Exercices sur les déterminants

1 On pose $A=\begin{pmatrix} a-5 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & a-4 \\ 3 & a-3 & 3 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

Calculer le déterminant de A en fonction de a.
En déduire pour quelles valeurs de a la matrice A est inversible.

2 Pour tout entier naturel p, on note $\mathrm{D}(p)$ l'ensemble des diviseurs positifs de p.

Pour tout couple $(i,\ j)$ d'entiers naturels, on pose $\lambda_{i,\,j}=1$ si $i\in\mathrm{D}(j)$ et $\lambda_{i,\,j}=0$ si $i\notin\mathrm{D}(j)$.

On considère une application f de $\{1, 2, \dots, n\}$ $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ dans $\mathbb{C}$.

On note $A=\left(a_{i,\,j}\right)$, $B=\left(b_{i,\,j}\right)$ et $C=\left(c_{i,\,j}\right)$ les matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ définies par $a_{i,\,j}=\displaystyle\sum_{k\in\mathrm{D}(i)\cap\mathrm{D}(j)} f(k)$,

$b_{i,\,j}=\lambda_{j,i}$ et $c_{i,\,j}=\lambda_{i,\,j}\,f(i)$.

Démontrer que $A=BC$; en déduire $\det A$.

Applications :

Calculer le déterminant de la matrice $M=\left(m_{i,\,j}\right)$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dans chacun des cas suivants :

1^er^ cas : $m_{i,\,j}=$ nombre de diviseurs positifs communs à i et j ;

2^e^ cas : $m_{i,\,j}=$ somme des diviseurs positifs communs à i et j ;

3^e^ cas : $m_{i,\,j}=\mathrm{PGCD}(i,\,j)$.

Pour le 3^e^ cas, on utilisera la fonction indicatrice d'Euler $\varphi:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ définie par $\varphi(n)=\mathrm{card}\left\{k\in\mathbb{N}\,/\,k\wedge n=1\right\}$.

On rappelle que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on a $n=\displaystyle\sum_{d\,|\,n}\varphi(d)$.

2bis Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $\mathbb{N}$.

Pour tout couple $(i,\ j)$ d'entiers naturels, on pose $\lambda_{i,\,j}=1$ si $i\,\mathcal{R}\,j$ et $\lambda_{i,\,j}=0$ sinon.

On considère une application f de $\{1, 2, \dots, n\}$ $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ dans $\mathbb{C}$.

On note $A=\left(a_{i,\,j}\right)$, $B=\left(b_{i,\,j}\right)$ et $C=\left(c_{i,\,j}\right)$ les matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ définies par $a_{i,\,j}=\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ k\,\mathcal{R}\,i \\ k\,\mathcal{R}\,j}} f(k)$, $b_{i,\,j}=\lambda_{j,i}$ et

$c_{i,\,j}=\lambda_{i,\,j}\,f(i)$.

Démontrer que $A=BC$; en déduire $\det A$.

Applications :

Calculer le déterminant de la matrice $M=\left(m_{i,\,j}\right)$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dans chacun des cas suivants :

1^er^ cas : $m_{i,\,j}=$ nombre de diviseurs positifs communs à i et j ;

2^e^ cas : $m_{i,\,j}=$ somme des diviseurs positifs communs à i et j ;

3^e^ cas : $m_{i,\,j}=\mathrm{PGCD}(i,\,j)$.

3 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On pose $E=\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1°) Soit $A\in E$.

Démontrer que, si pour tout $X\in E$ on a $\det(A+X)=\det X$, alors $A=0$.

Indication : On note r le rang de A. Utiliser le fait qu'il existe un couple $(P,Q)\in\left(\mathbb{GL}_n(\mathbb{R})\right)^2$ tel que $A=PJ_rQ$ où $J_r=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ (matrice écrite par blocs où les 0 désignent des matrices).

2°) Soit $(A,B)\in E^2$.

Démontrer que si pour tout $X\in E$ on a $\det(A+X)=\det(B+X)$, alors $A=B$.

4 **Déterminant d'une matrice compagnon**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Soit a_0, a_1, a_2, … a_{n-2}, a_{n-1} n réels et x un réel. On considère le polynôme $P=\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}a_pX^p$.

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} -x & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & -x & \ddots & & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -x & 0 & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & -x & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{vmatrix}$ (déterminant d'ordre n) en fonction de $P(x)$.

Indication : Effectuer l'opération $\mathrm{L}_1\leftarrow\mathrm{L}_1+x\mathrm{L}_2+x^2\mathrm{L}_3+\ldots+x^{n-1}\mathrm{L}_n$.

5 On pose $E=\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

1°) Soit A une matrice de E dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 2.

Démontrer que le déterminant de A est un entier relatif et est divisible par 2^n.

2°) Soit B une matrice de E dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou à – 1.

Démontrer que le déterminant de B est un entier relatif et est divisible par 2^{n-1}.

6 On suppose qu'il existe deux matrices A et B de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (n étant un entier naturel non nul) telles que $\mathrm{AB}+\mathrm{BA}=0$.

Démontrer que n est pair.

7 Soit $\left(x_1\,;x_2\,;\ldots;x_n\right)$ et $\left(y_1\,;y_2\,;\ldots;y_n\right)$ deux familles de n réels (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1).

On considère la matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \ldots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \ldots & x_2y_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \ldots & 1+x_ny_n \end{pmatrix}$.

Démontrer que l'on a : $\det\mathrm{A}=1+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$.

Indication :

On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel.

On note $B=\left(e_1\,;e_2\,;\ldots;e_n\right)$ la base canonique de et l'on pose $u=\left(x_1\,;x_2\,;\ldots;x_n\right)$.

Écrire $\det\mathrm{A}=\det_B\left(e_1+y_1u\,;e_2+y_2u\,;\ldots;e_n+y_nu\right)$ et utiliser la multilinéarité du déterminant.

$\boxed{8}$ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout entier naturel k compris entre 1 et n au sens large, on pose $S_k = \sum_{i=1}^{k} i$.

Calculer $D = \begin{vmatrix} S_1 & \cdots & \cdots & S_1 \\ \vdots & S_2 & \cdots & S_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_n \end{vmatrix}$.

Voir exercice $\boxed{16}$ plus général (noté le 24-2-2024).

$\boxed{9}$ Soit a, b, c, d, c', d', d'' des réels.

Calculer le déterminant d'ordre 4 suivant : $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & c' & d' \\ -a & -b & c & d'' \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix}$.

$\boxed{10}$ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$.

