Exercices sur les matrices

1 On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2).

Soit A la matrice définie par $a_{i,j} = \min(i, j)$ et T la matrice définie par $t_{i,j} = 1$ si $i \geqslant j$ et $t_{i,j} = 0$ sinon.

1°) Démontrer que $A = T\,{}^tT$.
2°) Démontrer que T est inversible et calculer son inverse.
3°) En déduire que A est inversible et calculer l'inverse de A. Vérifier.

2 Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n.
Donner le développement de $(A+B)^2$.

3 Soit A une matrice rectangulaire à coefficients dans un corps commutatif K comportant n lignes et p colonnes.
1°) Que vaut le produit AI_p ?
2°) Que vaut le produit I_nA ?

4 Déterminer les matrices triangulaires T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tTT = T\,{}^tT$.
On pourra commencer par regarder les cas $n = 2$ et $n = 3$.

5 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrer que A est inversible et calculer A^{-1}. Vérifier sur la calculatrice.

6 Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.
Démontrer que $\mathcal{B} = \left(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E.
Écrire la matrice de f dans $\mathcal{B}$.
Déterminer le rang de f.

7 Soit m, n, p trois entiers naturels non nuls.
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et B et C deux matrices de $\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$.
Démontrer que $(BA)\,{}^tA = (CA)\,{}^tA \Rightarrow BA = CA$.
Indication :
On pourra considérer la matrice $X = (B-C)A$ et calculer $X\,{}^tX$.

8 On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1°) Calculer A^2 ; en déduire A^{-1} et A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2°) Soit $C = A - I$.
Calculer C^2 puis C^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3°) Calculer $(I+A)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

9 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathbb{K}$ un corps commutatif.
1°) Démontrer que pour tout couple (i, j) d'entiers naturels compris entre 1 et n tels que $i \neq j$, on a $I_n + E_{i,j} \in GL_n(\mathbb{K})$.
2°) Déterminer le commutant de $GL_n(\mathbb{K})$ c'est-à-dire l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices de $GL_n(\mathbb{K})$.

10 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
1°) Vérifier que l'on a : $A^2 - (\text{tr } A)A + (\det A)I = 0$.
2°) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $A^n \in \text{Vect}(I, A)$.
3°) On suppose que $\text{tr } A \neq 0$.
Soit B une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
Démontrer que si $A^2B = BA^2$, alors $AB = BA$.

11 Soit Φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même par $\Phi(M) = (\text{tr } M)I_n + M$.
1°) Justifier que Φ est un endomorphisme.
2°) Déterminer le noyau de Φ. En déduire que Φ est bijective.
3°) Déterminer l'expression de Φ^{-1}.
4°) Déterminer un polynôme de degré 2 qui annule Φ.
À l'aide de ce résultat, retrouver que Φ est bijective et l'expression de Φ^{-1}.

12 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Démontrer que $A\,{}^tAA = A \Rightarrow \left({}^tAA\right)^2 = {}^tAA$.
On pose $B = A\,{}^tAA - A$. Calculer ${}^tBB$ et en déduire la réciproque.

13 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1°) Déterminer une base de Ker f.
2°) Déterminer une équation de Im f.
3°) Ker f et Im f sont-ils supplémentaires ?

14 Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni de sa structure canonique d'espace vectoriel.
On note $\mathcal{S}$ le sous-ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}$, $\mathcal{A}$ le sous-ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{R}$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}$ telles que les deux éléments qui ne sont pas sur la diagonale sont opposés.
1°) Démontrer que $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{R}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}$; déterminer une base de chacun de ces sous-espaces vectoriels.
2°) Vérifier que : $\mathcal{M} = \mathcal{S} + \mathcal{A} = \mathcal{S} + \mathcal{R}$.
Ces sommes sont-elles directes ?
Déterminer $\mathcal{S} \cap \mathcal{A}$ et $\mathcal{S} \cap \mathcal{R}$.

15 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
On note $\mathcal{E} = \text{Vect}(A, B)$.
1°) Démontrer que $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
2°) Déterminer les matrices de $\mathcal{E}$ qui sont inversibles.

16 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.
Déterminer Ker f et Im f. Vérifier que $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$.
Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f n'a qu'un coefficient non nul.

17 Déterminer les matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$) qui commutent avec toutes les matrices diagonales.

18 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & .\cdot^{\cdot} & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de 1 sur la diagonale secondaire et de 0 partout ailleurs.
Calculer A^2 ; en déduire que A est inversible et donner son inverse.

19 On pose $E = \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$).
1°) Démontrer que pour toute forme linéaire sur E, il existe une unique matrice $\mathrm{M}_f \in E$ telle que pour tout $X \in E$ on ait : $f(X) = \text{tr}(\mathrm{M}_f X)$.
2°) Déterminer les formes linéaires f sur E telles que pour tout couple (A, B) d'éléments de E on ait $f(AB) = f(BA)$.

20 Soit A une matrice de $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ corps commutatif, $m \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$) de rang r.
Démontrer que A s'écrit comme somme de r matrices de rang 1.

21 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Démontrer que A est inversible et calculer A^{-1} « à la main ».
Vérifier à l'aide de la calculatrice.

22 Résoudre dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

23 Soit F l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle.
1°) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel et déterminer sa dimension.
2°) On note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé sur la ligne i et dans la colonne j qui est égal à 1.
Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ et $i \neq j$, on pose : $T_{i,j} = E_{i,j}$ et pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on pose : $T_{i,i} = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}$.
Démontrer que la famille $T = (T_{i,j})$ est une base de F.

24 On pose $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de E.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.
1°) Démontrer que f est bijectif.
2°) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $G_\lambda = \{(x\,;y\,;z) \in E \,/\, y + \lambda z = 0\}$.
Démontrer que G_λ est un sous-espace vectoriel de E, en donner la dimension et une base.
3°) Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(G_\lambda) = G_\lambda$.

25 Soit n un entier naturel non nul.
On note E l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
On désigne par $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la base canonique de E.
On se propose de démontrer de deux façons différentes que pour toute forme linéaire f sur E, il existe une unique matrice A de E telle que pour tout $X \in E$, on ait : $f(X) = \text{tr}(AX)$.
1°) Soit f une forme linéaire sur E et A une éventuelle solution au problème posé. Calculer la trace de $AE_{i,j}$ et en déduire les coefficients de A.
Conclure avec soin.
2°) Pour toute matrice $A \in E$, on note f_A la forme linéaire sur E définie par $f_A(X) = \text{tr}(AX)$ pour tout $X \in E$ et l'application $\Phi : E \to E^*$
$A \mapsto f_A$.
Vérifier que M est une application linéaire.
Calculer $f_A({}^tA)$ à l'aide des coefficients de A ; en déduire que Φ est injective.
Conclure.

26 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3.

Soit $\mathsf{B}=(e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

Pour tout réel *a*, on considère l'endomorphisme f_a de E défini par $f_a(e_2)=0$ et $f_a(e_1)=f_a(e_3)=ae_1+e_2-ae_3$.

1°) a) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f_a$.

b) Démontrer qu'une base de $\operatorname{Ker} f_a$ est (e_2, e_1-e_3).

2°) Écrire la matrice A de f_a dans B et calculer A^2. En déduire sans calcul $f_a^{\,2}$.

3°) On pose $e'_1=f_a(e_1)$, $e'_2=e_1-e_3$, $e'_3=e_3$.

a) Démontrer que $\mathsf{B}'=(e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.

b) Donner la matrice A' de f_a dans B'. Préciser une relation entre A et A'.

27 On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Démontrer que A est inversible et calculer son inverse « à la main ». Vérifier sur la calculatrice.

28 Soit *a* et *b* deux réels fixés.

On considère la matrice A de $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geqslant 2$) définie par $a_{i,j}=a$ si $i+j$ est pair et $a_{i,j}=b$ si $i+j$ est impair.

1°) Déterminer deux réels α et β tels que $\mathrm{A}^2=\alpha\mathrm{A}+\beta\mathrm{I}$.

2°) Déterminer les puissances de A.

29 Soit E un espace vectoriel de dimension 3. Soit $\mathsf{B}=(e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

On considère la famille $\mathsf{U}=(u_1, u_2, u_3)$ de vecteurs dont la matrice dans la base B s'écrit

$\operatorname{Mat}_{\mathsf{B}}(\mathsf{U})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ où *m* est un réel.

1°) Pour quelles valeurs de *m*, U est-elle un base de E ?

2°) Lorsque U est une base, écrire les coordonnées de $v=(1;1;1)$ dans cette base.

3°) On se place dans le cas où U n'est pas une base de E.
Donner une équation de $\mathrm{V}=\operatorname{Vect}\mathsf{U}$.
Le vecteur $v(1;1;1)$ appartient-il à V ?

30 Soit *E* un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ et *u* un endomorphisme fixé de *E*.

On considère l'application $\begin{array}{l} \varphi : E^* \to E^* \\ \qquad l \mapsto l \circ u \end{array}$.

1°) Démontrer que φ est un endomorphisme de E^*.
2°) Soit *B* une base de *E* et A la matrice de *u* dans la base *B*.
Déterminer la matrice de φ dans la base B^* en fonction de A.

