**1$^{\text{ère}}$ S3**

# Interrogation écrite du vendredi 19 mars 2010 (1 heure)

**Prénom et nom : …………………………………………………** **Note : …… / 20**

---

- **Rédiger à l'encre, sans rature.**

- **Pour les exercices nécessitant une rédaction, on mettra bien les résultats en évidence en les encadrant en rouge à la règle au fur et à mesure.**

- **L'usage du symbole d'équivalence $\Leftrightarrow$ est autorisé.**

---

**I. (2 points)** Soit $a$ un réel tel que $\cos a = -\frac{2}{3}$. Donner la valeur de $\cos 2a$ (ne pas détailler le calcul).

$\cos 2a =$ ………………..

---

**II. (1 point)** Calculer la valeur exacte de $\cos \frac{7\pi}{12}$ (sans détailler le calcul).

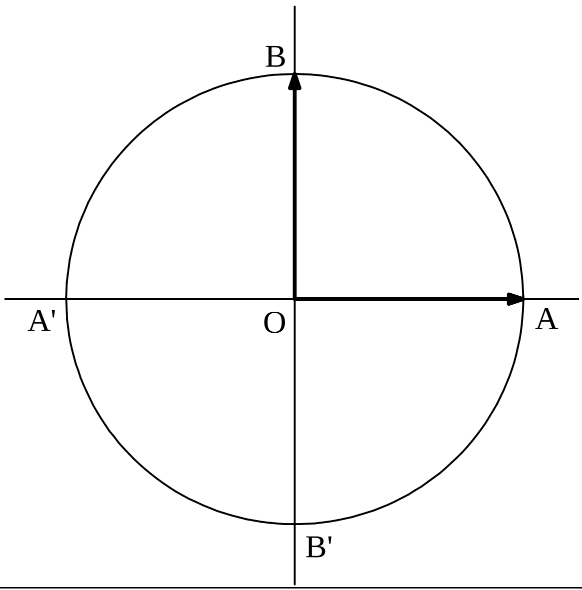
$\cos \frac{7\pi}{12} =$ .....................

---

**III. (2 points)** Donner l'ensemble des solutions $S$ dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ de l'inéquation $\sin x \leq \frac{1}{2}$.

Le détail de la démarche n'est pas demandé.
Sur le cercle trigonométrique donné ci-contre, représenter en rouge l'arc ou les arcs auxquels appartiennent les solutions (en faisant notamment attention à bien marquer les extrémités du ou des arcs).

$S =$ ……………………………….....




---

**IV. (3 points)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $1 - 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ (1). Détailler la démarche.

**Dans les exercices V à IX ainsi que dans la question bonus, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.**

---

**V. (2 points)** On considère les droites $D_1$, $D_2$, $D_3$, $D_4$ d'équations réduites respectives $y=2x+3$, $y=\dfrac{1}{2}x+3$, $y=\dfrac{1-x}{2}$, $y=-2x+4$. Parmi ces droites, certaines sont perpendiculaires entre elles. Indiquer un couple de droites en justifiant brièvement.

……………………………………………………………………………………………………………….……..….

……………………………………………………………………………………………………………….……..….

……………………………………………………………………………………………………………….……..….

……………………………………………………………………………………………………………….……..….

……………………………………………………………………………………………………………….……..….

---

**Pour les exercices VI et VII,** répondre sans détailler les calculs ni rédiger.

---

**VI. (2 points)** On considère la droite $D$ d'équation réduite $y=\dfrac{1}{3}x+1$ et le point A de coordonnées (4 ; 1).

1°) Donner l'équation réduite de la droite *D*' perpendiculaire à *D* passant par A et de la droite *D*'' parallèle à *D* passant par A.

Répondre sans détailler les calculs.

*D*' : ……………………….        *D*'' : ……………………………..

2°) Donner une équation cartésienne (sous forme développée) du cercle Γ de diamètre [OA].

Γ : ……………………………...………….

---

**VII. (2 points)** On considère l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan dont les coordonnées $x$ et $y$ vérifient la relation $x^2+y^2=13$.

1°) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $\mathcal{C}$. Compléter la phrase ci-dessous :

$\mathcal{C}$ est ……………………………………………………………………………………………………..

2°) Préciser les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses. Compléter la phrase ci-dessous :

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses sont égales à ………………………………..