1°) Calculer le déterminant de l'endomorphisme $T : E \to E$, $P \mapsto \widehat{P}(X+1)$.

2°) Calculer le déterminant de l'endomorphisme $T : E \to E$, $P \mapsto (X+1)P' + P$.

$\boxed{11}$ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4.

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & \cdots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & \cdots & (n+1)^2 \\ & & & \\ n^2 & (n+1)^2 & \cdots & (2n-1)^2 \end{vmatrix}$ (déterminant d'ordre n).

On utilisera des opérations élémentaires de la forme $\mathrm{C}_k \leftarrow \mathrm{C}_k - \mathrm{C}_{k-1}$.

On peut aussi appliquer le résultat de l'exercice suivant.

$\boxed{12}$ 1°) On considère l'application $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto \widehat{P}(X+1) - P(X)$.

Démontrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Que vaut le degré de ΔP ?

2°) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On pose $D = \begin{vmatrix} \tilde{P}(1) & \tilde{P}(2) & \cdots & \tilde{P}(n) \\ \tilde{P}(2) & \tilde{P}(3) & \cdots & \tilde{P}(n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{P}(n) & \tilde{P}(n+1) & \cdots & \tilde{P}(2n-1) \end{vmatrix}$.

Démontrer que si $\deg P \leqslant n-2$, alors $D = 0$.

Indication : Utiliser des opérations élémentaires de la forme $\mathrm{C}_k \leftarrow \mathrm{C}_k - \mathrm{C}_{k-1}$ et utiliser Δ.

1°) Soit F l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On considère l'application $\Delta : F \to F$, $f \mapsto g$ définie par $g(x) = f(x+1) - f(x)$ (opérateur de différence).

Démontrer que Δ est un endomorphisme de F.

2°) On suppose que f est une fonction polynomiale de degré $n \geqslant 1$. Que vaut le degré de Δf ?

3°) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

a) On considère la matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = f(i+j-1)$.

Préciser la matrice :

A_1 obtenue à partir de A en utilisant les opérations élémentaires $\mathrm{C}_k \leftarrow \mathrm{C}_k - \mathrm{C}_{k-1}$ pour $k \geqslant 2$ et utiliser l'application Δ ;

A_2 obtenue à partir de A_1 en appliquant les opérations élémentaires $\mathrm{C}_k \leftarrow \mathrm{C}_k - \mathrm{C}_{k-1}$ pour $k \geqslant 3$;

etc.

Préciser la forme de A_n.

b) On suppose que f est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à $n-2$.

Que peut-on dire de la dernière colonne de A_n ?

$\boxed{13}$ Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

1°) Soit x_0 un vecteur de E tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$.

Démontrer que la famille $\mathsf{B} = \left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E.

2°) Écrire la matrice de f dans B.

3°) Calculer $\det(f + \mathrm{id}_E)$.

$\boxed{14}$ Soit p un projecteur de rang r dans un espace vectoriel E de dimension finie.

Calculer $\det(\mathrm{id}_E + p)$.

$\boxed{15}$ Soit A un ensemble et K un corps commutatif.

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de A dans K muni de sa structure canonique d'espace vectoriel.

On cherche à démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'assertion P_n suivante est vraie :

« pour toute famille $(f_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ libre de fonctions de $\mathcal{F}$, il existe une famille $(x_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ d'éléments de A telle que $\det\left[f_i(x_j)\right]_{(i,\,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2} \neq 0$. »

1°) Démontrer que la proposition P_1 est vraie.

2°) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On suppose que P_{n-1} est vraie.

On considère la fonction $\Psi : x \mapsto \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_{n-1}) & f_1(x) \\ f_2(x_1) & \cdots & f_2(x_{n-1}) & f_2(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_n(x_1) & \cdots & f_n(x_{n-1}) & f_n(x) \end{vmatrix}$.

Démontrer que $\Psi \neq 0$ et en déduire que P_n est vraie.

Autre méthode : utilisation de la dualité (système unisolvent)

Soit $f_1, \dots, f_n$ n fonctions linéairement indépendantes de A dans K. On pose $E = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_n)$.

Pour tout $x \in A$, on note $\delta_x : \begin{array}{l} E \to K \\ f \mapsto f(x) \end{array}$.

1°) Démontrer que la famille $(\delta_x)_{x \in A}$ engendre E^*.

2°) En déduire qu'il existe des éléments $x_1, \dots, x_n$ de A tels que $\det M \neq 0$ où M est la matrice de terme général $m_{i,j} = f_i(x_j)$.

$\boxed{16}$ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et f une application de $[\![1;n]\!]$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout entier naturel k compris entre 1 et n au sens large, on pose $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} f(i)$.

Le but de l'exercice est de calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} S_1 & \cdots & \cdots & S_1 \\ \vdots & S_2 & \cdots & S_2 \\ \vdots & \vdots & & \\ S_1 & S_2 & & S_n \end{pmatrix}$ (le coefficient situé sur la ligne i et dans la colonne j est égal à $S_{\min(i,j)}$).

1$^{\text{ère}}$ méthode : Calcul direct en utilisant des opérations élémentaires.

2$^{\text{e}}$ méthode : On pose $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, …, $C_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Justifier que $\det A = \det\left(f(1)C_1 \,; f(1)C_1 + f(2)C_2 \,; \dots ; \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(i)C_i \right)$ puis développe grâce à la multilinéarité du déterminant.

3$^{\text{e}}$ méthode : Démontrer que $A = UV$ où $U = (u_{i,j})$ et $V = (v_{i,j})$ sont les matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définies par

$u_{i,j} = 0$ si $i \leqslant j$ et $u_{i,j} = 1$ sinon ;

$v_{i,j} = f(i)$ si $i \leqslant j$ et $v_{i,j} = 0$ sinon.

En déduire le déterminant de A.

Application :

Calculer le déterminant de la matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $m_{i,j} = \min(i, j)$.

$\boxed{17}$ Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ de degré n.

1°) Démontrer que la famille $(P, P', \dots, P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

2°) Soit $(a_0 \,; a_1 \,; \dots ; a_n)$ une famille de nombres complexes deux à deux distincts.

Pour tout entier naturel $i \in \{0 \,; 1 \,; \dots ; n\}$, on pose $P_i(X) = P(X + a_i)$.

Démontrer que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est libre.

Indication : On pourra utiliser la forme suivante de la formule de Taylor :

$P(X+a) = P(X) + aP'(X) + \dots + \dfrac{a^n}{n!} P^{(n)}(X)$ (pour tout réel a).

$\boxed{18}$ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1°) Soit $U = (u_{i,j})$ la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $u_{i,j} = 1$.

