TS

Interrogation écrite sur les intégrales N°1
(40 minutes)

I. Soit f la fonction définie sur l'intervalle [3 ; 5] par $f(x)=\dfrac{-2x-1}{\left(x^2+x-4\right)^2}$.

1°) Justifier que f est bien définie sur l'intervalle [3 ; 5] et est continue sur l'intervalle [3 ; 5].

2°) Calculer $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

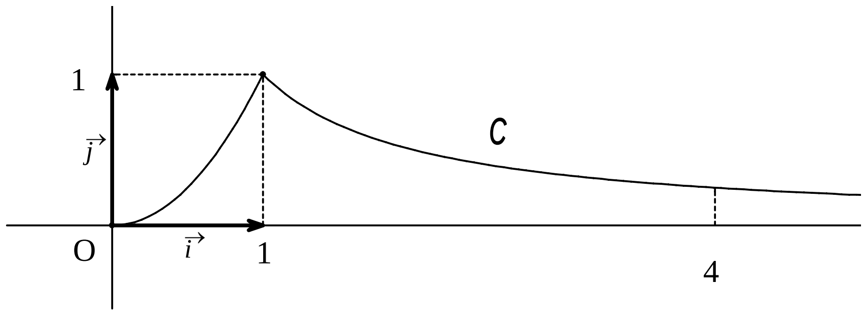
II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}$.

1°) Vérifier que pour tout réel x, on a : $f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.

2°) Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln 2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

III. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=x^2$ si $0\leqslant x\leqslant 1$ et $f(x)=\dfrac{1}{x}$ si $x\geqslant 1$.

On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$ (unités : 1,5 cm sur chaque axe).



Calculer l'aire sous la courbe entre 0 et 4.
Donner la valeur exacte en unités d'aire puis la valeur arrondie au centième en cm^2.

IV. 1°) Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$ pour x réel positif ou nul.

2°) Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, on a : $1-x\leqslant\dfrac{1}{1+x}\leqslant 1-x+x^2$.

3°) Déduire des résultats précédents un encadrement de $\ln(1+x)$ pour tout $x\geqslant 0$.

V. Le nombre de personnes atteintes par une maladie contagieuse est égal à $\mathrm{N}(t)=1000\left(1-\mathrm{e}^{-0,2t}\right)$, où t désigne le nombre de jours depuis le début de l'épidémie.

On considère que la valeur moyenne de la fonction N sur l'intervalle [0 ; 30] est une bonne approximation du nombre moyen de malades par jour sur une période de 30 jours.
Calculer ce nombre moyen (donner une valeur approchée à l'unité).

TS # Corrigé de l'interrogation écrite sur les intégrales N°1

I. 1°) Considérons le polynôme x^2+x-4.
Son discriminant est égal à : $\Delta=17$.

$\Delta>0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$:

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\ ;\ x_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

Or $x_1\approx-2{,}5$ et $x_2\approx1{,}56$ donc aucune des deux racines n'appartient à l'intervalle [3 ; 5].
Par conséquent, *f* est bien définie sur l'intervalle [3 ; 5].

f est continue sur l'intervalle [3 ; 5] car *f* est une fonction rationnelle.

2°) $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{x^2+x-4}\right]_3^5=\frac{1}{26}-\frac{1}{8}=-\frac{9}{104}$

II. 1°) $\displaystyle\mathrm{e}^x-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=\frac{\mathrm{e}^x\left(1+\mathrm{e}^x\right)-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=\frac{\cancel{\mathrm{e}^x}+\mathrm{e}^{2x}-\cancel{\mathrm{e}^x}}{1+\mathrm{e}^x}=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}=f(x)$

2°)

$$\int_0^{\ln 2} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\ln 2}\left(\mathrm{e}^x-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x=\left[\mathrm{e}^x-\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)\right]_0^{\ln 2}=\left[\mathrm{e}^{\ln 2}-\ln\left(1+\mathrm{e}^{\ln 2}\right)\right]-\left[\mathrm{e}^0-\ln\left(1+\mathrm{e}^0\right)\right]=1-\ln 3+\ln 2$$

III. La fonction *f* est définie, continue et positive sur l'intervalle [0 ; 4] donc l'aire sous la courbe entre 0 et 4 est donnée par :

$$\mathcal{A}=\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x+\int_1^4\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\ln x\right]_1^4=\frac{1}{3}+2\ln 2\ \text{u.a.}$$

Relation de Chasles

Or 1 u.a. $=(1{,}5\times1{,}5)=2{,}25\ \text{cm}^2$

Donc $\mathcal{A}=\left(\frac{1}{3}+2\ln 2\right)\times2{,}25\ \text{cm}^2$.

