtiens un quotient Q et un reste que je mets de côté. Je recommence avec Q. J'obtiens un autre quotient et un autre reste et ainsi de suite. Tous les restes obtenus sont les chiffres de l'écriture de N en base 8.	**Commentaires :** Cette proposition est une simple description qui montre qu'une stratégie est en cours d'élaboration mais ce n'est pas un algorithme. Il manque en particulier - les entrées - une définition précise du traitement qui doit être réitéré - de savoir à qui ce traitement doit être appliqué (après Q, qu'y a-t-il ???) - de savoir si le traitement va se terminer.
Seconde proposition ● **Entrée :** Choisir N un entier naturel écrit en base 10. Affecter à A la valeur N. ● **Traitement :** Procédure : On effectue la division euclidienne de A par 8. On obtient un quotient et un reste. On affecte à A la valeur de ce quotient et on garde ce reste (qui est l'un des chiffres de l'écriture recherchée). Réitérer cette procédure tant que le contenu de A n'est pas nul. ● **Sortie :** L'écriture de N en base 8 s'obtient en disposant de droite à gauche tous les restes dans l'ordre où ils ont été obtenus.	Exemple d'algorithme en **langage naturel**. Sont incontournables : ● la définition de A auquel on applique le traitement ● le test d'arrêt (on ne va pas réitérer le traitement indéfiniment)

Objectif de cet algorithme : on peut le programmer.

Trouvé sur un document Power Point

Avec une **calculatrice** type TI 82 ou 83 (l'écriture d'un tel programme ne sera pas exigible au baccalauréat)

```
PROGRAMM : BASE
: Prompt B, N
: 1 → Q
: While Q > 0
: Int(N/B) → Q
: N – Q * B → R
: Disp "R =", R
: Pause
: Q → N
: End
```

Recherche à faire absolument sur wikipedia : « Système binaire »

- Site Internet assez bien sur les bases : http://serge.mehl.fr

- Cherchez sur WIKIPEDIA : DIOPHANTE (inscription sur sa tombe).

Lectures complémentaires :

- Le monde du numérique (article)

- Chercher un convertisseur en binaire sur Internet

- Recherche sur Google, sur l'histoire des nombres.

- Taper « Histoire des nombres », « histoire des chiffres » sur Google.
www.math93.com/histoire-nombres.htm : très bon tableau synoptique

- Histoire des chiffres au collège Jean Monnet : très, très bon site

- GERMEA (groupements de professeurs de Pau)