Démontrer que U est semblable à la matrice $U' = (u'_{i,j})$ définie par $u'_{1,1} = n$ et $u'_{i,j} = 0$ pour $(i, j) \neq (1,1)$.

Indication : Raisonner en termes d'endomorphismes.

2°) Soit a et b deux réels. On considère la matrice M de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $m_{i,j} = a$ si $i = j$ et $m_{i,j} = b$ si $i \neq j$.

Exprimer M en fonction de U et de I ; en déduire $\det M$.

$\boxed{19}$ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Pour tout réel x, on pose $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \frac{x^2}{2!} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$.

Calculer $D_n(x)$.

Indication : On pourra dériver D_n.

$\boxed{20}$ Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.

Soit $(x_1 \,; x_2 \,; \dots ; x_n)$ et $(y_1 \,; y_2 \,; \dots ; y_n)$ deux familles de n réels.

On considère la matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = (x_i + y_j)^{n-1}$.

Écrire A comme produit de deux matrices et calculer $\det A$.

$\boxed{21}$ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et a et b deux réels distincts.

Pour tout réel x, on pose $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & x-b & & & x-b \\ x-a & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x-b \\ x-a & \dots & \dots & x-a & x \end{vmatrix}$ (déterminant d'ordre n).

1°) Démontrer que $D_n(x)$ est un polynôme en x de degré inférieur ou égal à 1.

2°) Calculer $D_n(a)$ et $D_n(b)$; en déduire l'expression de $D_n(x)$ en fonction de x, a, b et n.

$\boxed{22}$ Soit $(G, \bullet)$ un groupe.
1°) Soit a un élément fixé de G.
Démontrer que l'application $\sigma_a : g \mapsto aga^{-1}$ est un homomorphisme du groupe G dans lui-même.
2°) Démontrer que $\begin{array}{l} G \to \mathrm{Bij}(G) \\ a \mapsto \sigma_a \end{array}$ est un homomorphisme injectif de groupes.

$\boxed{23}$ Soit n un entier naturel non nul fixé.
On pose $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & \dots & 2n-1 & 2 & \dots & 2n \end{pmatrix}$ appartenant à S_{2n}.
Déterminer la signature de σ.

$\boxed{24}$ 1°) Soit M une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\overline{\mathrm{M}}$ la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont les conjugués de ceux de la matrice M.
Comparer $\det \overline{\mathrm{M}}$ et $\det \mathrm{M}$.
2°) Soit A et B deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$.
Démontrer que l'on a : $\det\left(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2\right) \geqslant 0$.
3°) Soit A et B deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Démontrer que l'on a : $\det\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ -\mathrm{B} & \mathrm{A} \end{pmatrix} \geqslant 0$.

Soit A et B deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
On considère la matrice $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & -\mathrm{B} \\ \mathrm{B} & \mathrm{A} \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$.
Démontrer que $\det \mathrm{C} \geqslant 0$.
Indication : On commencera par calculer $\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{iI} \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix} \mathrm{C} \begin{pmatrix} \mathrm{I} & -\mathrm{iI} \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix}$ (I est la matrice identité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$).

$\boxed{25}$ Soit a, b, c trois réels. On pose $D = \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix}$.
Démontrer que $D = \sin(b-c) + \sin(c-a) + \sin(a-b) = -4 \sin\dfrac{b-c}{2} \sin\dfrac{c-a}{2} \sin\dfrac{a-b}{2}$.

$\boxed{26}$ Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur un corps commutatif K.
Soit u_1, u_2, u_3 trois vecteurs quelconques de E.
Calculer $\det_B(u_1 - u_2, u_2 - u_3, u_3 - u_1)$ où B est une base de E.

$\boxed{27}$ 1°) Soit a_1, a_2, …, a_n n réels strictement positifs tels que $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.
On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{vmatrix} x & a_1 & \dots & \dots & a_1 \\ a_2 & x & a_2 & \dots & a_2 \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & a_{n-1} \\ a_n & a_n & & \dots & x \end{vmatrix}$.
Démontrer que f est une fonction polynôme de degré n.
2°) Démontrer que f admet n racines réelles deux à deux distinctes.
3°) Soit A et B deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Démontrer que la fonction $x \mapsto \det(\mathrm{A} + x\mathrm{B})$ est une fonction polynôme et déterminer un majorant de son degré.

$\boxed{28}$ On pose $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note l'ensemble $\mathcal{P}(E_n) \backslash \{\varnothing\} = \left\{p(1), p(2), \dots, p\left(2^n - 1\right)\right\}$.
On considère la matrice $A_n = \left(a_{i,j}\right) \in \mathrm{M}_{2^n-1}(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = 1$ si $p(i) \cap p(j) = \varnothing$; $a_{i,j} = 0$ sinon.
Calculer $\det A_n$.

$\boxed{29}$ Soit A et B deux matrices quelconques de $\mathbb{M}_n(K)$. On note I la matrice identité d'ordre n.
Comparer $\det(I - AB)$ et $\det(I - BA)$.
Indication : Considérer les produits par blocs $\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I - AB \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I - BA & B \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix}$.

$\boxed{30}$ 1°) Soit f une symétrie d'un espace vectoriel E de dimension finie. On note S l'ensemble des vecteurs anti-invariants par f (c'est-à-dire dont l'image par f est égale à leur opposé).
Démontrer que $\det f = (-1)^{\dim S}$.
2°) On pose $E = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1) et l'on considère l'application T de E dans lui-même qui à toute matrice A associe la matrice ${}^tA$.
Démontrer que T est un endomorphisme de E et calculer son déterminant.

$\boxed{31}$ 1°) Calculer le déterminant de la matrice $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = \max(i, j)$.
2°) Calculer le déterminant de la matrice $\mathrm{B} = \left(b_{i,j}\right)$ définie par $b_{i,j} = \min(i, j)$.
1$^{\text{ère}}$ méthode : directement par opérations élémentaires
2$^{\text{e}}$ méthode : en démontrant que $\mathrm{B} = {}^t\mathrm{TT}$ où $\mathrm{T} = \left(t_{i,j}\right)$ est la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $t_{i,j} = 1$ si $i \leqslant j$ et $t_{i,j} = 0$ sinon.

