TS — Exercices sur l'adéquation à une loi équirépartie

1 On dispose de deux dés dont on sait que l'un est équilibré et l'autre est pipé.
On les lance chacun 1000 fois et on obtient les résultats suivants :

Dé 1	**Numéro des faces**	1	2	3	4	5	6
	Nombre d'apparition	176	154	170	180	153	167

Dé 2	**Numéro des faces**	1	2	3	4	5	6
	Nombre d'apparition	81	204	110	221	98	296

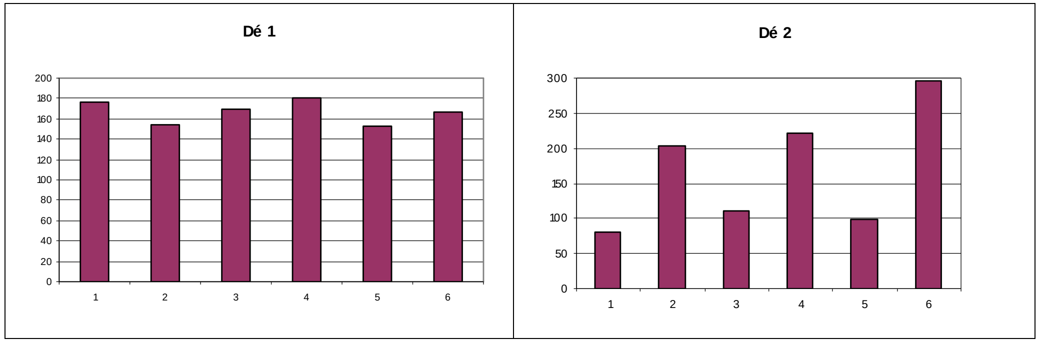
L'objectif de l'exercice est de répondre à la question suivante :

Peut-on, au vu des données, identifier le dé équilibré ?

Le dé équilibré est caractérisé par l'équiprobabilité d'apparition de chaque face.
Sa loi de probabilité est « équirépartie ».

1°) Approche graphique

Voici les diagrammes en barres des deux séries.



Compléter la phrase :

La distribution des fréquences expérimentales observées du dé … est proche d'une loi équirépartie.

2°) Approche théorique

L'ensemble des éventualités est {1, 2, 3, 4, 5, 6} et la loi étant équirépartie, la probabilité de chaque résultat est égale à $\frac{1}{6}$.

On calcule l'écart entre les fréquences expérimentales observées $f_0,\ f_1,\ f_2 \dots f_6$ observées et les fréquences théoriques égales à $\frac{1}{6}$ par le nombre

$$\mathrm{d}^2{}_{\mathrm{obs}} = \left(f_1-\frac{1}{6}\right)^2+\left(f_2-\frac{1}{6}\right)^2+\left(f_3-\frac{1}{6}\right)^2+\left(f_4-\frac{1}{6}\right)^2+\left(f_5-\frac{1}{6}\right)^2+\left(f_6-\frac{1}{6}\right)^2.$$

On rappelle que la fréquence de chaque numéro est égale à l'effectif de ce numéro divisé par l'effectif total.

Pour le dé 1 : $\mathrm{d}^2{}_{\mathrm{obs}} =$ ....

Pour le dé 2 : $\mathrm{d}^2{}_{\mathrm{obs}} =$ ....

Compléter la phrase :

« Les fréquences observées sont plus proches des fréquences théoriques pour le dé …. que pour le dé …. .»

---

2 Pour tester une table de nombres au hasard, on a recensé parmi 250 chiffres consécutifs le nombre de 0, de 1 etc. Les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant.

Chiffres	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Effectifs	22	24	28	23	18	33	29	17	31	25

On se propose de savoir si ces résultats sont en adéquation avec la loi équirépartie sur l'ensemble $E=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

1°) Calculer les fréquences expérimentales observées $f_0,\ f_1,\ f_2 \dots f_9$ des chiffres 0, 1, 2…, 9 (valeurs exactes sous forme décimale).

2°) Calculer le nombre $\mathrm{d}^2_{\mathrm{obs}} = \sum_{i=0}^{i=9}\left(f_i-0{,}1\right)^2$ puis $250\ \mathrm{d}^2_{\mathrm{obs}}$.