31 Dans $E=\mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel, on note $F=\{(x\,;y\,;z)\in E\,/\,2x-y+z=0\}$ et *G* la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u=(1;1;1)$.
1°) Démontrer que *F* et *G* sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.
2°) Déterminer la matrice de la projection *p* sur *F* parallèlement à *G* dans la base canonique.
Déterminer la matrice de la symétrie associée.

32 On considère la matrice $\mathrm{A}=(a_{i,j})$ de $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j}=\dfrac{1}{(i+j-1)!}$ pour tout couple (*i*, *j*) d'entiers naturels de $\{1\,;2\,;...;n\}$.

1°) Soit $\mathrm{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $\mathrm{AX}=0$.

On lui associe le polynôme $P=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{(n+k-1)!}X^{k-1}$.

On pose $Q=X^nP$.

Calculer $\widetilde{Q}(1)$, $\widetilde{Q}'(1)$, …, $\widetilde{Q^{(n-1)}}(1)$; en déduire les dérivées successives de *P* en 1.

2°) Démontrer que *P* est nul et en déduire que A est inversible.

33 Soit $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$.

On pose $\operatorname{com}\mathrm{A}=\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ (matrice de $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$ appelée la **comatrice** de A) et $\det\mathrm{A}=ad-bc$.

1°) a) Démontrer que l'on a : $\mathrm{A}\times{}^t\operatorname{com}\mathrm{A}={}^t\operatorname{com}\mathrm{A}\times\mathrm{A}=(\det\mathrm{A})\mathrm{I}$.

b) Démontrer que A est inversible si et seulement si $\det\mathrm{A}\neq 0$; démontrer que dans ce cas, on a : $\mathrm{A}^{-1}=\dfrac{1}{\det\mathrm{A}}\,{}^t\operatorname{com}\mathrm{A}$.

2°) On considère l'application $\begin{array}{l} \Phi : \mathsf{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathsf{M}_2(\mathbb{K}) \\ \qquad\quad \mathrm{A} \mapsto \operatorname{com}\mathrm{A} \end{array}$.

a) Démontrer que Φ est un endomorphisme d'algèbre.

b) Écrire $\operatorname{Mat}_{\mathsf{B}}(\Phi)$ où B désigne la base canonique de $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$.

c) Calculer $\operatorname{com}(\operatorname{com}\mathrm{A})$; en déduire $\Phi\circ\Phi$. Retrouver le résultat par la matrice de Φ trouvée précédemment.

34 **Endomorphismes nilpotents**

Soit *E* un espace vectoriel de dimension finie $n\in\mathbb{N}^*$.
Soit *f* un endomorphisme de *E*.
On dit que *f* est nilpotent s'il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $f^k=0$.
Si *f* est nilpotent, on définit l'**indice de nilpotence** de *f* comme le plus petit entier $k_0\in\mathbb{N}^*$ tel que $f^{k_0}=0$.
Le but de cette première partie est de démontrer que l'indice de nilpotence est inférieure ou égale à la dimension de *E* c'est-à-dire que $k_0\leqslant n$.

1°) Justifier que $f^{k_0-1}\neq 0$.

2°) On note x_0 un vecteur de E tel que $f^{k_0-1}(x_0)\neq 0$.

Démontrer que la famille $\left(x_0,\, f(x_0),...,\, f^{k_0-1}(x_0)\right)$ est une famille libre de *E*.

3°) Conclure.

Application :

On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Démontrer qu'il n'existe pas de matrice carrée M d'ordre 3 telle que $\mathrm{M}^2=\mathrm{A}$.

Indication : démontrer en utilisant la première partie de l'exercice que si $\mathrm{M}^2=\mathrm{A}$, alors $\mathrm{M}^3=0$.

$\boxed{35}$ Soit *E* un espace vectoriel sur un corps commutatif *K*.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer les endomorphismes *f* de *E* tels que pour tout vecteur *x* de *E* le système $(x,\ f(x))$ soit lié.

Soit *f* un endomorphisme de *E* vérifiant cette condition.

1°) Démontrer que, pour tout $x\in E\setminus\{\ 0\ \}$, il existe un unique $\lambda_x\in K$ tel que $f(x)=\lambda_x x$.

2°) Soit *x* et *y* deux vecteurs non nuls de *E*.

Comparer λ_x et λ_y.

Indications :

Considérer le cas où :

- $(x,\ y)$ est lié
- $(x,\ y)$ est libre et considérer alors $x+y$.

3°) Conclure.

Dans toute la suite, on suppose que *E* est de dimension finie *n* ($n\geqslant 1$).

Partie B

Soit *u* un endomorphisme non nul de trace nulle.

1°) Justifier l'existence d'un vecteur $x\in E$ tel que *x* et $u(x)$ soit linéairement indépendants ainsi que l'existence d'un supplémentaire *F* de $\mathrm{Vect}(x)$ contenant le vecteur $u(x)$.

2°) On désigne par *p* la projection sur *F* parallèlement à $\mathrm{Vect}(x)$.

Démontrer que *F* est stable par $p\circ u$ et que l'endomorphisme induit est de trace nulle.

3°) Démontrer qu'il existe une base de *E* dans laquelle la matrice de *u* a tous ses éléments diagonaux nuls (on pourra procéder par récurrence sur *n*).

Partie C

1°) Soit D une matrice diagonale de $\mathrm{M}_n(K)$ dont tous les éléments diagonaux sont deux à deux distincts.

Démontrer que l'application $\varphi:\mathrm{M}\mapsto \mathrm{DM}-\mathrm{MD}$ est un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(K)$.

2°) Déterminer Ker φ.

3°) Démontrer que Im φ est l'ensemble des matrices dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

4°) Démontrer que si $\mathrm{A}\in\mathrm{M}_n(K)$ est une matrice de trace nulle, il existe deux matrices B et C de $\mathrm{M}_n(K)$ telles que $\mathrm{A}=\mathrm{BC}-\mathrm{CB}$.

$\boxed{36}$ Soit *f* l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&m&m+1\\1&1-m&2\\2&2&-m\end{pmatrix}$ où *m* est un réel.

1°) Déterminer une base de Ker *f*.

2°) Déterminer une équation de Im *f*.

$\boxed{37}$ On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$ une matrice de $\mathrm{M}_3(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif.

Déterminer trois matrices B, C, D telles que :

$\mathrm{AB}=\begin{pmatrix}a_1&0&a_1+a_3\\b_1&0&b_1+b_3\\c_1&0&c_1+c_3\end{pmatrix}$, $\mathrm{CA}=\begin{pmatrix}a_1+b_1&a_2+b_2&a_3+b_3\\b_1&b_2&b_3\\a_1+c_1&a_2+c_2&a_3+c_3\end{pmatrix}$ et $\mathrm{AD}=\begin{pmatrix}a_1+2a_2+a_3&a_1&0\\b_1+2b_2+b_3&b_1&0\\c_1+2c_2+c_3&c_1&0\end{pmatrix}$.

$\boxed{38}$ Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

Soit A et B deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathrm{AB}$.

1°) Calculer $(\mathrm{I}-\mathrm{A})(\mathrm{I}-\mathrm{B})$ où I désigne la matrice identité d'ordre *n*.

2°) En déduire que l'on a $\mathrm{AB}=\mathrm{BA}$.

$\boxed{39}$ On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3&-1\\2&5\end{pmatrix}$.

Résoudre dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $3\mathrm{X}+{}^t\mathrm{X}=\mathrm{A}$.

$\boxed{40}$ Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et *n* un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Démontrer qu'il n'existe pas deux matrices A et B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{AB}-\mathrm{BA}=\mathrm{I}_n$.

$\boxed{41}$ On considère la matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&\alpha&0\\0&1&\alpha\\0&0&1\end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Calculer A^n pour *n* entier naturel quelconque.

$\boxed{42}$ Soit A et B deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif.

On considère la matrice $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}\mathrm{A}&\mathrm{A}\\\mathrm{A}&\mathrm{B}\end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

1°) Démontrer que M est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix}\mathrm{A}&0\\0&\mathrm{B}-\mathrm{A}\end{pmatrix}$.

Déterminer le rang de M en fonction du rang de la matrice A et du rang de la matrice B – A.

2°) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible et calculer M^{-1} dans ce cas.

Indication : Chercher l'inverse sous la forme $\begin{pmatrix}\mathrm{C}&\mathrm{D}\\\mathrm{E}&\mathrm{F}\end{pmatrix}$.

43 Soit E un espace vectoriel de dimension 3. Soit $\mathcal{B}=(e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

On note *f* l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit $A=\begin{pmatrix} b+c & c-a & b-a \\ c-b & a+c & a-b \\ b-c & a-c & a+b \end{pmatrix}$.

1°) Calculer le déterminant de A. À quelle condition *f* est-il bijectif ?
2°) On pose $u_1=e_1-e_2-e_3$, $u_2=-e_1+e_2-e_3$, $u_3=-e_1-e_2+e_3$.
a) Démontrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de E.
b) Écrire la matrice de *f* dans cette base.
c) Retrouver ainsi la valeur du déterminant de *f*.