$\boxed{32}$ 1°) Soit $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_1, \dots, b_n)$, $(c_1, \dots, c_n)$, $(d_1, \dots, d_n)$ des n-uplets (où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3).
On considère la matrice $M = \left(m_{i,j}\right)$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $m_{i,j} = a_i b_j + c_i d_j$.
On pose $U = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & \\ \vdots & \vdots & 0 & \\ a_n & c_n & & \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \\ d_1 & \cdots & d_n \\ & 0 & \end{pmatrix}$ (il s'agit de matrices carrées d'ordre n).
Démontrer que $M = UV$; en déduire le déterminant de M.
2°) **Application :**
On considère un n-uplet $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ de réels.
On considère la matrice $A = \left(a_{i,j}\right)$ définie par $a_{i,j} = \sin(\theta_i + \theta_j)$.
Calculer $\det A$.

33 Soit A et B deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 2)$.

Calculer $\begin{vmatrix} A & B & B & \dots & B \\ B & A & B & & \vdots \\ & B & A & B & \\ & & & \ddots & \\ B & \dots & & B & A \end{vmatrix}$ (il s'agit d'un déterminant par blocs où la matrice A est écrite n fois sur la grande diagonale et où l'on a complété le reste de la matrice avec la matrice B).

34 Soit $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ deux n-uplets de réels avec $n \geqslant 3$.
Calculer le déterminant de la matrice M de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $a_i + b_j$.

35 1°) Soit M une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\overline{\mathrm{M}}$ la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont les conjugués de ceux de la matrice M.
Comparer det $\overline{\mathrm{M}}$ et det M.
2°) Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^t\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}}$.
Démontrer que $\det \mathrm{A} \in \mathbb{R}$.

36 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note D_n le déterminant de la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1°) Calculer le déterminant de la matrice $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

2°) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on a $D_n = (n-1)! + nD_{n-1}$.

3°) En déduire D_n en fonction de $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Indication : Considérer la suite de terme général $u_n = \dfrac{D_n}{n!}$.

37 On pose $\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{F} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$ où a, b, c, d sont 4 complexes.

1°) Calculer det E.
2°) Calculer EF ou FE (au choix) et en déduire det F sous la forme d'un produit de 4 facteurs du premier degré en a, b, c, d.

38 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que tous les coefficients de la diagonale soient des entiers relatifs pairs et tous les autres coefficients soient des entiers relatifs impairs.
1°) Démontrer que $n + \det A$ est un entier relatif impair.
2°) En déduire que si n est pair, alors la matrice A est inversible.

39 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
1°) Démontrer que si A est triangulaire, alors com A est triangulaire.
2°) Démontrer que si A est symétrique, alors com A est symétrique.
Le résultat reste-t-il valable si A est antisymétrique ?

40 Soit $a_1, \dots, a_n$ n nombres complexes $(n \in \mathbb{N}^*)$.
Calculer le déterminant de la matrice carrée d'ordre n de terme général $a_{\max(i,\, j)}$.
En déduire en particulier le déterminant des matrices carrées d'ordre n de termes généraux $\max(i, j)$ et $\min(i, j)$.

41 Soit n un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2.
On dit qu'une permutation σ de S_n est un dérangement pour exprimer qu'elle n'a pas de point fixe.
Le but de l'exercice est de répondre à la question : y a-t-il plus de dérangements pairs que de dérangements impairs ?
On note α le nombre de dérangements pairs et β le nombre de dérangements impairs.
On considère la matrice $U = (u_{i,\, j})$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $u_{i,\, j} = 0$ si $i = j$ et $u_{i,\, j} = 1$ si $i \neq j$.
1°) Démontrer que $\det U = \alpha - \beta$.
2°) Calculer det U.
3°) Conclure.

42 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n tel que $f^2 = -\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.
1°) Démontrer que n est pair.

2°) Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f s'écrit $\begin{pmatrix} A & & & \\ & A & & 0 \\ & & A & \\ & 0 & & \\ & & & A \end{pmatrix}$ où A est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

43 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 fixé. On note E l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n au sens large. On note K un corps commutatif.
Soit $\mathrm{A} = (a_{i,\, j})$ une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ telle que pour tout couple (i, j) d'éléments de E on ait $a_{i,\, j} = 0$ dès que $i + j > n+1$.
1°) Calculer le déterminant de A.
2°) On prend $\mathrm{K} = \mathbb{R}$. On suppose que les coefficients $a_{i,\, j}$ sont non nuls de même signe pour tout couple (i, j) d'éléments de E tel que $i + j = n+1$.
Quel est le signe du déterminant de A ?

44 Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & \cos^2 a & \cos 2a \\ 1 & \cos^2 b & \cos 2b \\ 1 & \cos^2 c & \cos 2c \end{vmatrix}$ où a, b, c sont trois réels quelconques.

$\boxed{45}$ Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} \cos^2 a & \sin^2 a & \cos 2a \\ \cos^2 b & \sin^2 b & \cos 2b \\ \cos^2 c & \sin^2 c & \cos 2c \end{vmatrix}$ où a, b, c sont trois réels quelconques.

$\boxed{46}$ Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$ où a, b, c sont trois réels quelconques.

$\boxed{47}$ 1) Soit $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (n étant un réel supérieur ou égal à 1. On note $\mathrm{A}(x)$ la matrice dont le terme général est $a_{i,j} + x$.

Démontrer que la fonction $x \mapsto \det \mathrm{A}(x)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.

Indication :

Retrancher la première colonne à toutes les autres colonnes.

2°) Pour a et b deux réels distincts et $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ une famille de n réels quelconques, en déduire la valeur du

déterminant $\begin{vmatrix} \alpha_1 & b & ... & ... & b \\ a & \alpha_2 & b & ... & b \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & b \\ a & a & \dots & a & \alpha_n \end{vmatrix}$ à l'aide du polynôme $P(x) = \prod_{k=0}^{k=n} (\alpha_i - x)$ (les coefficients en dessous de la diagonale sont tous égaux à a, les coefficients au-dessus de la diagonale sont tous égaux à b).

Indication :

Calculer le déterminant $\mathrm{D}(x)$ obtenu en ajoutant x à chacun des coefficients de la matrice. On pourra remarquer qu'on obtient facilement $\mathrm{D}(-a)$ et $\mathrm{D}(-b)$.

Voir exercice $\boxed{21}$.

$\boxed{48}$ Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & b \\ b & a & 1 \end{vmatrix}$ où a et b sont deux réels quelconques.

On donnera le résultat sous forme factorisée.

$\boxed{49}$ Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ b & c & bc \end{vmatrix}$ où a, b, c sont trois réels quelconques.

On donnera le résultat sous forme factorisée.

$\boxed{50}$ Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix}$ où a, b, c, d sont quatre réels quelconques.

On donnera le résultat sous forme factorisée.

$\boxed{51}$ Soit $(x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ..., y_n)$ deux n-uplets de réels.

