1$^{\text{ère}}$ S3

Contrôle du vendredi 9 avril 2010 (2 heures)

Prénom et nom : …………………………………………………

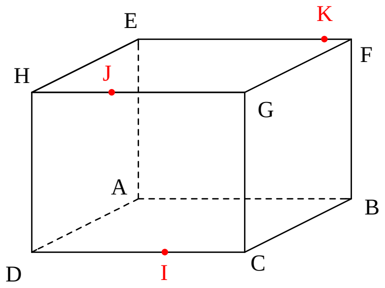
Note : …… / 20

• **Rédiger à l'encre, sans rature. Ne rien écrire en dehors de ce qui est demandé.**

• **Pour les exercices où le détail de la démarche est demandé, mettre les résultats bien en évidence en les encadrant en rouge à la règle au fur et à mesure.**

• **L'usage du symbole d'équivalence ⇔ est autorisé.**

I. (3 points) 1°) Tracer la section du pavé droit ABCDEFGH par le plan (IJK).
On précise que I, J, K appartiennent respectivement aux arêtes [CD], [GH] et [EF].
On nommera des points.



Combien de faces du pavé sont coupées par le plan (IJK) ?

2°) Les droites (IK) et (AE) sont-elles coplanaires ?
Répondre sans justifier ni faire de phrase par oui ou par non.

……………

II. (1 point) Donner l'ensemble des solutions S dans l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$ de l'inéquation $\sqrt{2}\cos x \leqslant 1$.
Le détail de la démarche n'est pas demandé.

S = …………………………………....

III. (1 point) Donner, sans justifier, l'ensemble des solutions S dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos 3x = \cos 2x$.

S = ………………………………...

IV. (2 points) 1°) Démontrer que pour tout réel x, on a : $\cos^3 x \sin x + \sin^3 x \cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$.

2°) En procédant de manière analogue, donner une formule simplifiée de $\cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x$.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Dans les exercices V et VI, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

V. (4 points) Soit D la droite d'équation réduite $y = 2 - \dfrac{x}{2}$. La droite D coupe l'axe des abscisses en A et l'axe des ordonnées en B. Faire une figure au brouillon.

1°) Déterminer par le calcul les coordonnées de A et B.

2°) Déterminer l'équation réduite de la droite D' passant par A et perpendiculaire à D.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

VI. (1 point) Soit Δ la droite d'équation cartésienne $3x - 4y + 7 = 0$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ' passant par le point A(– 2 ; 1) et perpendiculaire à Δ.

Donner le résultat sans détailler la démarche.

Δ' : ………………………………………….

VII. (1 point) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{3 - u_n}$.

Donner la valeur de u_2 : $u_2 =$.......... (indiquer juste le résultat sans détailler aucun calcul).

VIII. (3 points) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{2n-1}{n+2}$.

1°) Étudier le sens de variation de la suite (u_n). Faire les traits de fraction à la règle.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

2°) Exprimer $2 - u_n$ en fonction de n. Donner le résultat sans détailler la méthode.

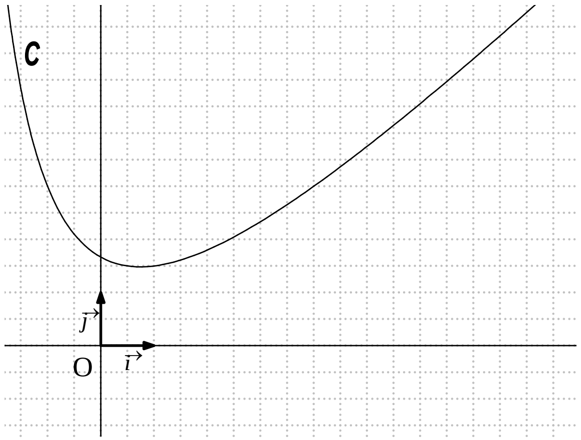
$2 - u_n =$ …………………….

IX. (1 point) Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$.

On note (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0=5$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Sur le graphique ci-dessous, faire apparaître les cinq premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses sans calcul selon le procédé usuel. Laisser les constructions apparentes (pointillés à la règle).



À l'aide du graphique, conjecturer le sens de variation de (u_n). Compléter la phrase :

D'après le graphique, on peut penser que la suite (u_n) est ………………………………………………………..

