TS3 **Interrogation écrite du lundi 4 mai 2009**

Prénom et nom : ………………………………. **Note : ……/20**

I. (1 point) On admet que pour tout réel $x \in [0\,;1]$, on a : $-\dfrac{x}{2}+1 \leqslant \dfrac{1}{1+x^2} \leqslant -\dfrac{x^2}{2}+1$.

En déduire un encadrement de $A=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Détailler la démarche.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

II. (1 point) Soit *f* une fonction définie et continue sur l'intervalle $I=[2\,;6]$.

On sait que pour tout réel $t \in I$, on a : $-\dfrac{1}{2} \leqslant f(t) \leqslant 3$.

Donner un encadrement de $\displaystyle\int_2^6 f(t)\,\mathrm{d}t$. Détailler la démarche.

……

……

……

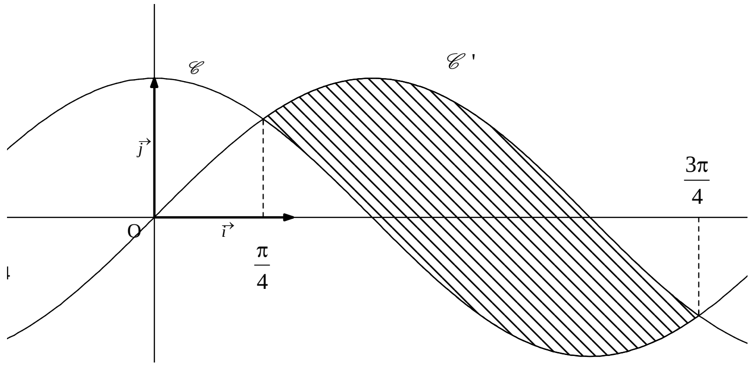
……

……

……

……

III. (1 point) On donne ci-dessous les représentations graphiques respectives $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}\,'$ des fonctions cosinus et sinus dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.



Donner la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré.
On donnera directement la valeur exacte en unité d'aire sans détailler la démarche.

$\mathscr{A}$ =………… u.a.

IV. (3 points) Pour tout réel *x*, on pose $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$.

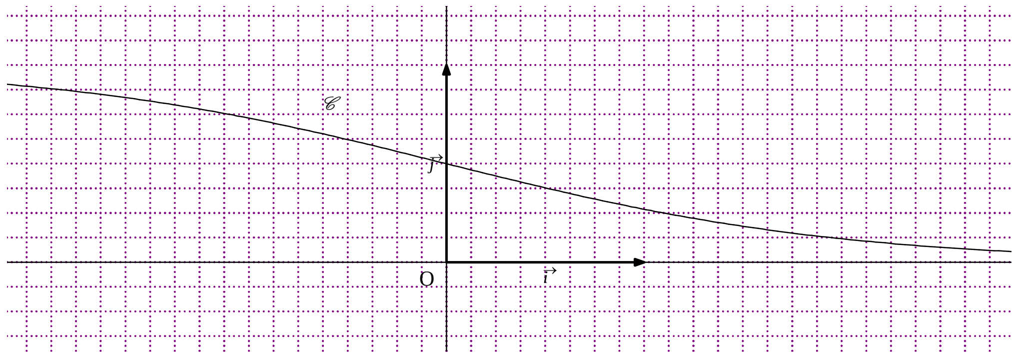
1°) On donne ci-dessous la représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^t+1}$.

Que représente le nombre $F(2)$ sur le graphique ? Colorier pour illustrer le nombre.

……

……

……



2°) a) Démontrer que pour réel t, on a : $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{t}+1}=\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-t}}$.

b) Calculer $F(x)$ en fonction de x.

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. Comment peut-on interpréter graphiquement ce résultat ?

………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………

V. (0,5 point) Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $I=[a\,;b]$ $(a<b)$.

Donner la définition de la valeur moyenne μ de f sur l'intervalle I (donner la formule sans faire de phrase).

$\mu=$ ……………………..

VI. (0,5 point) Vrai ou faux ? Répondre sans justifier.

Pour tout réel strictement positif a, on a : $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=2\ln a$.

VII. (3 points) Soit z un nombre complexe non nul. On note θ un argument de z.

Donner un argument des nombres complexes $\bar{z}$, $-z$, $\dfrac{1}{z}$, $-\dfrac{1}{\bar{z}}$, $\mathrm{i}z$, $\bar{z}^{-2}$ en fonction de θ parmi les choix suivants : θ, $\theta+\pi$, $-\theta$, 2θ, $\pi-\theta$, $\theta+\dfrac{\pi}{2}$, -2θ, $\theta-\dfrac{\pi}{2}$. Le détail n'est pas demandé.

$\arg\bar{z}=$ ……	$\arg(-z)=$ ……	$\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)=$ ……	$\arg\left(-\dfrac{1}{\bar{z}}\right)=$ ……	$\arg(\mathrm{i}z)=$ ……	$\arg\left(\bar{z}^{-2}\right)=$ ……

Bonus

Calculer $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{1+\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.

………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………

Corrigé

III. Le domaine hachuré est défini par le système d'inéquations $\begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{3\pi}{4} \\ \cos x \leqslant y \leqslant \sin x \end{cases}$.

J'aurais pu mettre en question bonus.

Caractériser le domaine hachuré par un système d'inéquations.

Bonus

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1+\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(1+\ln x)^2}{2}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{3}{2}$$