3°) On a répété 1 000 fois une simulation de 250 expériences modélisables par une loi équirépartie sur E et on a obtenu une série de 1 000 valeurs de $250\ \mathrm{d}^2$ pour laquelle on donne la médiane Me, le premier décile D_1 et le neuvième décile D_9 : $\mathrm{Me}=0{,}96$, $\mathrm{D}_1=0{,}32$, $\mathrm{D}_9=1{,}6$.
Peut-on considérer, au risque de 10 %, que les fréquences expérimentales observées de cette table sont en accord avec une loi équirépartie ?

3 Le service médical d'une grande entreprise a relevé l'heure de la journée pour chaque demande de soins pendant un mois.

Heures	[8 ; 10[	[10 ; 12[	[13 ; 15[	[15 ; 17[
Nombre de demandes de soins	31	30	41	58

1°) Calculer les fréquences expérimentales observées f_1, f_2, f_3, f_4 de chacune de ces quatre périodes (valeurs exactes sous forme décimale).

2°) Calculer le nombre $\mathrm{d}^2_{\mathrm{obs}} = \sum_{i=1}^{i=4}\left(f_i - \frac{1}{4}\right)^2$ puis $500\,\mathrm{d}^2_{\mathrm{obs}}$.

3°) Une simulation à partir de 1000 tirages de 160 chiffres dans une table de nombres au hasard a donné une série de 1000 valeurs de $500\,\mathrm{d}^2$ dont le neuvième décile est 1,48.
Peut-on considérer, au risque de 10 %, que les accidents sont équirépartis dans la journée ?

4 La roulette d'un petit casino ne comporte que trois issues possibles : 1, 2, 3. Une étude des résultats obtenus sur 300 parties a donné les résultats donnés dans le tableau ci-dessous.

Numéro	1	2	3
Nombre d'apparitions	108	102	90

1°) Calculer le nombre $\mathrm{d}^2_{\mathrm{obs}} = \sum_{i=1}^{i=3}\left(f_i - \frac{1}{3}\right)^2$ où f_1, f_2, f_3 sont les fréquences expérimentales observées respectives des numéros 1, 2, 3.

2°) Pour savoir si, au seuil de risque de 10 %, on peut dire que cette roulette donne bien des chiffres au hasard, on a simulé 2000 fois l'expérience consistant à générer 300 fois le choix de trois chiffres au hasard et on a calculé d^2 pour chaque simulation. Le neuvième décile de la série des d^2 est $\mathrm{D}_9 = 5{,}1\times 10^{-3}$.
Conclure.

Réponses

1 1°) Pour le dé 1 : $\mathrm{d}^2 \approx 0{,}000\ 623$; pour le dé 2 : $\mathrm{d}^2 \approx 0{,}035\ 351$.
Les fréquences observées sont plus proches des fréquences théoriques pour le dé 1 que pour le dé 2.

2 1°) $f_0 = \frac{22}{250} = 0{,}088$, $f_1 = \frac{24}{250} = 0{,}096$, $f_2 = \frac{28}{250} = 0{,}112$, $f_3 = \frac{23}{250} = 0{,}092$, $f_4 = \frac{18}{250} = 0{,}072$, $f_5 = \frac{23}{250} = 0{,}132$, $f_6 = \frac{29}{250} = 0{,}116$, $f_7 = \frac{17}{250} = 0{,}068$, $f_8 = \frac{31}{250} = 0{,}124$, $f_9 = \frac{25}{250} = 0{,}1$

2°) $\mathrm{d}^2_{\mathrm{obs}} = 0{,}004032$; $250\,\mathrm{d}^2_{\mathrm{obs}} = 1{,}008$

3°) $250\,\mathrm{d}^2_{\mathrm{obs}} < \mathrm{D}_9$ donc on peut considérer, au risque de 10 %, que les fréquences expérimentales observées de cette table sont en adéquation avec la loi équirépartie sur l'ensemble $E = \{\,0\,;1\,;...\,;9\,\}$.

3 1°) $f_1 = 0{,}19375$; $f_2 = 0{,}1875$; $f_3 = 0{,}25625$; $f_4 = 0{,}3625$
2°) $500\,\mathrm{d}^2_{\mathrm{obs}} = 9{,}8828125...$ 3°) $500\,\mathrm{d}^2_{\mathrm{obs}} > \mathrm{D}_9$ donc on rejette, au risque de 10 %, le modèle d'équirépartition.

4 1°) $\mathrm{d}^2_{\mathrm{obs}} = 0{,}001866...$ 2°) $\mathrm{d}^2_{\mathrm{obs}} < \mathrm{D}_9$ donc on peut accepter, au risque de 10 %, le modèle d'équirépartition.

N.B. : En général, pour ce type d'exercices, on donne les résultats sous forme décimale.