On considère les matrices $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)$ et $\mathrm{B} = \left(b_{i,j}\right)$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définies par $a_{i,j} = x_i + y_j$ et $b_{i,j} = x_i y_j$.

Calculer les déterminants de A et B. voir mon exercice $\boxed{34}$.

$\boxed{52}$ Soit n un entier naturel non nul fixé.

Soit X_1, X_2 , …, X_n n parties fixées de $\{1, 2, \dots, n\}$.

On considère la matrice $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = \mathrm{card}\left(\mathrm{X}_i \cap \mathrm{X}_j\right)$ et la matrice $\mathrm{B} = \left(b_{i,j}\right)$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $b_{i,j} = 1$ si $j \in \mathrm{X}_i$ et $b_{i,j} = 0$ si $j \notin \mathrm{X}_i$.

Démontrer que $\mathrm{A} = \mathrm{B}^t\mathrm{B}$.

En déduire que $\det \mathrm{A} \geqslant 0$.

Applications :

Calculer le déterminant de la matrice $\mathrm{M} = \left(m_{i,j}\right)$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dans chacun des cas suivants.

1$^{\text{er}}$ cas : $m_{i,j} =$ nombre de diviseurs positifs communs à i et j

2$^{\text{e}}$ cas : $m_{i,j} =$ nombre de multiples communs à i et j compris entre 1 et n au sens large.

$\boxed{53}$ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une famille de n réels et $(f_1, f_2, ..., f_{n-1})$ une famille de polynômes normalisés de degrés respectifs 1, 2, …, $n-1$.

Démontrer que $\begin{vmatrix} 1 & f_1(x_1) & ... & ... & f_{n-1}(x_1) \\ 1 & f_1(x_2) & & & f_{n-1}(x_2) \\ & & & & \vdots \\ & & & & \\ 1 & f_1(x_n) & \dots & & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = \mathrm{V}(x_1, x_2, ..., x_n)$.

$\boxed{54}$ On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ \frac{1}{a} & 1 & c \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & 1 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels non nuls.

Calculer le déterminant de A en fonction de a, b, c.

$\boxed{55}$ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Soit $(x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ..., y_n)$ deux familles de réels.

On considère la matrice A carrée d'ordre n définie par $a_{i,j} = f\left(x_i + y_j\right)$.

Calculer det A lorsque : e1°) $f = \exp$; 2°) $f = \cos$; 3°) $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$

$\boxed{\textbf{55 bis}}$ Soit n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.

Soit $(x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ..., y_p)$ deux familles de réels.

On reprend l'énoncé précédent.

On peut demande le rang de la matrice A.

Réponses

$\boxed{1}$ $\det = -a(a-6)^2$

$\boxed{2}$
1^{er} cas : 1
2^{e} cas : n !
3^{e} cas : $m_{i,j} = \sum_{d \mid \mathrm{PGCD}(i,\,j)} \varphi(d) = \sum_{\substack{d|i \\ d|j}} \varphi(d)$

Le 3^{e} cas est le déterminant de Smith tombé au concours de Centrale (découvert le 18-2-2022).

On peut observer que, dans chaque cas, la matrice M est symétrique et inversible puisque le déterminant est non nul.

$\boxed{3}$ 1°) $\det\left[\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$

2°) $\det\left(\underbrace{(\mathrm{A}-\mathrm{B})}_{\mathrm{C}} + \underbrace{(\mathrm{B}+\mathrm{X})}_{\mathrm{Y}}\right) = \det\left(\underbrace{\mathrm{B}+\mathrm{X}}_{\mathrm{Y}}\right)$; on applique le 1°) à C.

$\boxed{4}$ $D = (-1)^{n+1} \sum_{p=0}^{n-1} a_p x^p$

On peut noter que l'opération $\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + x\mathrm{L}_2 + x^2\mathrm{L}_3 + \ldots + x^{n-1}\mathrm{L}_n$ n'est pas une opération élémentaire.

$\boxed{5}$

$\mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2$
$\mathrm{C}_2 \leftarrow \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3$
$\vdots$
$\mathrm{C}_{n-1} \leftarrow \mathrm{C}_{n-1} + \mathrm{C}_n$

$1+1=2$
$1-1=0$
$-1-1=-2$
Les $(n-1)$ premières colonnes sont donc factorisables par 2.

$\boxed{5}$ J'ai réaménagé cet exercice après avoir lu les exercices des oraux de Polytechnique 2019.
Question 1°) :
Soit A une matrice dont tous les coefficients sont des entiers pairs.
Démontrer que det A est divisible par 2^n.
On écrit $\det(2\mathrm{U}_1, 2\mathrm{U}_2, \ldots, 2\mathrm{U}_n)$.

On peut se limiter aux coefficients de p colonnes ou de p lignes.
Dans ce cas, det A est divisible par 2^p.
On considère une matrice dont les coefficients sont tous des entiers divisibles par un entier a.
Démontrer que det A est divisible par a^n.

$\boxed{8}$ Démarrer du bas :

$\mathrm{L}_n \leftarrow \mathrm{L}_n - \mathrm{L}_{n-1}$
$\mathrm{L}_{n-1} \leftarrow \mathrm{L}_{n-1} - \mathrm{L}_{n-2}$
$\vdots$
$\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1$

$\boxed{\det \mathrm{A} = n!}$

$\boxed{9}$ $D = 8abc$

$\boxed{11}$ $\mathrm{C}_k \leftarrow \mathrm{C}_k - \mathrm{C}_{k-1}$

Une $1^{\text{ère}}$ fois $\to$ impairs
puis une 2^{e} fois $\to$ 2 colonnes de 2.

Le déterminant est égal à 0.

$\boxed{12}$ $\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} f(1) & \Delta f(1) & \cdots & \Delta^{n-1} f(1) \\ f(2) & \Delta f(2) & \cdots & \Delta^{n-1} f(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f(n) & \Delta f(n) & \cdots & \Delta^{n-1} f(n) \end{pmatrix}$

Voir sujet Centrale 2016 Opérateur de différence, opérateur de translation

$\boxed{14}$ $\det(\mathrm{id} + p) = 2^{\mathrm{rg}\, p}$

$\boxed{15}$ Système unisolvent : exercice de Michel Quercia sur la dualité

Solution élève MPSI B du lycée Hoche (Lubineau) durant l'année scolaire 2013-2014

$(f_1, \ldots, f_n)$ formes linéaires libres

Démontrons qu'il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{A}^n$ tel que $\forall (i,\, j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \quad f_j(x_i) = \delta_{i,\,j}$.
Supposons qu'il existe $x \in \mathrm{A} \setminus \{0\}$ tel que $\exists i_1 \neq i_2$ tel que $f_{i_1}(x) = \lambda f_{i_2}(x)$, $\lambda \neq 0$.