Les exercices VIII et IX doivent être rédigés. Les conclusions doivent être clairement formulées et encadrées en rouge. On commencera par faire une recherche au brouillon.

---

**VIII. (3 points)** On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre A(1 ; 0) et de rayon $\sqrt{5}$.
1°) Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ (donner le résultat sous forme développée).
2°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection I et J de $\mathcal{C}$ et de la droite $D$ d'équation cartésienne $2x - y + 1 = 0$. On notera I le point d'abscisse positive.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………..……..…..

……………………………………………………………………………………………………………..……..…..

……………………………………………………………………………………………………………..……..…..

……………………………………………………………………………………………………………..……..…..

……………………………………………………………………………………………………………..……..…..

……………………………………………………………………………………………………………..……..…..

……………………………………………………………………………………………………………..……..…..

……………………………………………………………………………………………………………..……..…..

……………………………………………………………………………………………………………..……..…..

……………………………………………………………………………………………………………..……..…..

……………………………………………………………………………………………………………..……..…..

---

**IX. (3 points)** On donne les points A(3 ; 5), B(– 1 ; 2) et C(6 ; – 1).
Donner une équation cartésienne de la hauteur $\Delta$ du triangle ABC issue de A puis de la hauteur $\Delta'$ du triangle ABC issue de B. On rédigera soigneusement pour au moins l'une des deux hauteurs.
**Question bonus :** calculer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.

……………………………………………………………………………………………………………..……..…..

……………………………………………………………………………………………………………..……..…..

……………………………………………………………………………………………………………..……..…..

……………………………………………………………………………………………………………..……..…..

……………………………………………………………………………………………………………..……..…..

……………………………………………………………………………………………………………..……..…..

………………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………………

---

## Question bonus

On considère la parabole $\mathcal{C}$ d'équation $y = x^2$ . On note A, B, C les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives – 2, 1, 3.
Déterminer la nature du triangle ABC. Justifier.

………………………………………………………………………………………………………………

J’aurais dû mettre une feuille avec diverses remarques notamment sur l’utilisation du symbole d’appartenance, importance des articles.

**1$^{ère}$ S3**

# Corrigé de l'interrogation écrite du 19 mars 2010

**I.**

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 2\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = 2\times\frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

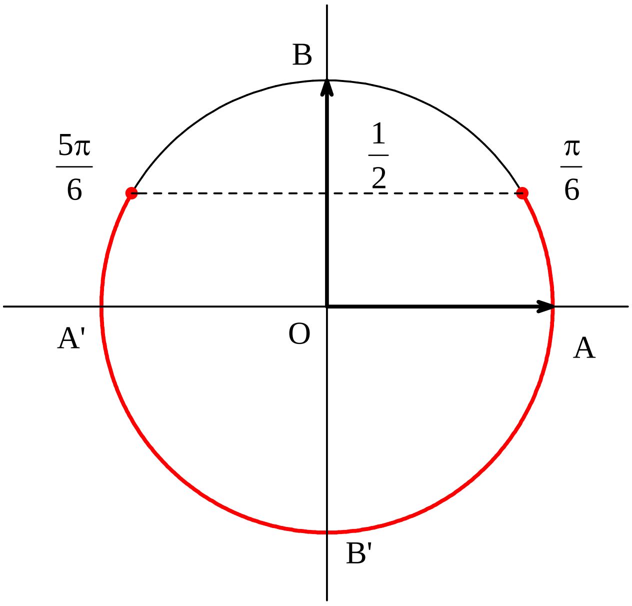
---

**II.**

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{4\pi+3\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\times\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

---

**III.**




$$S = \left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}\,;2\pi\right]$$

---

**IV.** Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $1-2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$ (1).

$(2) \Leftrightarrow \cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2x-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2x=2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x=k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\boxed{S=\left\{\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z}\right\}}$$

---

**V.** $D_1:\ y=2x+3$ ; $D_2:\ y=\dfrac{1}{2}x+3$ ; $D_3:\ y=\dfrac{1-x}{2}$ ; $D_4:\ y=-2x+4$

Toutes les droites sont données par des équations réduites.
Pour déterminer les droites qui sont orthogonales, comme on connaît l'équation réduite de chacune des droites, le plus simple est d'utiliser la condition d'orthogonalité rappelée ci-dessous.