X. (1 point) Lors d'une fête foraine, deux amateurs de sensations fortes veulent essayer le nouveau manège du parc qui s'appelle la "chute libre". Le principe est le suivant : une nacelle est en glissière le long d'un axe vertical haut de 71 mètres qui, une fois stabilisée au sommet, est propulsée vers le bas, pour être finalement stoppée dans le dernier mètre de chute.

On admet que la distance parcourue $d(t)$ par la nacelle lorsqu'elle est lâchée des 71 mètres suit la loi horaire $d(t)=4{,}5t^2+9t$ où t est exprimé en secondes et $d(t)$ en mètres.

Calculer la vitesse instantanée de la nacelle au bout de 3 s. Donner le résultat sans détailler le calcul.

……

XI. (2 points) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3-2x^2+1}{x^2}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique Δ, dont on donnera une équation, en $+\infty$ et $-\infty$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

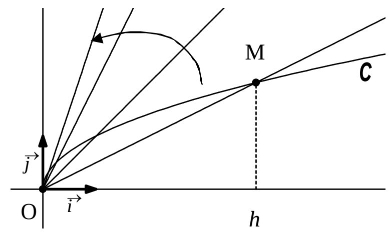
Question bonus

Dans le plan muni d'un repère d'origine O, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction racine carrée (voir graphique ci-contre).

Soit M un point mobile de $\mathcal{C}$ d'abscisse h avec $h > 0$.

1°) Que peut-on dire la position limite de la droite (OM) lorsque h tend vers 0^+ ? Répondre graphiquement sans faire de calcul.

2°) Calculer le coefficient directeur de la droite (OM) en fonction de h et justifier le résultat du 1°) par un calcul.

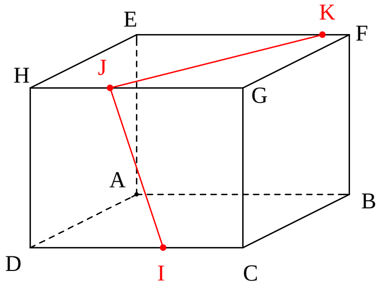


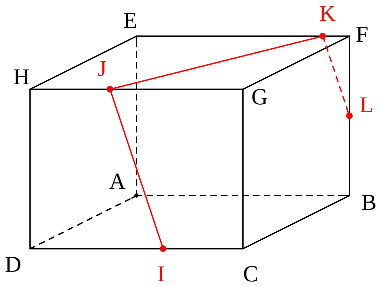
1$^{\text{ère}}$ S3 — Corrigé de l'interrogation écrite du 9 avril 2010

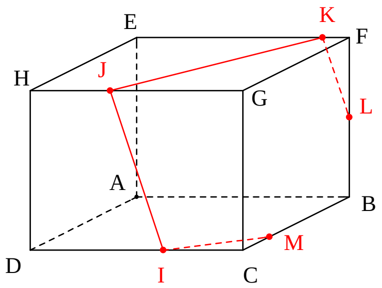
I.

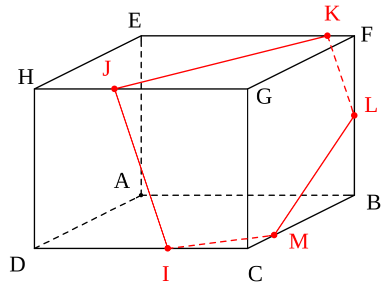
1°) **Tracé de la section du pavé droit par le plan (IJK)**

1$^{\text{ère}}$ méthode : par parallélisme (on utilise le fait que dans un pavé droit, les faces opposées sont parallèles)



