TS3 **Devoir pour le lundi 12 avril 2010**

I. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \int_1^2 \mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t$. On ne cherchera pas à calculer u_n.

1°) Démontrer que, si $t \geq 1$, alors $0 \leq \mathrm{e}^{-nt^2} \leq \mathrm{e}^{-nt}$. On utilisera la méthode des encadrements successifs.

2°) En déduire que $0 \leq u_n \leq \dfrac{\mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-2n}}{n}$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

II. Démontrer que, pour tout réel $x \in \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a : $1 \leq \sqrt{1+\sin x} \leq \sqrt{2}$.

En déduire un encadrement de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin x}\ \mathrm{d}x$.

Utiliser *Geogebra* pour tracer courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2+\sin x}$.
Dans Saisie, taper Intégrale[f,0,pi/2] puis taper sur *Entrée*.
Lire la valeur approchée qui s'affiche et contrôler qu'elle est cohérente avec l'encadrement déterminé précédemment.

III. On se propose de calculer de deux façons différentes l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos x\ \mathrm{d}x$.

On justifiera brièvement l'existence de l'intégrale.

1°) **1ère méthode :** à l'aide de deux intégrations par parties (on pensera à changer les lettres !)

a) Démontrer que l'on a : $\mathrm{I} = -\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x\ \mathrm{d}x$.

b) A l'aide d'une deuxième intégration par parties, démontrer que l'on a : $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\pi} + 1 + \mathrm{I}$.

c) En déduire I.

2°) **2e méthode :** par primitive

a) Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $F : x \mapsto \mathrm{e}^x\left(a \cos x + b \sin x\right)$ soit une primitive de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x \cos x$.
b) En déduire I.

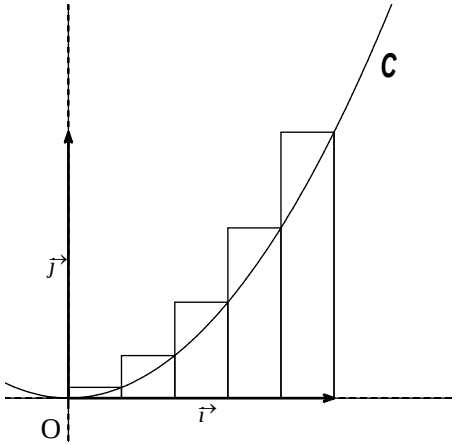
IV. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

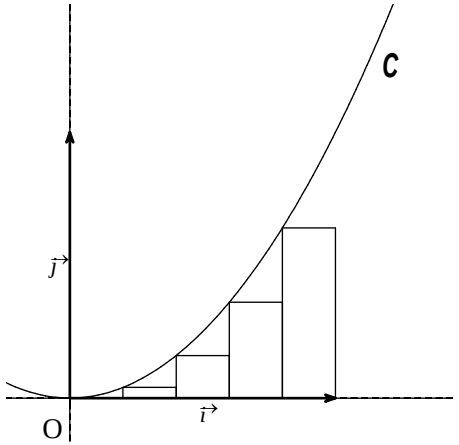
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On s'intéresse à l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle [0 ; 1] (de manière évidente, f est continue et positive sur $\mathbb{R}$).

1°) Dans cette question, on cherche un encadrement de l'aire en utilisant la méthode des rectangle.

On effectue une subdivision régulière de l'intervalle [0 ; 1] en 5 intervalles de longueur $\dfrac{1}{5}$.

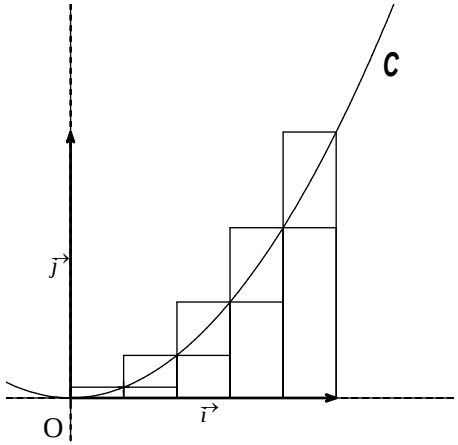
Colorier les rectangles sur les figures ci-dessous.





Calculer la somme des aires des rectangles inférieurs puis la somme des aires des rectangles supérieurs.

En déduire un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$.



2°) Calculer la valeur exacte de $\boldsymbol{A}$.
Comparer le résultat obtenu avec l'encadrement précédent.

Pour aller plus loin…

Visualisation de la somme des aires des rectangles inférieurs et supérieurs pour une courbe avec *Geogebra*

Tracer la courbe représentative de la fonction *f*.

Dans *Saisie*, taper Intégrale[f,0,1] puis taper sur *Entrée*.
A quoi correspond le nombre qui s'affiche ?

Revenir à la figure initiale.

Dans *Saisie*, taper SommeInférieure[f,0,1,5] puis taper sur *Entrée*.
Observer la figure.