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(f_{i_1}) = \mathrm{Ker}(f_{i_2})$
$\Rightarrow (f_{i_1}, f_{i_2})$ liée

Absurde

Donc $\forall x \in \mathrm{A} \setminus \{0\} \quad f_{i_1}(x) \neq 0 \Rightarrow f_{i_2}(x) = 0$

$\Rightarrow \underbrace{\exists (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{A}^n}_{\text{libre !}}$ tel que $\forall (i,\, j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \quad f_j(x_i) = \delta_{i,\,j}$.

Soit $g \in E^*$.

$g(f_1) = k_1$
$g(f_2) = k_2$

$\vdots$

$g(f_n) = k_n$

Considérons $\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i \delta_{x_i}$.

$$\begin{aligned}
\forall p \in \{1,\dots,n\} \quad \alpha(f_p) &= \sum_{i=1}^{n} k_i \delta_{x_i}(f_p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} k_i f_p(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} k_i \delta_{i,p}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \alpha(f_p) = k_p$

$\forall p \in \{1,\dots,n\} \quad \alpha(f_p) = g(f_p)$
D'après le théorème du prolongement linéaire, $\alpha = g$.
Donc $(\delta_x)_{x \in \mathrm{A}}$ engendre E^*.

2°) On reprend les mêmes x_i.
$\Rightarrow m_{i,j} = f_i(x_j)$

$$\begin{aligned}
\det M &= \det\big(C_1(M),\dots,C_n(M)\big) \\
&= \varepsilon \det(I_n) \qquad \varepsilon \in \{-1;1\} \\
&= \varepsilon \boxed{\neq 0}
\end{aligned}$$

Donc $\exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{A}^n$ tel que $\det M \neq 0$.

16 On pose $\mathrm{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ …. ; $\mathrm{C}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alors $D = \det\left(f(1)\mathrm{C}_1 \,;\, f(1)\mathrm{C}_1 + f(2)\mathrm{C}_2 \,;\dots;\, \sum_{i=1}^{n} f(i)\mathrm{C}_i \right)$.

On développe grâce à la multilinéarité du déterminant.

$$D = \prod_{i=1}^{n} f(i)$$

Autre méthode :

$f : [\![1;n]\!] \to \mathbb{R}$
$S_1 = f(1)$, $S_2 = f(1) + f(2)$, … , $S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$

On effectue un « nettoyage » par colonne selon la technique du pivot de Gauss.

$$D = \begin{vmatrix}
f(1) & f(1) & & f(1) \\
\vdots & f(1)+f(2) & & f(1)+f(2) \\
 & \vdots & & \vdots \\
 & & & \\
f(1) & f(1)+f(2) & & f(1)+\dots+f(n)
\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}
f(1) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & f(1) \\
0 & f(2) & & & & f(2) \\
0 & f(2) & f(3)+f(2) & & & \\
0 & & & & \cdots & \\
\vdots & & & & & \\
\vdots & & & & & \\
0 & f(2) & f(3)+f(2) & \cdots & \cdots &
\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}
f(1) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & f(1) \\
0 & f(2) & & & & f(2) \\
0 & 0 & f(3) & & & \\
0 & 0 & & & \cdots & \\
\vdots & & & & & \\
\vdots & & & & & \\
0 & 0 & f(3) & \cdots & \cdots &
\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}
f(1) & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & f(1) \\
0 & f(2) & \cdots & \cdots & & \cdots & f(2) \\
0 & 0 & f(3) & & & \cdots & f(3) \\
0 & 0 & 0 & \ddots & & \cdots & \\
\vdots & & & & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & & & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & f(n)
\end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(i)$$

$\boxed{20}$

Version originale :

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$ et k un entier naturel tel que $k \leqslant n-1$. Soit $(x_1\,;x_2\,;...;\,x_n)$ et $(y_1\,;y_2\,;...;\,y_n)$ deux familles de n réels.

On considère la matrice $A=(a_{i,j})$ de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j}=(x_i+y_j)^k$.

Écrire A comme produit de deux matrices et calculer det A.

J'avais écrit au verso : $k=n-1$ mieux.

$$(x_i+y_j)^k=\sum_{p=0}^{n-1}\mathrm{C}_p^k x_i^{\,p} y_j^{\,k-p}=\sum_{p=1}^{n}\mathrm{C}_{p-1}^k x_i^{\,p-1} y_j^{\,k-p+1}$$

$$b_{i,j}=x_i^{\,j-1} \qquad c_{i,j}=\mathrm{C}_k^{i-1} y_j^{\,k-i+1}$$

$$\det A=\left(\prod_{j=1}^{n}\mathrm{C}_k^{j-1}\right)\times V(x_1,x_2,...,x_n)\times V(y_1,y_2,...,y_n)$$

$\boxed{24}$ 2°) $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2=\underbrace{(\mathrm{A}+\mathrm{iB})}_{\mathrm{M}}\underbrace{(\mathrm{A}-\mathrm{iB})}_{\overline{\mathrm{M}}}$

$$\det(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)=\det(\mathrm{A}+\mathrm{iB})\det(\mathrm{A}-\mathrm{iB})$$

$$\det(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)=......$$

3°)

$$\det\begin{pmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{B}\\ -\mathrm{B} & \mathrm{A}\end{pmatrix}=(-1)^n\det\begin{pmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{iB}\\ -\mathrm{iB} & -\mathrm{A}\end{pmatrix}$$

$$=(-1)^n\det\begin{pmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{iB}\\ \mathrm{A}-\mathrm{iB} & -\mathrm{A}+\mathrm{iB}\end{pmatrix} \qquad \text{(opérations sur les lignes)}$$

$$=(-1)^n\det\begin{pmatrix}\mathrm{A}+\mathrm{iB} & \mathrm{iB}\\ 0 & -\mathrm{A}+\mathrm{iB}\end{pmatrix} \qquad \text{(opérations sur les colonnes)}$$

$$=(-1)^n\det(\mathrm{A}+\mathrm{iB})\det(-\mathrm{A}+\mathrm{iB}) \qquad \text{(déterminant d'une matrice par blocs)}$$

$$=\det(\mathrm{A}+\mathrm{iB})\det(\mathrm{A}-\mathrm{iB})$$

$\boxed{26}$ La famille …. est liée car $(u_1-u_2)+(u_2-u_3)+(u_3-u_1)=0$. Donc le déterminant est nul.