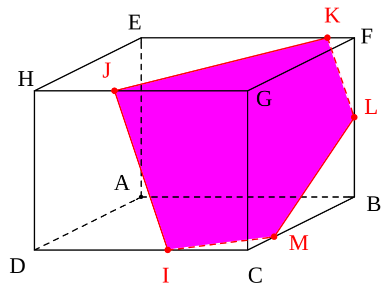




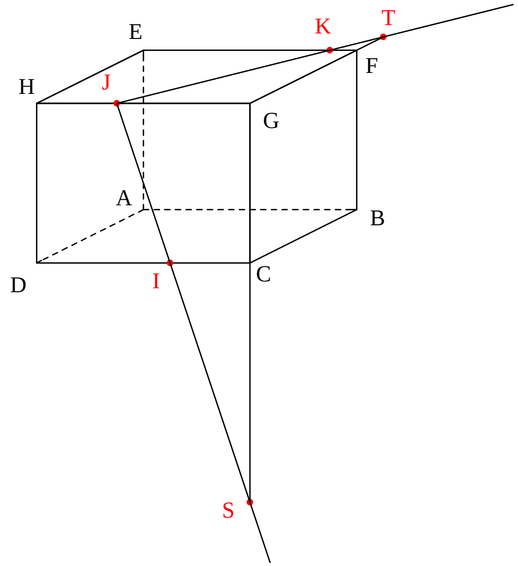


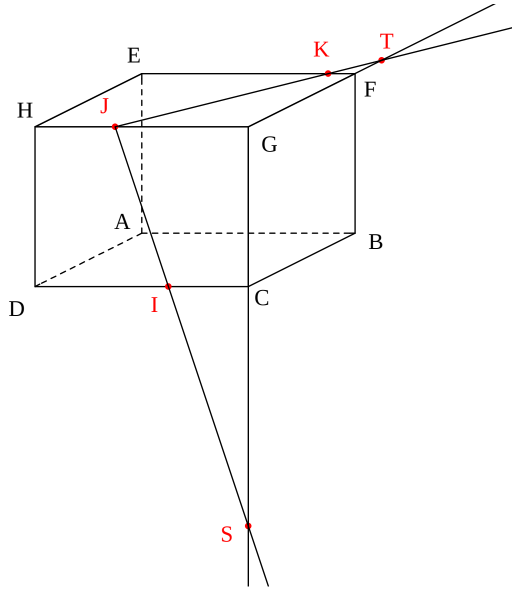
La section du pavé droit par le plan (IJK) est le pentagone IJKLM (on a : (IJ) // (KL) et (IM) // (JK)).

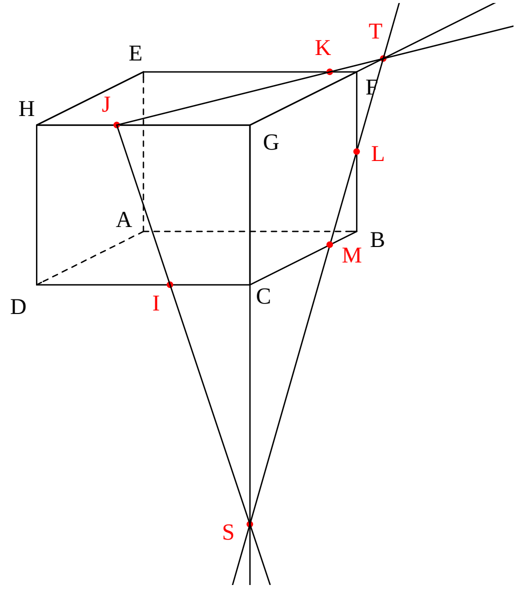
Le plan (IJK) coupe 5 faces du pavé droit ; seule la face AEHD n'est pas coupée par le plan (IJK).

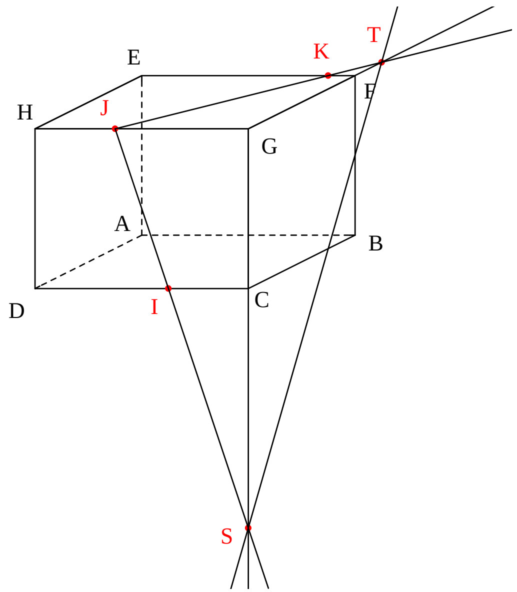


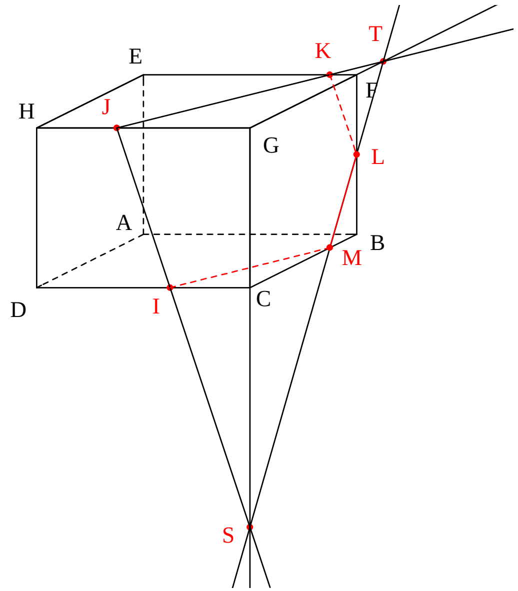
2$^{\text{e}}$ méthode : par tracé hors solide