44 1°) Démontrer que pour toute famille x_1, x_2, …, x_n et α_1, α_2, …, α_n de réels positifs ou nuls tels que $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=1$ on a : $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+...+\alpha_n x_n$ (avec la convention : $x^0=1$).
2°) On pose $\mathrm{I}=[\![1\,;n]\!]$.
Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geqslant 2$) vérifiant les conditions suivantes :

$$\forall (i, j) \in \mathrm{I}^2 \quad a_{i,j} \geqslant 0$$

$$\forall j \in \mathrm{I} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}=1$$

$$\forall i \in \mathrm{I} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}=1$$

À tout élément $x=(x_1, ..., x_n)$ de $(\mathbb{R}_+)^n$ on associe $y=(y_1, ..., y_n)$ de $(\mathbb{R}_+)^n$ tel que $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\mathrm{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Démontrer que $\prod_{i=1}^{n} y_i \geqslant \prod_{i=1}^{n} x_i$.

45 Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathrm{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathrm{K})$.
1°) Démontrer que si la *i*-ème ligne de A est nulle, alors la *i*-ième ligne de AB est nulle.
2°) Démontrer que si la *j*-ième colonne de B est nulle, alors la *j*-ième colonne de AB est nulle.

46 On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$).
Calculer A^n où *n* est un entier naturel.

47 Soit A une matrice carrée d'ordre *n* à coefficients dans un corps commutatif K.
Démontrer que A est inversible si et seulement si A^2 est inversible.

48 Soit K un corps commutatif.
On pose $E=\mathrm{K}_n[\mathrm{X}]$ où *n* est un entier naturel fixé, muni de sa structure canonique d'espace vectoriel.
1°) Démontrer que l'ensemble *F* des endomorphismes *f* de *E* tels que pour tout polynôme *P* de *E*, on ait $\deg[f(P)] \leqslant \deg P$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2°) Déterminer la dimension de *F*.

49 Soit *n* un entier naturel. Pour tout entier *k* compris entre 0 et *n* au sens large, on pose $P_k=X^k(1-X)^{n-k}$.
1°) Démontrer que la famille $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2°) On pose $\mathcal{B}=(1, X, ..., X^n)$ et $\mathcal{B}'=(P_0, P_1, ..., P_n)$.
Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$ et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.

50 Soit *n* un entier supérieur ou égal à 2. On pose $\mathrm{S}=[\![1\,;n]\!]$.
Soit *F* un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2-1 stable par multiplication matricielle et tel que $\mathrm{I}_n \notin F$.
1°) Démontrer que $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})=F \oplus V$ où *V* est l'ensemble des matrices scalaires.
2°) a) Soit *p* la projection sur *V* parallèlement à *F*.
Démontrer que pour tout couple de matrices $(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ on a : $p(\mathrm{MM}')=p(\mathrm{M})p(\mathrm{M}')$.
b) Démontrer que, pour toute matrice M de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que M^2 appartienne à *F*, alors M appartient à *F*.
c) Soit $(\mathrm{E}_{i,j})_{(i,j)\in\mathrm{S}^2}$ la base canonique de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Calculer $\mathrm{E}_{i,j} \times \mathrm{E}_{k,l}$ où *i*, *j*, *k*, *l* sont des éléments quelconques de S.
d) Démontrer que *F* contient tous les éléments de la base canonique de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
e) Conclure.

51 Soit *n* un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2.
On note *T* la transposition des matrices carrées d'ordre *n*. Soit *A*, *B*, *C*, *D* des matrices carrées d'ordre *n* telles que $T(A)=BCD$, $T(B)=CDA$, $T(C)=DAB$ et $T(D)=ABC$. Démontrer que $(ABCD)^3=ABCD$.

52 Dans tout l'exercice, *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

1°) **Matrice à diagonale strictement dominante**

On considère la matrice $\mathrm{A}=(a_{i,j})$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

On suppose que A vérifie la condition : $\forall i \in [\![1\,;n]\!] \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$.

On dit que A est à diagonale strictement dominante.

a) On suppose qu'il existe $\mathrm{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $\mathrm{X} \neq 0$, $\mathrm{AX}=0$, $\forall i \in [\![1\,;n]\!] \quad |x_1| \geqslant |x_i|$.
Aboutir à une contradiction en considérant la première ligne du système $\mathrm{AX}=0$.

b) On suppose qu'il existe $\mathrm{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $\mathrm{X} \neq 0$ et $\mathrm{AX}=0$.

Aboutir à une contradiction.
c) En déduire que A est inversible.

2°) **La propriété (P)**

Soit $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)$ une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose que A vérifie la propriété (P) suivante :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1;n]\!] \quad a_{i,i} > 0 \\ \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i \neq j \quad a_{i,j} \leqslant 0 \\ \forall i \in [\![1;n]\!] \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} > 0 \end{cases}$$

a) Démontrer que A est à diagonale strictement dominante et en déduire qu'elle est inversible.

b) Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que la matrice colonne AX ait tous ses éléments positifs ou nuls.
Démontrer que $\forall i \in [\![1;n]\!] \quad x_i \geqslant 0$.
On pourra considérer $x_{i_0} = \min\limits_{i \in [\![1;n]\!]} x_i$.

c) On note $b_{i,j}$ le coefficient en position (i, j) dans la matrice inverse de A.

Pour $j \in [\![1;n]\!]$, que vaut $\mathrm{A}\begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix}$?

d) En déduire que les coefficients de A^{-1} sont tous positifs ou nuls.

e) **Exemple :**

On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère pour $\alpha > 0$ la matrice $\mathrm{A}_\alpha = \mathrm{A} + \alpha \mathrm{I}$.

Démontrer que A_α vérifie la propriété (P) et calculer $(\mathrm{A}_\alpha)^{-1}$.

$\boxed{53}$ Soit G un groupe multiplicatif dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Démontrer que toutes les matrices A de G ont même rang.
Démontrer que toute matrice A de G de rang r est semblable à une matrice par blocs $\begin{pmatrix} \mathrm{A}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $\mathrm{A}_r \in GL_r(\mathbb{R})$, et que la matrice de passage est la même pour toutes les matrices de G.

$\boxed{54}$ Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geqslant 2$ et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = 0$.

1°) Comparer Ker f et Im f ; en déduire que le rang de f vérifie $r \leqslant \mathrm{E}\left(\dfrac{n}{2}\right)$.

2°) On se propose de démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f soit égale à :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n-r & r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_r \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ une base de Im f.
On complète en une base $(e_1, e_2, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_{n-r})$ de Ker f.
a) Démontrer qu'il existe des vecteurs $u_1, \ldots, u_r$ de E tels que $e_1 = f(u_1), \ldots, e_r = f(u_r)$.
b) Démontrer que $(e_1, e_2, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_{n-r}, u_1, \ldots, u_r)$ est une base de E.
c) Conclure.

$\boxed{55}$ Toutes les matrices en jeu dans cet exercice sont considérées comme éléments de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Une matrice M de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est dite involutive lorsque $M^2 = I$, où I désigne la matrice identité d'ordre 2.

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ élément de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

1°) a) Démontrer que : $M^2 = (a+d)M - (ad-bc)I$.
b) En déduire que M est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
c) Dans le cas où $ad - bc \neq 0$, écrire M^{-1} en fonction seulement de a, b, c, d.

2°) a) Démontrer que la matrice $\alpha\mathrm{I}$, α désignant un nombre réel, est involutive si et seulement si $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$.
b) On suppose, dans cette question, que $M \neq I$ et $M \neq -I$.
Démontrer que M est involutive si et seulement si $a + d = 0$ et $ad - bc = -1$.

3°) On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
a) Trouver un nombre réel λ tel que $A = \lambda I + B$, B étant une matrice involutive.
b) Pour tout entier naturel n, calculer A^n en fonction de n, I et B.
c) Démontrer que A est inversible et vérifier que la formule trouvée au 3°) b) est encore valable pour $n = -1$.

$\boxed{56}$ Soit φ l'application qui à tout réel θ fait correspondre la matrice $\varphi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

1°) Démontrer que φ établit un homomorphisme de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$.

2°) En déduire $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n$ où n est un entier naturel quelconque.

57 Soit a et b deux nombres complexes quelconques.

On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Calculer A^n.

58 Soit A et B deux matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telles que l'on ait : $\mathrm{AB}-\mathrm{BA}=\mathrm{A}$.

Calculer $\mathrm{A}^k\mathrm{B}-\mathrm{BA}^k$ où k est un entier naturel quelconque.

59 On considère l'ensemble $E=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}, (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

1°) Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$; en donner une base.

2°) Est-ce une sous-algèbre ?

60 1°) Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que l'on a : $\mathrm{rg}\,\mathrm{A}=\mathrm{rg}\left({}^t\mathrm{AA}\right)$.

Indication : Considérer les systèmes linéaires $\mathrm{AX}=0$ et ${}^t\mathrm{AAX}=0$.

2°) Cette propriété est-elle vraie si $\mathrm{A}\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$?

Si non, donner une propriété analogue.

61 On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrer que A est inversible et déterminer son inverse par la méthode du pivot de Gauss.

62 On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ où α est un réel donné.

1°) Calculer A^k pour k entier naturel quelconque.

2°) Soit $P=\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$ un polynôme de $\mathbb{R}$[X]. On pose $P(\mathrm{A})=\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{A}^k$.

Démontrer que $P(\mathrm{A})=\begin{pmatrix} P(\alpha) & P'(\alpha) & \frac{1}{2}P''(\alpha) \\ 0 & P(\alpha) & P'(\alpha) \\ 0 & 0 & P(\alpha) \end{pmatrix}$.