En utilisant la calculatrice, on trouve : $\mathcal{A}\approx3{,}87\ \text{cm}^2$ (valeur arrondie au centième)

IV. 1°) $\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t=\left[\ln(1+t)\right]_0^x=\ln(1+x)-\ln 1=\ln(1+x)$

2°) Démontrons que pour tout réel x positif ou nul, on a : $1-x \leqslant \dfrac{1}{1+x} \leqslant 1-x+x^2$.

$$1-x-\frac{1}{1+x}=1-x-\frac{1}{1+x}=\frac{(1-x)(1+x)-1}{1+x}=-\frac{x^2}{1+x}$$

$-x^2 \leqslant 0$ et $1+x>0$ pour $x \geqslant 0$ donc $-\dfrac{x^2}{1+x} \leqslant 0$; par suite, on a : $1-x \leqslant \dfrac{1}{1+x}$.

$$\frac{1}{1+x}-\left(1-x+x^2\right)=\frac{1-1-x+x+x^2-x^2+x^3}{1+x}=\frac{x^3}{1+x}$$

$\dfrac{x^3}{1+x} \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$; par suite, on a : $\dfrac{1}{1+x} \leqslant 1-x+x^2$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 1-x \leqslant \dfrac{1}{1+x} \leqslant 1-x+x^2$

3°) L'intégration conserve l'ordre.

Or pour tout réel t positif ou nul, on a : $1-t \leqslant \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1-t+t^2$.

Donc pour $x \geqslant 0$ on a :

$$\int_0^x (1-t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \left(1-t+t^2\right)\mathrm{d}t.$$

$$\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x \leqslant \ln(1+x) \leqslant \left[t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\right]_0^x$$

$$\boxed{x-\frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}}$$

V. On calculer la valeur moyenne de la fonction N sur l'intervalle [0 ; 30].

$$\mu=\frac{1}{30}\int_0^{30} \mathrm{N}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{30}\int_0^{30} 1000\left(1-\mathrm{e}^{-0,2t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1000}{30}\left[t+\frac{1}{0,2}\mathrm{e}^{-0,2t}\right]_0^{30}$$

$$=\frac{100}{3}\left(30+\frac{1}{0,2}\mathrm{e}^{-6}-\frac{1}{0,2}\mathrm{e}^{0}\right)$$

$$=\frac{100}{3}\left(30-5+5\mathrm{e}^{-6}\right)$$

$\mu \approx 834$ (valeur arrondie à l'unité)

Le nombre moyen de malades est environ égal à 834.

TS

Interrogation écrite sur les intégrales N°2

(40 minutes)

I. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 2\right)$.

Calculer $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

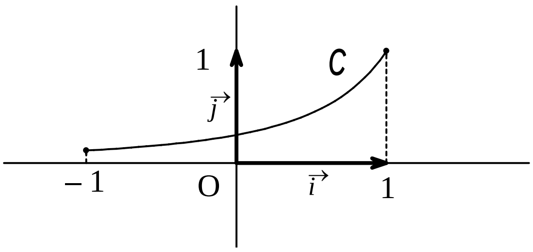
II. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+7}{x-1}$.

1°) Déterminer des réels a et b tels que pour tout réel $x > 1$, on ait : $f(x) = a + \dfrac{b}{x-1}$.

2°) Calculer $\displaystyle\int_{2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

III. Soit f la fonction définie sur l'intervalle [– 1 ; 1] par $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$.

On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unités : 2 cm en abscisses ; 1,5 cm en ordonnées).



Calculer l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ exprimée en unités d'aire puis en cm^2.