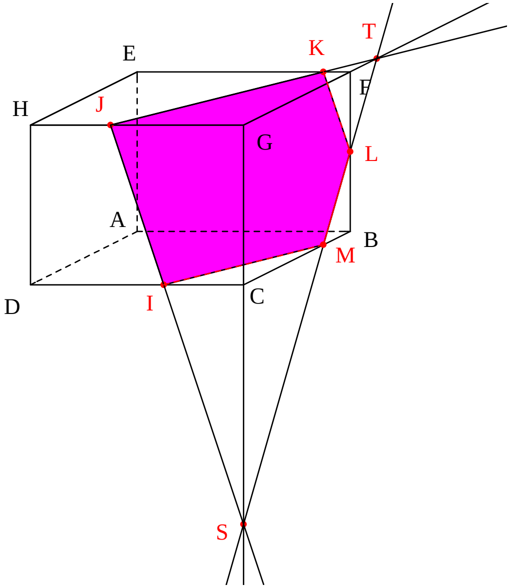



E
K
T
H
J
F
G
A
B
D
I
C
S


E
K
T
H
J
F
G
L
A
B
M
D
I
C
S


E
K
T
H
J
F
G
A
B
D
I
C
S


E
K
T
H
J
F
G
L
A
B
M
D
I
C
S



2°) Les droites (IK) et (AE) ne sont pas coplanaires.

II. On utilise un cercle trigonométrique comme toujours pour les inéquations trigonométriques.

$$\sqrt{2}\cos x \leq 1 \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

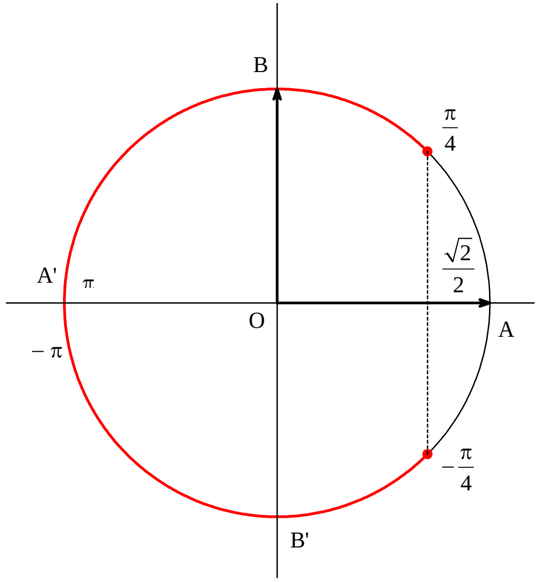
Soit x un réel et M son image sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

M a pour coordonnées cartésiennes ($\cos x$; $\sin x$).

L'inégalité $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ exprime que l'abscisse de M est inférieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Or $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est le cosinus de $\frac{\pi}{4}$ (valeur remarquable).

On construit le point image de $\frac{\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique (construction par bissectrice, au compas ou à l'aide des carreaux).



On obtient ainsi la valeurs $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur l'axe des abscisses.

Les images des solutions sont tous les points du cercle $\mathcal{C}$ qui ont une abscisse inférieure ou égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Il s'agit des points qui appartiennent à l'arc en rouge sur la figure.

On peut ainsi donner l'ensemble des solutions de l'inéquation.

$$S = \left[-\pi\,;-\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}\,;\pi\right]$$

IV. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 3x = \cos 2x$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow \cos 3x = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2x + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 3x = -2x + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 5x = 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \frac{2k'\pi}{5} \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\boxed{S=\{2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{2k'\pi}{5},\ k'\in\mathbb{Z}\right\}}$$

En plaçant les images des solutions sur le cercle trigonométrique, on s'aperçoit aisément que l'ensemble S des solutions peut s'écrire sous la forme d'un seul ensemble (car la deuxième famille des solutions est incluse dans la première).

$$\boxed{S=\left\{\frac{2k\pi}{5},\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$$

IV.