63 **Lemme de Hadamard**

On considère une matrice $\mathrm{A}=(a_{i,j})$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout entier $i\in\{1, \ldots, n\}$ on ait :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|.$$

Démontrer que A est inversible.

Indication : On pourra étudier le système $\mathrm{AX}=0$.

64 On considère les matrices $\mathrm{A}=(a_{i,j})$ et $\mathrm{B}=(b_{i,j})$ de $\mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j}=\mathrm{C}_{j-1}^{i-1}$ et $b_{i,j}=(-1)^{i-j}\,\mathrm{C}_{j-1}^{i-1}$ (on adopte la convention $\mathrm{C}_k^l=0$ si $k<l$).

Démontrer que A et B sont inverses l'une de l'autre.

65 On considère la matrice $\mathrm{A}=(a_{i,j})$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j}=\cos\big((i+j)\alpha\big)$ où α est un réel fixé.

Démontrer que :

1) A est de rang 1 si $\alpha\in\pi\mathbb{Z}$;

2) A est de rang 2 sinon.

66 On note $\mathrm{A}=(a_{i,j})$ la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j}=0$ si $i>j$ et $a_{i,j}=(-1)^{i-1}\mathrm{C}_{j-1}^{i-1}$ si $i\leqslant j$.

On pose $E=\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ et l'on note T l'application qui à tout polynôme $P\in E$ associe le polynôme $T(P)=\widehat{P}(1-X)$.

1°) Démontrer que T est un endomorphisme de E et que sa matrice dans la base canonique de E est A.

2°) Calculer A^2.

67 On donne n nombres complexes a_1, a_2, …, a_n.

Pour tout entier naturel $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$, on pose $P_i=(X+a_i)^n$.

La famille $(P_1, P_2, ..., P_n)$ est-elle libre ou liée ?

68 Soit n un entier naturel non nul. On pose $\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$.

On considère les matrices $\mathrm{A}=(a_{j,k})$ et $\mathrm{B}=(b_{j,k})$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $a_{j,k}=\omega^{(j-1)(k-1)}$ et $b_{j,k}=\omega^{-(j-1)(k-1)}$.

Calculer AB ; en déduire que A est inversible et calculer son inverse.

69 Soit n un entier naturel non nul. On pose $\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$.

On considère la matrice $\mathrm{A}=(a_{j,k})$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $a_{j,k}=\omega^{(j-1)(k-1)}$.

1°) Calculer $\mathrm{A}\overline{\mathrm{A}}$ où $\overline{\mathrm{A}}$ désigne la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de A ; en déduire que A est inversible et calculer son inverse.

2°) Calculer A^2.

70 Soit A une matrice symétrique de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et B une matrice antisymétrique de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Calculer la trace de AB.

71 Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et n un entier naturel non nul fixé.

On pose $\mathcal{A}=\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

1°) Soit A une matrice de $\mathcal{A}$. On note T_{A} l'application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{K}$ définie par $T_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})=\mathrm{tr}(\mathrm{AX})$.

Démontrer que T_{A} est une forme linéaire.

2°) Démontrer que l'application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}^*$ qui à toute matrice A associe T_{A} est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$\boxed{72}$ On note E l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 3.
On désigne par f l'application qui à un polynôme P de E associe le polynôme $f(P)$ défini par :
$f(P)(X) = P(X+1) + P(X)$.
1°) Démontrer que f est un endomorphisme de E.
2°) On note $\mathcal{B}$ la base canonique de E : $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$.
Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
3°) Démontrer que f est bijectif.
4°) Calculer la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
5°) Soit P un élément de E défini par $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$.
a) Expliciter en fonction des réels a_0, a_1, a_2, a_3 le polynôme $Q = f^{-1}(P)$.
b) On considère pour tout entier naturel n non nul la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\ \widetilde{P}(k)$.
Déterminer une expression simplifiée de $S(n)$ à l'aide de $\widetilde{Q}(n+1)$ et de $\widetilde{Q}(1)$.
c) Expliciter alors la valeur de $S(n)$ en fonction de n, a_0, a_1, a_2, a_3.

$\boxed{73}$ On considère la matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = \dfrac{i}{j}$.
Calculer A^2.

$\boxed{74}$ Démontrer que pour tout couple $(\mathrm{A}\,;\mathrm{B})$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathrm{K})$ (K étant un corps commutatif) et pour tout entier naturel k, on a :
$\mathrm{tr}\left[(\mathrm{AB})^k\right] = \mathrm{tr}\left[(\mathrm{BA})^k\right]$.

$\boxed{75}$ On note F l'ensemble des matrices carrées d'ordre n de la forme $\begin{pmatrix} 0 & & 0 & a_1 \\ & 0 & & a_2 \\ 0 & & 0 & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ où a_1, a_2, …, a_n sont des réels. Une telle matrice est notée $\mathrm{M}(a_1, a_2, ..., a_n)$.
1°) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.
2°) Soit $J_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ fixé.
Démontrer que si, pour tout réel λ non nul $\mathrm{M}(a_1, a_2, ..., a_n) + \lambda J_{n-1}$ n'est pas inversible, alors $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$ (on pourra utiliser la méthode du pivot de Gauss).
3°) En déduire que si E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui contient J_{n-1} et ne contient aucune matrice inversible, alors $\dim E \leqslant n^2 - n$.
Indication : On pourra démontrer que la somme $E + F$ est directe.
4°) Démontrer que l'inégalité précédente est la meilleure possible.

$\boxed{76}$ Soit n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. On donne un réel θ et on considère la matrice M de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par $m_{i,j} = \cos((i+j)\theta)$.
Déterminer le rang de M. On pourra utiliser les vecteurs $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \cos 2\theta \\ \vdots \\ \cos n\theta \end{pmatrix}$ et $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \sin 2\theta \\ \vdots \\ \sin n\theta \end{pmatrix}$.

$\boxed{77}$ Soit n un entier naturel.
On considère la matrice A de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = (-1)\dbinom{j}{i}$ si $i \leqslant j$; $a_{i,j} = 0$ sinon.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont la matrice est A dans la base $(1, X, ..., X^n)$.
Calculer $f(X^j)$ et en déduire A^{-1}.

$\boxed{78}$ Résoudre $XY = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $YX = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ où X et Y sont deux matrices carrées d'ordre 2.

$\boxed{79}$ Soit E un espace vectoriel de dimension n.
1°) Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E.
Démontrer que pour tout entier naturel i compris entre 2 et n au sens large, $(e_1 + e_i, e_2, ..., e_n)$ est une base de E.
2°) Déterminer les endomorphismes de E dont la matrice est diagonale dans toutes les bases de E.

$\boxed{80}$ Soit A une matrice carrée d'ordre n ($n \geqslant 2$).
1°) Soit B la matrice obtenue en échangeant les colonnes i et j de A (i et j étant deux entiers distincts compris entre 1 et n au sens large).
Démontrer que si A est inversible, alors B est inversible et calculer B^{-1} en fonction de A^{-1}.
2°) Soit C la matrice obtenue en ajoutant deux fois la i-ième colonne à la j-ième colonne (i et j étant deux entiers distincts compris entre 1 et n au sens large).
Démontrer que si A est inversible, alors C est inversible et calculer C^{-1} en fonction de A^{-1}.

$\boxed{81}$ Soit A une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^p = 0_n$.
1°) Démontrer que $I_n + A^{-1}BA$ est inversible et exprimer son inverse.
2°) On pose $\mathrm{H} = \{I_n + P(B) / P \in \mathbb{C}[X], \widetilde{P}(0) = 0\}$.
Démontrer que H est un sous-groupe commutatif de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$.

$\boxed{82}$ Soit E un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.
On suppose que $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(E)$ et que pour tout $(f_1, f_2) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$, on a : $f_1 \circ f_2 + f_2 \circ f_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Démontrer que $\mathcal{L}_1 = \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$ ou $\mathcal{L}_2 = \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$.

$\boxed{83}$ Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n $(n \in \mathbb{N}^*)$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E.
Pour tout entier naturel $k \in \{1, 2, ..., n\}$, on pose $e_k' = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} e_i$.
1°) Démontrer que $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', ..., e_n')$ est une base de E.
2°) Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et déterminer P^{-1}.

84 On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Calculer A^n où n est un entier naturel quelconque.

85 **Opérateur de Grégory**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On pose $E=\mathbb{R}_n[X]$.

Soit Δ l'application de E dans E définie pour tout $P\in E$ par $\Delta(P)=\widetilde{P}(X+1)-\widetilde{P}(X)$.

1°) Démontrer que Δ est un endomorphisme.

2°) Déterminer Ker Δ :

a) directement ;

b) en observant que si $P\in \operatorname{Ker}\Delta$, alors $\widetilde{P}(0)=\widetilde{P}(1)=...=\widetilde{P}(n)$.

3°) Déterminer Im Δ.

4°) On pose $G_0=1$ et pour tout entier naturel $k\in\{1;2;...;n\}$, $G_k=\prod_{i=1}^{k}(X-i+1)$.

a) Démontrer que la famille $\mathcal{G}=(G_0,G_1,...,G_n)$ est une base de E.

b) Calculer ΔG_k.

c) Démontrer que pour tout polynôme $P\in E$ on a : $P=\sum_{k=0}^{n}\frac{\widetilde{\Delta^k P}(0)}{k!}G_k$ (formule de Grégory).

86 On pose $E=\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel.

On pose $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$. Pour toute matrice X de E, on pose $\Phi(X)=AX+XA$.