IV. Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ telle que pour tout réel $x \geqslant 1$, on ait :
$\dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Donner un encadrement de $\displaystyle\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

V. Dans une ville, une étude statistique a permis d'établir qu'entre le 1$^{\text{er}}$ janvier 1990 et le 1$^{\text{er}}$ janvier 2002, le taux de ménages équipés d'un ordinateur est modélisé par la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,1t}}{4+\mathrm{e}^{0,1t}}$, où t désigne la durée écoulée en années depuis le 1$^{\text{er}}$ janvier 1990.
Calculer le taux de ménages équipés d'un ordinateur sur la période du 1$^{\text{er}}$ janvier 1998 au 1$^{\text{er}}$ janvier 2002.

TS Corrigé de l'interrogation écrite sur les intégrales N°2

I. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 2\right)\mathrm{d}x = \underbrace{\left[\frac{\left(\mathrm{e}^x - 2\right)^2}{2}\right]_{\ln 2}^{\ln 4}}_{\text{forme } u\,u'} = \frac{\left(\mathrm{e}^{\ln 4} - 2\right)^2}{2} - \frac{\left(\mathrm{e}^{\ln 2} - 2\right)^2}{2} = \frac{(4-2)^2}{2} - \frac{(2-2)^2}{2} = 2$

II.

1°)

1ère méthode :

On pose $g(x) = a + \dfrac{b}{x-1}$ pour tout réel $x > 1$.

Pour tout réel $x > 1$, on a : $g(x) = \dfrac{ax - a + b}{x-1}$.

Pour que $f(x) = g(x)$ pour tout réel $x > 1$, IL SUFFIT de choisir a et b tels que $\begin{cases} a = 5 \\ -a + b = 7 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} a = 5 \\ b = 12 \end{cases}$.

Donc pour tout réel $x > 1$, $f(x) = 5 + \dfrac{12}{x-1}$.

2e méthode :

$$\forall x > 1 \quad f(x) = \frac{5x+7}{x-1}$$

$$= \frac{5(x-1)+12}{x-1}$$

2°) $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^5 \left(5 + \frac{12}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \left[5x + 12\ln|x-1|\right]_2^5 = 15 + 12\ln 4 = 15 + 24\ln 2$

III. La fonction f est définie, continue et positive sur l'intervalle [–1 ; 1] donc l'aire sous la courbe sur l'intervalle [–1 ; 1] est donnée par :

$\mathcal{A} = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x-2}\right]_{-1}^{1} = \frac{-1}{1-2} - \frac{-1}{-1-2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ u.a.

Or 1 u.a. $= (2\text{ cm}) \times (1{,}5\text{ cm}) = 3\ \text{cm}^2$ donc $\mathcal{A} = \dfrac{2}{3} \times 3 = 2\ \text{cm}^2$.

IV. D'après l'hypothèse, on peut dire que $\forall x \in [1\,;2]$ $\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

L'intégration conserve l'ordre donc :

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 1\,\mathrm{d}x$$

$$\left[2\sqrt{x}\right]_1^2 \leqslant \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant [x]_1^2$$

$$2\sqrt{2}-2 \leqslant \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1$$

V.

Pour calculer le taux de ménages équipés d'un ordinateur sur la période du 1er janvier 1998 au 1er janvier 2002, on calculer la valeur moyenne μ de *f* sur l'intervalle [8 ; 12] (car on a $1998 = 1990 + 8$ et $2002 = 1990 + 12$).

$$\mu = \frac{1}{12-8}\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}\int_8^{12} \frac{\mathrm{e}^{0,1t}}{4+\mathrm{e}^{0,1t}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}\left[10\ln\left|\ 4+\mathrm{e}^{0,1t}\ \right|\right]_8^{12}$$

$$= \frac{1}{4}\left[10\ln\left(4+\mathrm{e}^{0,1t}\right)\right]_8^{12}$$ (les barres de valeur absolue ne servent à rien)

$$= \frac{1}{4}\left[10\ln\left(4+\mathrm{e}^{1,2}\right)-10\ln\left(4+\mathrm{e}^{0,8}\right)\right]$$

$$= \frac{10}{4}\ln\frac{4+\mathrm{e}^{1,2}}{4+\mathrm{e}^{0,8}}$$ (les deux lignes qui suivent ne sont pas forcément utiles)

$$= \frac{5}{2}\ln\frac{4+\mathrm{e}^{1,2}}{4+\mathrm{e}^{0,8}}$$ (valeur exacte)

$= 0,4049149154...$ (utilisation de la calculatrice)