1°) **Démontrons que pour tout réel x, on a : $\cos^3 x\sin x+\sin^3 x\cos x=\dfrac{\sin 2x}{2}$.**

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\quad \cos^3 x\sin x+\sin^3 x\cos x&=\cos^2 x(\cos x\sin x)+\sin^2 x(\cos x\sin x)\\&=(\cos x\sin x)(\cos^2 x+\sin^2 x)\\&=(\cos x\sin x)\times 1\\&=\cos x\sin x\\&=\frac{\sin 2x}{2}\end{aligned}$$

2°) **Déterminons une formule simplifiée de $\cos^3 x\sin x-\sin^3 x\cos x$.**

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\quad \cos^3 x\sin x-\sin^3 x\cos x&=\cos^2 x(\cos x\sin x)-\sin^2 x(\cos x\sin x)\\&=(\cos x\sin x)(\cos^2 x-\sin^2 x)\\&=(\cos x\sin x)\times\cos 2x\\&=\frac{\sin 2x}{2}\times\cos 2x\\&=\frac{\sin 2x\times\cos 2x}{2}\\&=\frac{\frac{\sin(2\times 2x)}{2}}{2}\\&=\frac{\sin 4x}{4}\end{aligned}$$

V.

1°) **Déterminons les coordonnées de A et B.**

D coupe l'axe des abscisses en A donc $y_A=0$.

On a donc : $0=2-\dfrac{x_A}{2}$ d'où $x_A=4$.

Donc A(4 ; 0).

D coupe l'axe des ordonnées en B donc $x_B=0$.

On a donc : $y_B=2-\dfrac{0}{2}$ d'où $y_B=2$.

Donc A(4 ; 0) et B(0 ; 2).

2°) **Déterminons l'équation réduite de la droite D' passant par A et perpendiculaire à D.**

1ère méthode :

On sait que le vecteur $\vec{u}\left(1;-\dfrac{1}{2}\right)$ est un vecteur directeur de D donc c'est un vecteur normal à D'.

Soit M(x ; y) un point quelconque du plan.

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\in D'&\text{ si et seulement si } \overrightarrow{\mathrm{AM}}\perp\vec{u}\\&\text{ si et seulement si } (x_M-x_A)\times 1+(y_M-y_A)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0\\&\text{ si et seulement si } (x-4)\times 1+(y-0)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0\\&\text{ si et seulement si } x-4-\frac{1}{2}y=0\\&\text{ si et seulement si } y=2x-8\end{aligned}$$

D' a pour équation réduite $y=2x-8$.

2e méthode :

Rappel : condition d'orthogonalité de deux droites dans un repère orthonormé

Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées <u>dans un repère orthonormé</u> sont orthogonales si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à –1.

L'équation réduite de D' s'écrit $y=mx+p$.

D a pour coefficient directeur $-\dfrac{1}{2}$.

$D'\perp D$ donc $m\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$ d'où $m=2$.

L'équation réduite de D' s'écrit alors $y=2x+p$.

A $\in D'$ donc $y_A=2x_A+p$ d'où $0=2\times 4+p$ donc $p=-8$.

D' a pour équation réduite $y=2x-8$.

VI. $\Delta' \ : \ 4x+3y+5=0$

Solution détaillée :

Le vecteur $\vec{u}(4\,;3)$ est un vecteur directeur de Δ.
Δ' ⊥ Δ donc $\vec{u}$ est un vecteur normal à Δ'.

Par suite, Δ' admet une équation cartésienne de la forme $4x+3y+c=0$ avec $c\in\mathbb{R}$.

$\mathrm{A}\in\Delta'$ donc $4x_{\mathrm{A}}+3y_{\mathrm{A}}+c=0$
d'où $4\times(-2)+3\times 1+c=0$
soit $c=5$

Donc Δ' a pour équation cartésienne $4x+3y+5=0$.

VII. $u_2=-\dfrac{3}{7}$

VIII.

Critères de réussite pour cet exercice sur les suites :

- quantification de phrases mathématiques
- respect des notation : parenthèses pour désigner la suite

1°) Il y a essentiellement deux méthodes possibles : méthode par différence et méthode par étude de fonction.

1ère méthode : par différence

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}-u_n=\frac{2(n+1)-1}{(n+1)+2}-\frac{2n-1}{n+2}$$
$$=\frac{2n+1}{n+3}-\frac{2n-1}{n+2}$$
$$=\frac{(2n+1)(n+2)-(2n-1)(n+3)}{(n+3)(n+2)}$$
$$=\frac{(2n^2+5n+2)-(2n^2+5n-3)}{(n+3)(n+2)}$$
$$=\frac{5}{(n+3)(n+2)}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad \frac{5}{(n+3)(n+2)}>0$$

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad u_{n+1}-u_n>0$$

On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 0.