1°) Démontrer que Φ est un endomorphisme de E.

2°) Déterminer Ker Φ.

3°) Démonter que $\operatorname{Im}\Phi=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in E\,/\,a+b+c+d=0\right\}$.

4°) On pose $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

a) Calculer $\Phi(A)$, $\Phi(B)$, $\Phi(C)$.

b) Déterminer une base de E dans laquelle la matrice de Φ est diagonale.

87 Soit $A=(a_{i,j})$ la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j}=(-1)^{i+j}$ (« matrice damier »).

1°) Déterminer le rang de A.

2°) Calculer A^k $(k\in\mathbb{N})$.

88 On considère la matrice $A=(a_{i,j})$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, définie par $a_{i,i}=0$, si $i\neq j$ $a_{i,j}=1$.

Démontrer que A est inversible et déterminer son inverse

1°) avec le pivot de Gauss ;

2°) en calculant $(I+A)^2$.

89 Soit f une application de $E=\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout couple (A,B) d'éléments de E on a :

$f(AB)=f(A)f(B)$.

Dans tout l'exercice, on suppose que f n'est pas une application constante.

1°) Calculer les images par f de la matrice identité et de la matrice nulle.

2°) Soit A une matrice inversible de E. Démontrer que $f(A)\neq 0$.

3°) Soit A une matrice non inversible de E. Calculer $f(A)$.

Indication : On commencera par démontrer que A est équivalente à une matrice nilpotente.

90 1°) Rappeler la caractérisation de deux matrices semblables à l'aide des endomorphismes.

2°) Démontrer que les matrices $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sont semblables.

Indication : Introduire l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dont la base canonique s'écrit $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$.

3°) Démontrer que les matrices $\begin{pmatrix}I_n&I_n\\0_n&0_n\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}I_n&0_n\\0_n&0_n\end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$ sont semblables.

91 Soit $A=(a_{i,j})$ la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ $(n\geqslant 3)$ définie par $a_{i,j}=1$ si $i=1$ ou $j=1$; $a_{i,j}=0$ sinon. On pose $E=\mathbb{R}^n$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel et l'on note f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique de E est A.

1°) Déterminer la dimension et une base de Ker f et Im f.

2°) Ces deux sous-espaces vectoriels sont-ils supplémentaires ?

92 1°) Démontrer que deux matrices semblables ont les mêmes polynômes annulateurs.

2°) Les matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

93 On pose $E=\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel.

1°) Démontrer que l'application L qui a tout polynôme P de E fait correspondre le polynôme $L(P)=(2X+1)P+(1-X^2)P'$ est un endomorphisme de E.

2°) Écrire la matrice de L dans la base canonique B de E.

3°) L'endomorphisme L est-il

a) injectif ?

b) surjectif ?

c) bijectif ? si oui, déterminer la matrice de L^{-1} dans B.

94 On pose $E=\mathbb{R}^n$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel et l'on note $B=(e_1,e_2,...,e_n)$ la base canonique de E. Soit f l'endomorphisme de E tel que $\forall k\in\{1,...,n\}$ $f(e_k)=\sum_{i=1}^{k}e_i$.

1°) Écrire la matrice A de f dans B.

2°) L'endomorphisme f est-il

a) injectif ?

b) surjectif ?

c) bijectif ? Si oui, déterminer la matrice de f^{-1} dans B.

$\boxed{95}$ On pose $E=\mathbb{R}^n$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel et l'on note $B=(e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de *E*. Soit *f* l'endomorphisme de *E* tel que $\forall i \in \{1, ..., n\}$ $f(e_i)=\sum_{k=1}^{i} ke_k$.

1°) Écrire la matrice A de *f* dans *B*.
2°) L'endomorphisme *f* est-il
a) injectif ?
b) surjectif ?
c) bijectif ? Si oui, déterminer la matrice de f^{-1} dans *B*.

$\boxed{96}$ 1°) Soit $\mathbb{K}=\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}), (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Démontrer que $\mathbb{K}$ est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$.

2°) Soit $\mathbb{H}=\left\{\begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}), (a, b) \in \mathbb{C}^2\right\}$. On pose $\mathrm{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{I}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{J}=\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$, $\mathrm{K}=\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que $\mathbb{H}$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$ dont une base est (E, I, J, K) puis que $\mathbb{H}$ est un corps ($\mathbb{H}$ est appelé corps des quaternions de Hamilton).

b) Ce corps est-il commutatif ? Trouver le centre de $\mathbb{H}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $\mathbb{H}$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathbb{H}$.

c) Résoudre dans $\mathbb{H}$ l'équation $\mathrm{X}^2=-\mathrm{E}$.

Écrit plus loin exercice $\boxed{122}$ (le 3-11-2020)

$\boxed{97}$ Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on pose $\mathrm{U}(z)=\begin{pmatrix} 1 & z & \frac{z^2}{2} \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$.

Démontrer que l'ensemble $\mathrm{G}=\{\mathrm{U}(z), z \in \mathbb{C}\}$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{C}, +)$.

$\boxed{98}$ Soit $E=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}), (a,b) \in \mathbb{C}^2\right\}$.

Prouver que E est un espace vectoriel ; trouver sa dimension et une base de E.
Démontrer que E est une algèbre. Elle-elle commutative ?

$\boxed{99}$

À trouver

$\boxed{100}$

Soit $P=\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme de K[*X*] et M une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$.

• On pose $P(\mathrm{M})=\sum_{k=0}^{p} a_k \mathrm{M}^k$.

• On dit que *P* est un polynôme annulateur de M lorsque $P(\mathrm{M})=0$.

On considère la matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ où *a* est un réel fixé non nul.

1°) Déterminer un polynôme *P* annulateur non nul de A.
2°) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse. Retrouver ce résultat directement.

$\boxed{\text{100 bis}}$ On considère la matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ où *a* est un nombre complexe non nul fixé.

1°) Démontrer que A est inversible et calculer son inverse.
2°) Retrouver le résultat du 1°) en calculant $\mathrm{A}^2-\mathrm{A}$.

$\boxed{101}$ Dans tout l'exercice, *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et K désigne un corps commutatif.

1°) Soit φ une forme linéaire sur $\mathrm{M}_n(K)$ telle qu'il existe un couple (i, j) d'entiers naturels compris entre 1 et *n* avec $i \neq j$ pour lequel $\varphi(\mathrm{E}_{i,j}) \neq 0$.

Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathrm{K}$ tel que $\varphi(\mathrm{I}_n+\lambda \mathrm{E}_{i,j}) \neq 0$.

2°) En déduire que tout hyperplan de $\mathrm{M}_n(K)$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$.

$\boxed{102}$ On pose $E=\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel. On considère la matrice $\mathrm{A}=(a_{i,j})$ de *E* définie par $\forall (i, j) \in \{1, ..., n\}^2$ $a_{i,j}=1$. On note φ l'application de *E* dans *E* définie par $\varphi(\mathrm{X})=\mathrm{AX}$.

1°) Démontrer que φ est un endomorphisme de *E*.
2°) Déterminer l'image et le noyau de φ.

103 On considère la matrice $\mathrm{U}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{ab}\\ a & 1 & \frac{1}{b}\\ ab & b & 1\end{pmatrix}$ de $\mathsf{M}_3(\mathbb{R})$ où a et b sont deux réels donnés non nuls.

Calculer U^n pour $n\in\mathbb{N}$.

104 On considère la matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -9\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$ de $\mathsf{M}_3(\mathbb{R})$.

Calculer $(\mathrm{A}-\mathrm{I}_3)^2$; en déduire A^n pour $n\in\mathbb{Z}$.

105 On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

1°) Déterminer une base de Ker f et de Im f puis démontrer que Ker f et Im f sont supplémentaires.

2°) Démontrer que A est semblable à $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; en déduire A^n pour $n\in\mathbb{N}$.

106 On pose $E=\mathbb{R}_n[X]$. Soit $a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout entier naturel k compris entre 0 et n, on pose $L_k=\displaystyle\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{X-a_i}{a_k-a_i}$.

1°) Démontrer que $\mathcal{L}=(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de E.
2°) Quelles sont les coordonnées d'un polynôme $P\in E$ dans $\mathcal{L}$?
3°) Écrire la matrice de passage de $\mathcal{L}$ à la base canonique de E.

107 On considère deux matrices A et B de $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ telles que l'on ait $\mathrm{AB}=\begin{pmatrix}5 & -8\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ et $\mathrm{BA}=\begin{pmatrix}a & 5\\ 2 & b\end{pmatrix}$.

1°) Les matrices A et B sont-elles inversibles ?
2°) Déterminer les valeurs de a et b.

108 Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ deux n-uplets de nombres complexes.
Déterminer le rang de la matrice $\mathrm{A}=(a_{i,j})$ de $\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ avec $a_{i,j}=x_iy_j$.

109 Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ deux n-uplets de nombres complexes.
Déterminer le rang de la matrice $\mathrm{A}=(a_{i,j})$ de $\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ avec $a_{i,j}=\mathrm{e}^{x_i+y_j}$.

110 Soit $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ n nombres complexes.
Déterminer le rang de la matrice $\mathrm{A}=(a_{i,j})$ de $\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ avec $a_{i,j}=x_ix_j$.