$\boxed{27}$ 1°) $f(x)=\det\big((x-a_1)\mathrm{X}_1+\mathrm{U}\,;(x-a_2)\mathrm{X}_2+\mathrm{U}\,;\ldots;(x-a_n)\mathrm{X}_n+\mathrm{U}\big)$

$\mathrm{X}_i=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$ (des zéros sur toutes les lignes sauf sur la ligne i) et $\mathrm{U}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\ \\ \\a_n\end{pmatrix}$

$$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)-\sum_{j=1}^{n}a_j\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(x-a_i)$$

2°) On observe un changement de signe entre a_k et a_{k+1}.

Comme il y a un changement de signes, la fonction f s'annule un nombre impair de fois (1 ; 3 ; 5 etc).

Si la fonction s'annule 3 fois dans un intervalle, il y aurait quelque chose d'incohérent.

Si la fonction s'annulait un nombre pair de fois, ce serait impossible.

La fonction f admet donc $n-1$ racines.

Meilleure justification :

2°) Notons $C=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$.

Alors

$$f(a_i)=\det\big(C+(a_i-a_1)X_1,C+(a_i-a_2)X_2,...,C+(a_i-a_n)X_n\big)$$

$$=\det\big(C+(a_i-a_1)X_1,...,C+(a_i-a_{i-1})X_{i-1},C,C+(a_i-a_{i+1})X_{i+1},...,C+(a_i-a_n)X_n\big)$$

$$f(a_i)=\det\big((a_i-a_1)X_1,...,(a_i-a_{i-1})X_{i-1},C,(a_i-a_{i+1})X_{i+1},...,(a_i-a_n)X_n\big)$$

$$=\left(\prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n}(a_i-a_k)\right)\underbrace{\det(X_1,...,X_{i-1},C,X_{i+1},...,X_n)}_{=a_i>0}$$

Or $0<a_1<...<a_n$.

Par suite, $\prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n}(a_i-a_k)$ est du signe de $(-1)^{i-1}$.

On en déduit que f change de signe entre a_i et a_{i-1}.

Donc f admet $n-1$ racines.

Or $f(a_1)$ est du signe de $(-1)^{n-1}$.

Donc

si n est pair $f(a_1)<0$. Or $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}+\infty$.
On en déduit une n-ième racine de f.

si n est impair $f(a_1)>0$. Or $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}-\infty$.
On en déduit une n-ième racine de f.

3°) polynôme

$\deg f \leqslant \operatorname{rg} \mathrm{B}$
On pose $r=\operatorname{rg}\mathrm{B}$.

Il existe deux matrices P et Q de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{B}=\mathrm{PJ}_r\mathrm{Q}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \det\left(\mathrm{A}+x\mathrm{PJ}_r\mathrm{Q}\right)\\ &= \det\left(\mathrm{PP}^{-1}\mathrm{AQ}^{-1}\mathrm{Q}+x\mathrm{PJ}_r\mathrm{Q}\right)\\ &= \det\mathrm{P}\times\det\left(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AQ}^{-1}+x\mathrm{J}_r\right)\times\det\mathrm{Q}\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \ldots+x & & \\ & & \text{pas de } x \\ & \ldots+x & \\ \hline \text{pas de } x & & \text{pas de } x \end{array}\right)$$

$\boxed{28}$ On définit pour $n\geqslant 2$ la phrase H_n : « $\det A_n=-1$ ».

$\mathcal{P}(E_{n+1})\backslash\{\varnothing\}=\left\{\{n+1\},p(1),p(2),\ldots,p(2^n-1),\{n+1\}\cup p(1),\ldots,\{n+1\}\cup p(2^n-1)\right\}$

$$A_{n+1}=\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0\ \ldots\ 0 & 1\ \ldots\ 1\\ \hline \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & A_n & A_n\\ \hline \begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix} & A_n & \mathrm{I}\end{array}\right)$$

On soustrait la ligne 1 aux blocs du bas.

$$\det A_{n+1}=\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0\ \ldots\ 0 & 1\ \ldots\ 1\\ \hline \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & A_n & A_n\\ \hline \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & A_n & 0\end{array}\right)=\begin{vmatrix}A_n & A_n\\ A_n & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A_n & A_n\\ 0 & -A_n\end{vmatrix}=-1$$

$\boxed{30}$ E_{-1} : ensemble des vecteurs qui « donnent » leur opposé.

Ancienne version du $\boxed{30}$ changée le 23-2-2021 :
Soit f une symétrie d'un espace vectoriel de dimension finie. On note E_1 l'ensemble des vecteurs invariants par f et E_{-1} l'ensemble des vecteurs anti-invariants par f (c'est-à-dire dont l'image par f est égale à leur opposé).
Démontrer que $\det f=(-1)^{\dim E_{-1}}$.

$\boxed{31}$

1°)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n\\ & & & & \\ n & \cdots & & \cdots & n\end{vmatrix}$$

1ère méthode :

$\mathrm{C}_i\leftarrow\mathrm{C}_i-\mathrm{C}_{i-1}$

$$\det\mathrm{A}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & & 1 & \cdots & 0\\ & & & & \\ n & \cdots & & \cdots & 1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\times n$$ pb dans l'écriture de la matrice mal écrite

2e méthode (meilleure) :

$\mathrm{L}_1\leftarrow\mathrm{L}_1-\mathrm{L}_2$
$\mathrm{L}_2\leftarrow\mathrm{L}_2-\mathrm{L}_3$

$\vdots$

$\mathrm{L}_{n-1}\leftarrow\mathrm{L}_{n-1}-\mathrm{L}_n$

Déterminant triangulaire

$(-1)^{n-1}\times n$

2°)

1^ère^ méthode : $\mathrm{C}_k \leftarrow \mathrm{C}_k - \mathrm{C}_{k-1}$ en commençant par la dernière colonne

$$\det \mathrm{B} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 2 & & \cdots & n \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & & & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & & \\ \vdots & 1 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{array}\right| = 1$$

2^e^ méthode :

$\boxed{33}$ $\det \mathrm{M} = \det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \times \left[\det(\mathrm{A}-\mathrm{B})\right]^{n-1}$

$\boxed{34}$

1^ère^ méthode :

$\det \mathrm{M} = \det\left(\mathrm{A}+b_1\mathrm{U}, \ldots, \mathrm{A}+b_n\mathrm{U}\right)$ avec $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Le déterminant est multilinéaire.
$\det \mathrm{M} = 0$

2^e^ méthode :

On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{C}_i = \mathrm{A} + b_i\,\mathrm{U}$

$\mathrm{Vect}\left(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_n\right) \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{A}, \mathrm{U})$

Or $\dim \mathrm{Vect}(\mathrm{A}, \mathrm{U}) \leqslant 2$ et $n \geqslant 3$.