**1ère formulation**

$D:\ y=mx+p$
$D':\ y=m'x+p'$

$D\perp D' \Leftrightarrow m\times m'=-1$ (valable uniquement dans un repère orthonormé)

**2e formulation :**

**Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées <u>dans un repère orthonormé</u> sont orthogonales si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à –1.**

**Avec cette méthode, l'exercice était fait en 5 minutes !**

On aurait pu faire un tableau avec le coefficient directeur de chaque droite.
On regarde les coefficients directeurs dont le produit est égal à – 1.
C'est plus court que de chercher un vecteur directeur de chaque droite.

Le coefficient directeur de $D_1$ est égal à 2 ; le coefficient directeur de $D_3$ est $-\dfrac{1}{2}$.

$2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ donc $D_1 \perp D_3$.

Le coefficient directeur de $D_2$ est égal à $\frac{1}{2}$ ; le coefficient directeur de $D_4$ est égal – 2.

$\frac{1}{2}\times(-2)=-1$ donc $D_2 \perp D_4$.

---

**VI.**

1°) L'équation réduite de $D$' s'écrit $y=mx+p$.

$D$ a pour coefficient directeur $\frac{1}{3}$.

$D' \perp D$ donc $m\times\frac{1}{3}=-1$ d'où $m=-3$.

L'équation réduite de $D$' s'écrit alors $y=-3x+p$.

$\text{A} \in D'$ donc $y_{\text{A}}=-3x_{\text{A}}+p$ d'où $1=-3\times4+p$ donc $p=13$.

$D$' a pour équation réduite $y=-3x+13$.

L'équation réduite de $D$'' s'écrit $y=m'x+p'$.

$D''$ // $D$ donc la droite $D$'' a le même coefficient directeur que $D$ c'est-à-dire $\frac{1}{3}$.

$\text{A} \in D''$ donc $y_{\text{A}}=\frac{1}{3}x_{\text{A}}+p'$ d'où $1=\frac{1}{3}\times4+p'$ donc $p'=-\frac{1}{3}$.

$D$'' a pour équation réduite $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$.

2°)
On utilise la caractérisation d'un cercle défini par un diamètre (beaucoup plus simple que de chercher la distance OA et de chercher les coordonnées du milieu de [OA]).
Soit M($x$ ; $y$) un point quelconque du plan.

$$
\begin{aligned}
\text{M} \in \Gamma &\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{MO}} \bullet \overrightarrow{\text{MA}}=0\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{OM}} \bullet \overrightarrow{\text{AM}}=0\\
&\Leftrightarrow x\times(x-4)+y\times(y-1)=0\\
&\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-y=0
\end{aligned}
$$

Conclusion : $\Gamma$ a pour équation cartésienne $x^2+y^2-4x-y=0$.

**VII.**

1°) La relation $x^2 + y^2 = 13$ s'écrit aussi $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 13$.
On en déduit que $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{13}$.

2°) Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses sont égales à $\sqrt{13}$ et $-\sqrt{13}$.

---

**VIII.**

1°) Déterminons une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.

Une équation de $\mathcal{C}$ s'écrit : $(x-1)^2 + y^2 = 5$ donc $\mathcal{C}$ a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$.

2°) Déterminons les coordonnées des points d'intersection I et J de $\mathcal{C}$ et de la droite $D$ d'équation cartésienne $2x - y + 1 = 0$. On notera I le point d'abscisse positive.

Les coordonnées des points d'intersection éventuels de $\mathcal{C}$ et $D$ sont solutions du système :

$$(S)\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation donne $y = 2x + 1$.

En remplaçant dans la 1ère équation, on obtient $x^2 + (2x+1)^2 - 2x - 4 = 0$ (1).

(1) $\Leftrightarrow x^2 + (2x+1)^2 - 2x - 4 = 0$
$\Leftrightarrow 5x^2 + 2x - 3 = 0$

Les racines de cette équation sont – 1 (racine évidente) et $\dfrac{5}{3}$ (obtenue par produit).

Pour $x = -1$, on obtient $y = 2 \times (-1) + 1 = -1$.
Pour $x = \dfrac{5}{3}$, on obtient $y = 2 \times \dfrac{5}{3} + 1 = \dfrac{13}{5}$.