111 Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ deux n-uplets de réels (ou de complexes).
Quelles sont les valeurs que peut prendre le rang de la matrice $\mathrm{M}=(m_{i,j})$ de $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ avec $m_{i,j}=a_ib_j+a_jb_i$?

112 Déterminer suivant les valeurs de a le rang de la matrice $\begin{pmatrix}a & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & a\end{pmatrix}$ de $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$.

113 Soit $\theta_1,\ \theta_2\ \dots\ \theta_n$ n réels donnés ($n\geqslant 2$).
Quelles sont les valeurs que peut prendre le rang de la matrice $\mathrm{A}=(a_{i,j})$ de $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j}=\sin(\theta_i+\theta_j)$?
Même question avec la matrice $\mathrm{B}=(b_{i,j})$ de $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $b_{i,j}=\cos(\theta_i+\theta_j)$.

114 Déterminer le rang d'une matrice de Vandermonde $\mathrm{V}=\begin{pmatrix}1 & \cdots & \cdots & 1\\ \lambda_1 & & & \lambda_n\\ \vdots & & & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}$ de $\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$.

115 Pour tout réel t, on pose $\mathrm{U}(t)=\begin{pmatrix}\operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t\\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t\end{pmatrix}$ (matrice de $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$).
Démontrer que l'ensemble $G=\{\mathrm{U}(t),\ t\in\mathbb{R}\}$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R},+)$.

116 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3 & -4 & -2\\ 4 & -7 & -4\\ -5 & 10 & 6\end{pmatrix}$.

Démontrer que f est une projection vectorielle ; donner ses éléments caractéristiques (c'est-à-dire noyau et image).

117 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}5 & -8 & -4\\ 8 & -15 & -8\\ -10 & 20 & 11\end{pmatrix}$.

Démontrer que f est une symétrie vectorielle ; donner ses éléments caractéristiques.

118 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Déterminer le noyau et l'image de f.

119 On note E, F, G les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ d'équations respectives $x+2y+z=0$, $2x-y-z=0$, $x-3y-2z=0$.
Déterminer les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
- de la projection vectorielle sur E parallèlement à $D=F\cap G$;
- de la symétrie vectorielle par rapport à E parallèlement à D.

$\boxed{120}$ Pour tout nombre complexe z, on pose $\mathrm{U}(z)=\begin{pmatrix}1 & z & \dfrac{z^2}{2}\\ 0 & 1 & z\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$.

Démontrer que l'ensemble $\{\mathrm{U}(z), z\in C\}$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{C},+)$. Idem $\boxed{97}$.

$\boxed{121}$ Soit $E=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}),(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

Démontrer que E est un espace vectoriel. Trouver sa dimension et une base de E.
Démontrer que E est une algèbre. Est-elle commutative ?

$\boxed{122}$ 1°) Soit $\mathbb{K}=\left\{\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

Démontrer que $\mathbb{K}$ est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$.

2°) Soit $\mathbb{H}=\left\{\begin{pmatrix}a & -\overline{b}\\ b & \overline{a}\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}),(a,b)\in\mathbb{C}^2\right\}$. On pose $\mathrm{E}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\mathrm{J}=\begin{pmatrix}\mathrm{i} & 0\\ 0 & -\mathrm{i}\end{pmatrix}$,

$\mathrm{K}=\begin{pmatrix}0 & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}$.

a) Démontrer que $\mathbb{H}$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$ dont une base est $(\mathrm{E},\mathrm{I},\mathrm{J},\mathrm{K})$ puis que $\mathbb{H}$ est un corps ($\mathbb{H}$ est appelé corps de quaternions de Hamilton).

b) Ce corps est-il commutatif ? Trouver le centre de $\mathbb{H}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $\mathbb{H}$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathbb{H}$.

c) Résoudre dans $\mathbb{H}$ les équations $\mathrm{X}^2=\mathrm{E}$ et $\mathrm{X}^2=-\mathrm{E}$. Voir exercice $\boxed{96}$.

Le jeudi 10-8-2023

On utilise la structure de corps.
On observe d'abord que $\mathrm{I}^2=-\mathrm{E}$.
L'équation s'écrit donc $\mathrm{X}^2=\mathrm{I}^2$.
Les solutions de l'équation dans $\mathbb{H}$ sont donc I et – I.
Voir feuille d'exercices lycée Camille Guérin MPSI de Marc Lorenzi feuille d'exercices sur le calcul matriciel.

$\boxed{123}$ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et K un corps commutatif.
On note $\boldsymbol{E}$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n à coefficients dans K.
Soit A une matrice diagonale carrée d'ordre n dont tous les éléments diagonaux sont deux à deux distincts.
Démontrer que $(\mathrm{I},\mathrm{A},\mathrm{A}^2,\dots,\mathrm{A}^{n-1})$ est une base de $\boldsymbol{E}$.

$\boxed{124}$ On dit qu'une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ est unipotente s'il existe un entier naturel $p\geqslant 1$ tel que $(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)^p=0$.

1°) Démontrer que si A est unipotente, alors A est inversible et calculer A^{-1}.
2°) Démontrer que si A est unipotente, alors A^{-1} est unipotente.
3°) Démontrer que si A est unipotente, alors pour tout entier naturel $k\geqslant 1$ A^k est unipotente.

$\boxed{125}$ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{A}$ un hyperplan de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ stable pour le produit matriciel.

1°) On suppose que $\mathrm{I}_n\notin\mathcal{A}$. Démontrer que, si $\mathrm{M}^2\in\mathcal{A}$, alors $\mathrm{M}\in\mathcal{A}$. En déduire que pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$ la matrice $\mathrm{E}_{i,i}$ est dans $\mathcal{A}$. En déduire une absurdité.

Indication :

On note $\mathcal{D}$ le sous-espace de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices scalaires.

Justifier que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$ sont en somme directe.

Démontrer que, si $\mathrm{M}^2\in\mathcal{A}$, alors $\mathrm{M}\in\mathcal{A}$.

Démontrer que toutes les matrices $\mathrm{E}_{i,j}$ avec $i\neq j$ sont dans $\mathcal{A}$.

Démontrer ensuite que toutes les matrices $\mathrm{E}_{i,i}$ sont dans $\mathcal{A}$ (on pourra utiliser $\mathrm{E}_{i,i}=\mathrm{E}_{i,j}\times\mathrm{E}_{j,i}$).

En déduire une absurdité.

2°) On prend $n=2$. Démontrer que $\mathcal{A}$ est isomorphe à l'algèbre des matrices triangulaires supérieures.

$\boxed{126}$ On se place dans $E=\mathbb{R}^3$. On pose $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$.

On sait que $\mathsf{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base de E.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans B est $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$

1°) Démontrer que $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (u_1,u_2).

2°) Démontrer que $\mathsf{B}'=(u_1,u_2,e_3)$ est une base de E et déterminer la matrice de f dans B'.

$\boxed{127}$ Dans tout le problème, n désigne un entier naturel au moins égal à 1, $\mathrm{A}=(a_{i,j})$ une matrice carrée de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$ et I_n, la matrice identité.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est rapporté à sa base canonique $B=\{\mathrm{e}_1,\dots,\mathrm{e}_n\}$.

On note u l'endomorphisme associé à la matrice A dans la base B et l'on suppose que $\{0\}$ et $\mathbb{R}^n$ sont les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par u. (On rappelle qu'un sous-espace vectoriel F est stable par u si et seulement si $\forall x\in F\quad u(x)\in F$).

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On se propose dans cette partie de prouver que la matrice $(\mathrm{I}_n+\mathrm{A})^{n-1}$ a tous ses coefficients dans $\mathbb{R}_+^*$.

Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$ dans la base canonique sont des réels positifs ou nuls. On pose $y=x+u(x)$ et l'on désigne par $(y_1,\dots,y_n)$ les coordonnées de y dans B.

1°) Prouver que $y_1\geqslant 0,\dots,\ y_n\geqslant 0$.

2°) On suppose que le vecteur x possède exactement r coordonnées non nulles ($0<r<n$).
Prouver que le vecteur y possède au moins r coordonnées non nulles.

3°) On suppose que y possède exactement r coordonnées non nulles et l'on note J l'ensemble des indices correspondants $\mathrm{J}=\{i,1\leqslant i\leqslant n,\ y_i>0\}$.

Prouver que le sous-espace vectoriel $F=\{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{R}^n\ /\ i\notin J\Rightarrow z_i=0\}$ est stable par u.

(On pourra démontrer que si $p\notin\mathrm{J}$ et $q\in\mathrm{J}$ alors $a_{p,q}=0$.)

4°) Prouver que le vecteur y possède au moins $r+1$ coordonnées non nulles. En déduire que le vecteur $(\mathrm{id}+u)^{n-1}(x)$ possède n coordonnées strictement positives, puis le résultat annoncé.

Partie B

On suppose dans cette partie que pour tous i et j, $a_{i,j}>0$ et que la matrice A possède une valeur propre λ associée à un vecteur propre $x=(x_1, ..., x_n)$ vérifiant $\forall i,\ 1\leqslant i\leqslant n,\ x_i\geqslant 0$.

1°) Prouver que l'on a $\lambda>0$ et $\forall i,\ 1\leqslant i\leqslant n,\ x_i>0$.

2°) Soit $y=(y_1, ..., y_n)$ un vecteur propre de A associé à une valeur propre μ.