$\boxed{36}$

$u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n} \quad u_n = u_2 + \displaystyle\sum_{k=3}^{k=n} \frac{1}{k}$

$\boxed{37}$

1°) $\det \mathrm{E} = 16$

2°) $\mathrm{EF} = \begin{pmatrix} a+b+c+d & a+b+c+d & a+b+c+d & a+b+c+d \\ a+b-c-d & a+b-c-d & -a-b+c+d & -a-b+c+d \\ a-b-c+d & -a+b+c-d & -a+b+c-d & a-b-c+d \\ a-b+c-d & -a+b-c+d & a-b+c-d & -a+b-c+d \end{pmatrix}$

$\det(\mathrm{EF}) = 16(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)$

Or $\det \mathrm{E} = 16$ donc $\det \mathrm{F} = (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)$

Attention, les matrices E et F ne commutent pas : Le coefficient (1 ; 3) de EF est égal à $a-b-c+d$ alors que le coefficient (1 ; 3) de FE est égal à $a+b+c+d$.

Le mercredi 27-6-2018, j'avais écrit :

EF coefficient (1 ; 3) $\neq$ FE coefficient (3 ; 1)
$a-b-c+d$ $\qquad$ $a+b+c+d$

Les matrices EF et FE sont transposées l'une de l'autre. On peut le vérifier aisément compte tenu du fait que E et F sont toutes les deux symétriques.

$\boxed{43}$ 1°) Le résultat est donné par $(-1)^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}} \displaystyle\prod_{i+j=n+1} a_{i,\,j}$. Attention à l'exposant du – 1 !!!

$\boxed{44}$ On trouve 0. On utilise l'opération élémentaire $\mathrm{C}_3 \leftarrow 2\mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_1$.

$\boxed{45}$ On trouve 0. On utilise l'opération élémentaire $\mathrm{C}_3 \leftarrow \mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_1$.

$\boxed{47}$
Le 27-6-2022

Source bibmath : exercice sur les déterminants (Exercice 11 « Calcul à l'aide d'une fonction affine »)

1°) Plusieurs méthodes :
La matrice J_n dont tous les coefficients sont égaux à 1 est symétrique et de rang 1. Elle peut donc se diagonaliser et s'écrire $\mathrm{J}_n = \mathrm{PDP}^{-1}$ avec $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(n, 0, 0, 0, \ldots, 0)$ où n est l'unique valeur propre non nulle de J_n. Si $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$, on te demande de montrer que $P(x) = \det(\mathrm{A} + x\mathrm{J}_n) = \det(\mathrm{B} + x\mathrm{D})$ est un polynôme de degré 0 ou 1 (ou $-\infty$ si c'est le polynôme nul). C'est clair en développant le déterminant de $\mathrm{B} + x\mathrm{D}$ par rapport à la première ligne.

2°) Réponse : On introduit le polynôme $P(x) = \displaystyle\prod_{k=0}^{k=n} (\alpha_i - x)$.

On trouve que le déterminant est égal à $\dfrac{aP(b) - bP(a)}{a-b}$.
Une fonction affine est déterminée par les images de deux réels distincts.

$\boxed{48}$ $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & b \\ b & a & 1 \end{vmatrix}$: $(1+a+b)(1-a)(1-b)$

$\boxed{49}$ $\begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ b & c & bc \end{vmatrix}$: $ac(c-b)(b-a)$

$\boxed{50}$ $\begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix} : (c-a)^2(d-b)^2$

$\boxed{51}$ On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \\ \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs colonnes de la matrices sont tous dans $\mathrm{Vect}(\mathrm{X}, \mathrm{U})$.

Si $n \geqslant 2$, on a donc $\det \mathrm{A} = 0$.

$\boxed{54}$

$$\det \mathrm{A} = 1 \times 0 - \frac{1}{a} \times \left(a - \frac{b}{c}\right) + \frac{1}{b} \times (ac - b)$$

$$= -\frac{ac-b}{ac} + \frac{ac-b}{b}$$

$$= \frac{(ac-b)^2}{ac}$$

$\boxed{54}$ écrit le 17-6-2023

Inspiré de l'épreuve Edhec maths approfondies 2023

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ a & 1 & \frac{1}{c} \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

Le 4-7-2023

On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ \frac{1}{a} & 0 & b \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels non nuls fixés.

$$\det \mathrm{A} = \frac{c}{ab} + \frac{ab}{c}$$

$$\det \mathrm{A} = \frac{(ab)^2 + c^2}{abc}$$

J'ai gardé cet exercice. Je ne sais pas trop quoi en faire.

Questions de cours sur les déterminants

$\boxed{1}$ Signature d'une permutation (définition et calcul pour une transposition).

$\boxed{2}$ Formes multilinéaires ; caractère alterné.

$\boxed{3}$ Déterminant d'une matrice et de sa transposée.

$\boxed{4}$ Déterminant de Vandermonde.

$\boxed{5}$ Déterminant d'une matrice triangulaire.

$\boxed{6}$ Déterminant de la composée de deux endomorphismes.

$\boxed{7}$ Familles liées et formes multilinéaires (et déterminant).

$\boxed{8}$ Définition d'un cofacteur ; développement d'une matrice à l'aide des cofacteurs.

$\boxed{9}$ Déterminant d'une famille liée.

$\boxed{10}$ Points fixes d'une permutation. Une permutation d'ordre n peut-elle admettre $n-1$ points fixes ?

$\boxed{11}$ Système de Cramer (définition, formules de Cramer)

$\boxed{12}$ Parler de $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ et de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{13}$ Donner la formule du déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 à l'aide de la définition.

$\boxed{14}$ Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif K. Soit $\omega \in \Lambda_p(\mathrm{E})$.
Compléter la proposition suivante :
Si $(x_1, x_2, ..., x_p)$ est une famille liée, alors $\omega(x_1, x_2, ..., x_p) = ...$
Démontrer ce résultat.
En déduire la conséquence suivante :
Si E est de dimension finie et si $p > \dim E$, alors la seule forme p-linéaire alternée sur E est identiquement nulle.

Le 25 juin 2023

Voir devoir maison de Maxime Bourrigan donné à Louis-Le-Grand sur déterminant de Hankel et déterminant de Pascal.