**Conclusion :**

$\mathcal{C}$ et $D$ se coupent aux points $\mathrm{I}\left(\dfrac{5}{3}\,;\dfrac{13}{3}\right)$ et $\mathrm{J}(-1\,;-1)$.

**IX.** A(3 ; 5), B(– 1 ; 2), C(6 ; – 1)

**Faire une figure.**

● Déterminons une équation cartésienne de Δ.

La hauteur Δ du triangle ABC issue de A est la droite passant par A et perpendiculaire à (BC).

**Ne pas introduire le point H, pied de la hauteur issue de A.**

**1ère méthode :**

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}(7\,;-3)$

Soit M($x$ ; $y$) un point quelconque du plan.

$\mathrm{M} \in \Delta$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$
si et seulement si $(x_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{A}}) \times 7 + (y_{\mathrm{M}} - y_{\mathrm{A}}) \times (-3) = 0$
si et seulement si $(x-3) \times 7 + (y-5) \times (-3) = 0$
si et seulement si $7x - 3y - 6 = 0$

**2e méthode :**

$\Delta \perp$ (BC) donc $\overrightarrow{\mathrm{BC}}(7\,;-3)$ est un vecteur normal à Δ.

Par suite, Δ admet une équation cartésienne de la forme $7x - 3y + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.

$\mathrm{A} \in \Delta$ donc $7x_{\mathrm{A}} - 3y_{\mathrm{A}} + c = 0$
$7 \times 3 - 3 \times 5 + c = 0$
$c = -6$

Donc Δ a pour équation cartésienne $7x - 3y - 6 = 0$.

**3e méthode :**

L'équation réduite de Δ s'écrit $y = mx + p$.

Le coefficient directeur de la droite (BC) est égal à : $\dfrac{y_{\mathrm{C}} - y_B}{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{C}}} = -\dfrac{3}{7}$.

$\Delta \perp$ (BC) donc le produit des coefficients directeur de Δ et de (BC) est égal à – 1.

$m \times \left(-\dfrac{3}{7}\right) = -1$ soit $m = \dfrac{7}{3}$

L'équation réduite de Δ s'écrit alors $y = \dfrac{7}{3}x + p$.

$\mathrm{A} \in \Delta$ donc $y_{\mathrm{A}} = \dfrac{7}{3}x_{\mathrm{A}} + p$

$5 = \dfrac{7}{3} \times 3 + p$

$p = -2$

$\Delta$ a pour équation réduite $y=\frac{7}{3}x-2$.

$\Delta$ a donc pour équation cartésienne $7x-3y-6=0$.

● Déterminons une équation cartésienne de Δ'.

La hauteur Δ' du triangle ABC issue de B est la droite passant par B et perpendiculaire à (AC).

**1ère méthode :**

$\overrightarrow{AC}(3\,;-6)$

Soit M($x$ ; $y$) un point quelconque du plan.
(On peut reprendre le même point car M est un point variable du plan pour lequel on va exprimer l'appartenance à Δ').

$\text{M}\in\Delta'$ si et seulement si $\overrightarrow{BM}\perp\overrightarrow{AC}$

si et seulement si $(x_M-x_B)\times 3+(y_M-y_B)\times(-6)=0$

si et seulement si $(x+1)\times 3+(y-2)\times(-6)=0$

si et seulement si $3x-6y+15=0$

si et seulement si $x-2y+5=0$ (on a simplifié l'équation précédente par 3)

**2e méthode et 3e méthode : même principe que pour Δ'.**

**Attention, on ne calcule pas une équation cartésienne de droite ; on détermine une équation cartésienne de droite.**

**Question bonus :**

Calculons les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.

$\Delta : 7x-3y-6=0$

$\Delta' : x-2y+5=0$.

Le point H est le point de concours des trois hauteurs donc H est le point d'intersection des droites *D* et *D*'.

Les coordonnées de H sont solutions du système $\begin{cases}7x-3y=6\\ x-2y=-5\end{cases}\left|\begin{matrix}2\\-3\end{matrix}\right.\left|\begin{matrix}1\\-7\end{matrix}\right.$

$\begin{cases}11x=27\\ 11y=41\end{cases}$

**Conclusion :** $\text{H}\left(\frac{27}{11}\,;\frac{41}{11}\right)$