Prouver que l'on a $|\mu|\leqslant\lambda$ (on pourra introduire $m=\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\dfrac{|y_i|}{x_i}$).

3°) En déduire que parmi les valeurs propres de A, il n'y en a qu'une seule qui soit associée à un vecteur propre à coordonnées toutes positives.
4°) Prouver que l'espace propre associé à celle-ci est de dimension 1.

128 On pose $\mathrm{J}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & ⋰ & 0 \\ 0 & ⋰ & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Calculer AJ et JA où $\mathrm{A}=(a_{i,j})$ est une matrice quelconque de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

129 On considère la matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Démontrer qu'il existe deux matrices X de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{X}^2=\mathrm{A}$.

Indication : Démontrer que si X est une matrice de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{X}^2=\mathrm{A}$, alors $\mathrm{XA}=\mathrm{AX}$.

129 le 23 octobre 2021 provient du DS1 de mathématiques experts lycée militaire de Saint-Cyr.

Le 7-4-2023

Exercice écrit il y a très longtemps au crayon à papier

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

$U\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})\quad \forall i, j\quad u_{i,j}=1$

$\mathcal{A}=\mathrm{Vect}(I,U)$

Prouver que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Chercher ses diviseurs de zéro.

51 Soit n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.

Soit $(x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ..., y_p)$ deux familles de réels.

On considère les matrices $\mathrm{A}=(a_{i,j})$ et $\mathrm{B}=(b_{i,j})$ de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définies par $a_{i,j}=x_i+y_j$ et $b_{i,j}=x_iy_j$.

1°) Démontrer que $\mathrm{rg}\ \mathrm{A}\leqslant 2$.

2°) Que peut-on dire du rang de B ?

J'ai écrit cet exercice le 20 juin 2023.
Le 21, jour où je tape, je pense que je pourrais rédiger ainsi.
1°) Démontrer que $\mathrm{rg}\ \mathrm{B}\leqslant 1$.
2°) Donner un majorant de rang de A.

Pour A, on peut utiliser des opérations élémentaires.

Voir exercices **108** à **111**.

Soit $(a_1, a_2, ..., a_n)$ et $(b_1, b_2, ..., b_n)$ deux n-uplets de réels (ou de complexes).

Quelles sont les valeurs que peut prendre le rang de la matrice $\mathrm{M}=(m_{i,j})$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ avec $m_{i,j}=a_ib_j+a_jb_i$?

Corrigé

$\boxed{1}$ Il pourrait être intéressant de regarder ce qui se passe lorsque l'on a une matrice triangulaire.

$$\mathrm{T}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & 0 & \\ & -1 & \ddots & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & & 0 & \\ & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & \ddots & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{4}$ Grouper les exercices $\boxed{4}$ et $\boxed{7}$: même calcul des coefficients de ${}^t\mathrm{AA}$.

$$n=3 \quad \mathrm{T}=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Dans le cas général, il s'agit des matrices diagonales.
$\mathrm{A}={}^t\mathrm{TT}$.

Coefficient $a_{i,i}$.

$$\sum_{k=1}^{n} t_{i,k}{}^2=\sum_{k=1}^{n} t_{k,i}{}^2$$

$$\sum_{k=i}^{n} t_{i,k}{}^2=\sum_{k=1}^{i} t_{k,i}{}^2$$

$\boxed{i=1}$ $\quad t_{i,1}{}^2=\sum_{k=1}^{n} t_{1,k}{}^2$

$\forall k>1 \quad t_{1,k}=0$

$\boxed{i=2}$

$\boxed{5}$ $\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{11}$ 2°) $\mathrm{Ker}\,\Phi=\{0\}$; $\mathrm{rg}\,\Phi=n^2$; 3°) $\Phi^2(\mathrm{M})=(n+2)\Phi(\mathrm{M})-(n+1)\mathrm{id}(\mathrm{M})$

$\boxed{13}$ 1°) $\mathrm{Ker}\,f=\mathrm{Vect}\{(-2;1;1)\}$
2°) $\mathrm{Im}\,f=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x+z=0\}$

$\boxed{16}$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\,f &=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x+y-z=0\}\\ &=\{(x,y,x+y)\,/\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^2\}\\ &=\{x(1,0,1)+y(0,1,1)\,/\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}\\ &=\mathrm{Vect}\{\underbrace{(1,0,1)}_{e'_1},\underbrace{(0,1,1)}_{e'_2}\}\end{aligned}$$

$\mathrm{Im}\,f=\mathrm{Vect}\{(1,-3,-2)\}$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,f=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$\gamma = 0$ (trace vaut 0)

(e'_1,e'_2,e_3)

$f(e_3)=(-1,3,2)=-e'_1+3e_3'$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{17}$ Les matrices diagonales.

$\boxed{20}$ $\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$\boxed{24}$ 1°) $(1;0;0)$; $(0;-\lambda;1)$; 3°) $\lambda=1$

$\boxed{25}$ 1°) $\mathrm{tr}(\mathrm{AE}_{i,j})=a_{j,i}$; $a_{i,j}=f(\mathrm{E}_{j,i})$

$\boxed{27}$ Cas particulier du $\boxed{1}$; $\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{30}$ $B=(e_1,e_2,\dots,e_n)$; $B^*=(e_1^*,e_2^*,\dots,e_n^*)$

$\varphi(e_i^*)=e_i^*\circ u$

$$\Psi=\sum_{i=1}^{n}\Psi(e_i)\,e_i^*$$

$\varphi(e_j^*)=\sum_{i=1}^{n}\left(e_j^*\circ u(e_i)\right)\ e_i^*=\sum_{i=1}^{n}a_{j,i}\ \ e_i^*$

31 1°) Formule : $x=\alpha u+\beta v+\gamma w$ ou matrice de passage

$$\mathrm{Mat}_B(p)=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$\underbrace{(1\,;2\,;0),(0\,;1\,;1)}_{\text{base de }F},(1;1;1)$

$(1\,;0\,;0)=0\times(1\,;2\,;0)+(-1)\times(0\,;1;1)+(1;1;1)$

2°) $\mathrm{Mat}_B(s)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -2 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$

33 2°) c) $\Phi\circ\Phi=\mathrm{id}_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$

36 1°) $\begin{cases} m\,y+(m+1)z=0 & (\mathrm{L}_1)\\ x+(1-m)y+2z=0 & (\mathrm{L}_2)\\ x+2\,y-mz=0 & (\mathrm{L}_3)\end{cases}$

On obtient un système triangulaire en mettant (L_2) comme première équation, (L_1) comme deuxième équation, ($\mathrm{L}_3-2\mathrm{L}_1-2\mathrm{L}_2$) comme troisième équation $-3(m+2)z=0$.
On discute ensuite suivant les valeurs de *m*.

43 $\mathrm{A}'=2\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\det \mathrm{A}=8abc$

49 1°) Idée : utiliser la règle pour une famille de polynômes de valuations deux à deux distinctes.
2°) Idée : écrire $1=\left[X+(1-X)\right]^n$, $X=X\left[X+(1-X)\right]^{n-1}$ etc.

50 2°) a) Utiliser $p(\mathrm{M})=\alpha\mathrm{I}$. b) $\left[p(\mathrm{M})\right]^2=0\Rightarrow\alpha^2=0\Rightarrow\alpha=0$

F sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$
$\dim F=n^2-1$
F stable par $\times$
$I_n\notin F$

2°) a) Soit p la projection sur V parallèlement à F.
Démontrons que pour tout couple de matrices (M,M') de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ on a : $p(\mathrm{MM}')=p(\mathrm{M})\,p(\mathrm{M}')$.

On pose :
$\mathrm{M}=\lambda\mathrm{I}_n+\mathrm{A}$
$\mathrm{M}'=\lambda'\mathrm{I}_n+\mathrm{B}$

b) Démontrons que $\forall \mathrm{M}\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})\quad \mathrm{M}^2\in F\ \Rightarrow\ \mathrm{M}\in F$.

$p(\mathrm{M}^2)=\left[p(\mathrm{M})\right]^2$ donc $\left[p(\mathrm{M})\right]^2=0$ d'où $p(\mathrm{M})=0$.
On en déduit que $\mathrm{M}\in F$.

c) $\mathrm{E}_{i,j}\times\mathrm{E}_{k,l}=\delta_{j,k}\mathrm{E}_{i,l}$

d) Démontrer que F contient tous les vecteurs de la base canonique de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1ère partie :
Soit *i* et *j* deux éléments distincts de S.
${\mathrm{E}_{i,j}}^2=\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{i,j}=0_n\in F$ donc $\mathrm{E}_{i,j}\in F$.

2e partie : Soit *i* un élément fixé de S.
On choisit un élément *j* de S distinct de *i*.

On a $\mathrm{E}_{i,j}\times\mathrm{E}_{j,i}=\delta_{j,j}\mathrm{E}_{i,i}$ soit $\mathrm{E}_{i,j}\times\mathrm{E}_{j,i}=\mathrm{E}_{i,i}$.
D'après la 1ère partie, $\mathrm{E}_{i,j}\in F$ et $\mathrm{E}_{j,i}\in F$ donc comme F est stable par le produit matriciel, on en déduit que $\mathrm{E}_{i,i}\in F$.

Conclusion : F contient tous les vecteurs de la base canonique de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

e) Conclure.