2e méthode : par étude de fonction

Considérons la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$.

On a : $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=f(n)$ (on dit que *f* est la fonction associée à la suite (u_n)).

f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ car *f* est une fonction rationnelle (c'es même une fonction homographique, c'est-à-dire quotient de deux fonctions affines).

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}\qquad f'(x)=\frac{2(x+2)-(2x-1)}{(x+2)^2}$$
$$=\frac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2}$$
$$=\frac{5}{(x+2)^2}$$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}\quad f'(x)>0$.

On en déduit que *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Par conséquent, la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 0.

2°) $2-u_n=2-\dfrac{2n-1}{n+2}=\dfrac{2(n+2)-(2n-1)}{n+2}=\dfrac{2n+4-2n+1}{n+2}=\dfrac{5}{n+2}$

IX. D'après le graphique, on peut penser que la suite (u_n) est décroissante à partir de l'indice 0.

X. La vitesse instantanée au bout de 3 secondes est de 36 $\mathrm{m}\bullet\mathrm{s}^{-1}$.

Explication :

$d'(t)=9t+9$ d'où $d'(3)=9\times 3+9=27+9=36$

J'aurais dû demander la vitesse moyenne entre les instants 0 et 3.

XI.

Méthode : on effectue une réécriture de $f(x)$.

$$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f(x)=\frac{x^3}{x^2}-2\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}=x-2+\frac{1}{x^2}$$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f(x)-(x-2)=\dfrac{1}{x^2}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

De même que $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y=x-2$ pour asymptote oblique en +∞ et – ∞.

Question bonus : les droites qui tournent

Cet exercice met en œuvre les notions suivantes :

- notion de « point mobile » ou « point variable » (et son corollaire, la notion de « point fixe »)
- notion de « droite mobile » ou « droite variable » (et son corollaire, la notion de « droite fixe »)
- notion de « position limite » (avec le langage « La droite vient se confondre … »)

Compétences mises en œuvre :

- observer
- démontrer

Quelques questions à se poser

Quel est le point qui est fixe ?
Quel est le point qui est le point mobile ?

La position limite est une droite fixe.

Voici quelques phrases que j'ai trouvées,

- « La droite (OM) se rapproche de l'axe des ordonnées sans qu'elle lui soit parallèle. »
- « La droite (OM) se rapproche de l'axe des ordonnées sans qu'elle lui soit parallèle. »
- « Elles sont confondues. »
- « La droite (OM) lorsque *h* tend vers 0^+ ».
- « La droite (OM) est toujours située en dessous de la fonction $f(x)$. »
- « Si *h* tend vers 0^+, la droite (OM) se confond avec l'axe des abscisses. »
- « Quand *h* tend vers 0^+, la droite (OM) tend à se confondre avec l'axe des ordonnées. »
- « La courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite (OM) pour $x<h$ et au-dessous de la droite (OM) pour $x>h$. »

1°) Lorsque *h* tend vers 0^+, on observe que la droite (OM) se rapproche de l'axe des ordonnées.

2°) Le coefficient directeur de la droite (OM) est égal à : $m=\dfrac{y_M-y_O}{x_M-x_O}=\dfrac{\sqrt{h}-0}{h-0}=\dfrac{\sqrt{h}}{h}=\dfrac{\cancel{\sqrt{h}}}{\sqrt{h}\times\cancel{\sqrt{h}}}=\dfrac{1}{\sqrt{h}}$

$\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$

Lorsque *h* tend vers 0^+, le coefficient directeur de la droite (OM) tend vers + ∞ ce qui justifie que la position limite de la droite (OM) est l'axe des ordonnées.

On pourra noter ce qu'a remarqué un élève : lorsque *h* tend vers 0^+, x_M et y_M tendent tous les deux vers 0.

On peut dire que la courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées pour tangente verticale au point O.

Remarque

En fait, c'est plutôt de la demi-droite [OM) qui nous intéresse ici car $h>0$.
La position limite de la demi-droite [OM) quand *h* tend vers 0^+ est la demi-droite [O*y*).
La courbe $\mathcal{C}$ admet la demi-droite [O*y*) pour demi-tangente verticale au point O.