Dans *Saisie*, taper SommeSupérieure[f,0,1,5] puis taper sur *Entrée*.
Observer la figure.

Revenir à la figure initiale.

Faire afficher 20 rectangles supérieurs et inférieurs.

Revenir à la figure initiale.
On désire observer ce qui se passe quand le nombre de rectangles inférieurs augmente.

Définir un paramètre réel *a* à l'aide du bouton Curseur (6e colonne de boutons en partant de la gauche).
Il faut cliquer à un endroit quelconque de la figure.
Dans Intervalle, choisir 0 pour minimum, 50 pour maximum et 1 pour incrément.

Dans *Saisie*, taper SommeInférieure[f,0,1,a] puis taper sur *Entrée*.
Changer la valeur de *a* à l'aide du curseur. Pour cela, cliquer sur le bouton *Déplacer* (1er bouton en partant de la gauche) puis retourner sur le curseur en cliquant dessus.

Observer ce qui se passe.

Recommencer avec les sommes supérieures.

TS3 **Correction du devoir pour le 12 avril 2010**

I.

1°) D'une part, si $t \geq 1$, alors $t^2 \geq t$ d'où $-nt^2 \leq -nt$ donc $\mathrm{e}^{-nt^2} \leq \mathrm{e}^{-nt}$.

D'autre part, le résultat d'une exponentielle est toujours strictement positif.

Donc si $t \geq 1$, alors $0 \leq \mathrm{e}^{-nt^2} \leq \mathrm{e}^{-nt}$.

2°) Par croissance de l'intégrale, on a : $\displaystyle\int_1^2 0 \ \mathrm{d}t \leq \int_1^2 \mathrm{e}^{-nt^2} \ \mathrm{d}t \leq \int_1^2 \mathrm{e}^{-nt} \ \mathrm{d}t$

Donc $0 \leq u_n \leq \left[-\dfrac{\mathrm{e}^{-nt}}{n}\right]_1^2$ soit $0 \leq u_n \leq \dfrac{\mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-2n}}{n}$.

$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-2n}}{n} = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

II.

Pour tout réel $x \in \left[0 \ ; \ \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a : $0 \leq \sin x \leq 1$

donc $1 \leq 1 + \sin x \leq 2$

d'où $1 \leq \sqrt{1 + \sin x} \leq \sqrt{2}$.

Par croissance de l'intégrale, on a : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \ \mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin x} \ \mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \ \mathrm{d}x$.

L'intégrale d'une fonction constante est égale à la constante que multiplie la différence des bornes.

On obtient l'encadrement : $\displaystyle\frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin x} \ \mathrm{d}x \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

III. $\displaystyle \mathrm{I} = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos x \ \mathrm{d}x$.

Existence de l'intégrale :

La fonction f : $x \mapsto \mathrm{e}^x \cos x$ est définie et continue sur l'intervalle [0 ; π].

1°) **1ère méthode :** à l'aide de deux intégrations par parties

a)

$u_1(x) = \mathrm{e}^x$; $u'_1(x) = \mathrm{e}^x$

$v'_1(x) = \cos x$; $v_1(x) = \sin x$

$\displaystyle \mathrm{I} = \left[\mathrm{e}^x \sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x \ \mathrm{d}x = -\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x \ \mathrm{d}x$

b) $u_2(x) = \mathrm{e}^x$; $u'_2(x) = \mathrm{e}^x$

$v'_2(x) = \sin x$; $v_2(x) = -\cos x$

$\displaystyle \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x \ \mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^x \cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left(-\mathrm{e}^x\right) \cos x \ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\pi} + 1 + \mathrm{I}$.

c) On a : $\mathrm{I} = -\left(\mathrm{e}^{\pi} + 1 + \mathrm{I}\right)$ donc $\mathrm{I} = -\dfrac{\mathrm{e}^{\pi} + 1}{2}$.

2°) **2e méthode :** par primitive

a) $F'(x) = \mathrm{e}^x\left(a \cos x + b \sin x\right) + \mathrm{e}^x\left(-a \sin x + b \cos x\right)$

$F'(x) = \mathrm{e}^x\left[(a+b)\cos x + (b-a)\sin x\right]$

Pour que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$, il suffit de choisir a et b tels que $\begin{cases} a + b = 1 \\ b - a = 0 \end{cases}$ soit $a = b = \dfrac{1}{2}$.

b) $\mathrm{I} = F(\pi) - F(0) = -\dfrac{\mathrm{e}^{\pi} + 1}{2}$

IV.

1°) $\dfrac{6}{25} \leqslant \boldsymbol{A} \leqslant \dfrac{11}{25}$

$0,24 \leqslant \boldsymbol{A} \leqslant 0,44$

La **méthode des rectangles** est une méthode de **calcul approché** d'une intégrale (dans le cadre « calcul approché, calcul exact »).

2°) $\displaystyle \boldsymbol{A} = \int_0^1 t^2 \ \mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$