51 $(ABCD)^3=ABC(DAB)(CDA)(BCD)=ABCT(C)T(B)T(A)=ABCT(ABC)=ABCD$

52

60 1°) $\dim \mathrm{S}=n-\mathrm{rg}\,\mathrm{A}$; $\dim \mathrm{S}'=n-\mathrm{rg}\left({}^t\mathrm{AA}\right)$
2°) $\mathrm{rg}\,\mathrm{A}=\mathrm{rg}\left({}^t\overline{\mathrm{A}}\mathrm{A}\right)$

65 On note $\mathrm{C}=\left(c_{i,j}\right)$ le produit AB.
Calculer $c_{i,j}$ ★ pour $i\geqslant j$
★ pour $i<j$ $\quad(=0)$

67 $(1-X)^{j-1}=\sum_{k=0}^{j-1}(-1)^k\,\mathrm{C}_{j-1}^{k}\,X^k$

$\boxed{69}$ $\mathrm{C}=\mathrm{AB}$; $c_{j,k}=\sum_{l=1}^{n}\left(\omega^{j-k}\right)^{l-1}$

$\boxed{72}$ Exercice inspiré d'un exercice Ecricome voie Economique 2000

2°) Matrice de f dans B : $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\0&2&2&3\\0&0&2&3\\0&0&0&2\end{pmatrix}$

4°)

$$\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}\\0&0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

5°) a) $Q=f^{-1}(P)$

$$Q=a_0+a_1+\left(\frac{a_1}{2}-\frac{a_2}{2}\right)X+\left(\frac{a_2}{2}-\frac{3a_3}{4}\right)X^2+\frac{X^3}{2}$$

$\boxed{75}$ 1°) $\dim F=n$

2°)

$$\mathrm{L}_n\leftarrow\mathrm{L}_n-\frac{a_1}{\lambda}\mathrm{L}_1$$

$$\mathrm{L}_n\leftarrow\mathrm{L}_n-\frac{a_2}{\lambda}\mathrm{L}_2$$

$\vdots$

$$\mathrm{L}_n\leftarrow\mathrm{L}_n-\frac{a_{n-1}}{\lambda}\mathrm{L}_{n-1}$$

On obtient une matrice triangulaire dont les éléments de la diagonale supérieure sont : λ, λ, …, λ, $a_n-\frac{a_1^2}{\lambda}-\frac{a_2^2}{\lambda}-\ldots-\frac{a_{n-1}^2}{\lambda}$.

$$\begin{pmatrix}\lambda&&&a_1\\&\ddots&&\vdots\\&&\lambda&a_{n-1}\\0&&0&a_n-\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{n-1}^2}{\lambda}\end{pmatrix}$$

La matrice est non inversible si et seulement si $\forall x\in\mathbb{R}^*$ $\frac{a_n\lambda-\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{n-1}^2\right)}{\lambda}=0$.

Donc $a_n=0$ et $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{n-1}^2=0$.

On en déduit que $a_1=a_2=\ldots=a_{n-1}=0$ car on est dans $\mathbb{R}$.

On peut appliquer directement l'opération $\mathrm{L}_n\leftarrow\mathrm{L}_n-\frac{a_1}{\lambda}\mathrm{L}_1-\ldots-\frac{a_{n-1}}{\lambda}\mathrm{L}_{n-1}$.

3°) La somme $E+F$ est directe donc $\dim(E+F)=\dim E+\dim F$.

Or $\dim(E+F)\leqslant n^2$.

4°) Considérer l'ensemble des matrices qui ont leur dernière ligne nulle (ou leur dernière colonne nulle).

$\boxed{78}$ Impossible : $\mathrm{tr}\,XY\neq\mathrm{tr}\,YX$.

$\boxed{85}$

3°) $\mathrm{Im}\,\Delta\subset\mathbb{R}_{n-1}[X]$

En effet, si $P\in E$, $\deg\Delta(P)\leqslant n$. De plus, le terme de degré n de $P(X+1)$ s'annule avec le terme de degré n de $P(X)$.

D'après le théorème du rang, $\dim\mathrm{Im}\,\Delta=\dim\mathbb{R}_n[X]-\dim\mathrm{Ker}\,\Delta=(n+1)-1=n$.

$\dim\mathbb{R}_{n-1}[X]=n$

On en déduit que $\mathrm{Im}\,\Delta=\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$\boxed{103}$ On a $\mathrm{U}^2=3\mathrm{U}$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\mathrm{U}^n=3^{n-1}\mathrm{U}$.

Questions de cours

1 Structure de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (structure d'espace vectoriel).
Structure de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ (structure d'anneau, structure d'algèbre). Cet anneau est-il intègre ?

2 Matrice d'une application linéaire dans des bases.
Définition et propriétés

3 Propriétés du produit matriciel.
Démontrer que l'associativité découle de l'associativité et de la distributivité de la multiplication dans le corps commutatif $\mathbb{K}$.

4 Définition de la transposée d'une matrice ; propriétés.

5 Définition de la trace d'une matrice. Propriétés.
Démontrer que si A et B sont deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, pour tout entier naturel k, on a : $\mathrm{tr}(\mathrm{AB})^k = \mathrm{tr}(\mathrm{BA})^k$.

6 Démontrer que toute matrice de rang r est équivalente à J_r.

7 Démontrer que le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée.

8 Rang d'une matrice. Lien avec le rang d'une application linéaire.

9 Algorithme d'inversion d'une matrice (algorithme de Dorian Gray).

10 Opérations élémentaires sur les matrices.

11 Dimension de l'espace des matrices. Base.

12 Matrice d'une application linéaire dans deux bases.

13 Formule de changement de bases.

14 Matrice de la bijection réciproque d'un isomorphisme dans deux bases différentes.

15 Matrices d'une forme linéaire dans une base et dans la base duale.
Lien entre les deux matrices.

16 Base adaptée à un projecteur. Matrice d'un projecteur dans une base adaptée. Lien entre la trace d'un projecteur et son rang.

17 Base adaptée à une symétrie vectorielle. Matrice d'une symétrie dans une base adaptée.

18 Matrice extraite. Définition générale ; exemple(s) ; cas particuliers importants (vecteurs colonnes et vecteurs lignes). Interprétation matricielle d'une matrice extraite.

19 Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible dont les coefficients appartiennent à un corps commutatif K.

Démontrer la proposition :

> Les conditions suivantes sont équivalentes :
>
> (i) A inversible.
> (ii) La famille $\big(\mathrm{C}_1(\mathrm{A}), \mathrm{C}_2(\mathrm{A}), ..., \mathrm{C}_n(\mathrm{A})\big)$ est une famille génératrice de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K})$.
> (iii) La famille $\big(\mathrm{C}_1(\mathrm{A}), \mathrm{C}_2(\mathrm{A}), ..., \mathrm{C}_n(\mathrm{A})\big)$ est une famille libre de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K})$.
> (iv) La famille $\big(\mathrm{C}_1(\mathrm{A}), \mathrm{C}_2(\mathrm{A}), ..., \mathrm{C}_n(\mathrm{A})\big)$ est une base de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K})$.

On démontrera en particulier que si A admet un inverse à gauche B alors A est inversible et B est l'inverse de A.

20 Transposition.

21 Matrices carrées inversibles. Inverse d'une matrice. Ensemble des matrices inversibles (structure de groupe)

22
Le 19-4-2016

Soit A et B deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$. On suppose que $\mathrm{AB} = 0$.
Si $\mathrm{B} \neq 0$, alors A n'est pas inversible.
Démonstration par contraposée.

Voici ce que m'a écrit Baptiste Gueuziec :

Démontrons que si A inversible $\big(\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})\big)$ alors $\forall \mathrm{X} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K}) \quad \mathrm{AX} = 0 \Rightarrow \mathrm{X} = 0$.

Soit X telle que $\mathrm{AX} = 0$.

Alors $\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{AX}) = 0$
$(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A})\mathrm{X} = 0$
$\mathrm{I}_n \mathrm{X} = 0$
$\mathrm{X} = 0$

23

Le 31 octobre 2020

Soit A une matrice contenant une ligne de 0 et B une matrice quelconque.
AB contient une ligne ou une colonne de 0.
BA contient une ligne ou une colonne de 0.

Une matrice qui contient une ligne ou une colonne de 0 peut-elle être inversible ?

Prochain programme

Matrices et applications linéaires
(rang, algorithme du pivot de Gauss, système)

$\boxed{1}$ Opérations élémentaires sur les matrices. Matrices élémentaires associées.
Définitions. Exemples d'actions d'opérations élémentaires sur une matrice.
Les opérations élémentaires sont réversibles.
Les opérations élémentaires changent-elles le rang ?

$\boxed{2}$ Algorithmes du pivot (algorithme sec). Faire un organigramme.
Présenter l'algorithme de Gauss. Expliquer ce qu'est un « pivot partiel » et « un pivot total ».
Préciser les variables utilisées et les procédures utilisées.

Réponses :

A, p, q : variables globales.
p et q représentent des entiers naturels.
A appartient à $M_{p,\,q}(K)$
On utilise les procédures « Pivot », « Nettoie », « Permute ».

$\boxed{3}$ Système linéaire. Écriture matricielle ; écriture vectorielle.

$\boxed{4}$ Inégalités sur le rang d'une matrice comprenant n lignes et p colonnes.

$\boxed{5}$ Rang d'une matrice du type