TS3 Devoir pour le lundi 15 février 2010

I. Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

A tout point M du plan P, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $Z = \left(\overline{z}\right)^2 + 2\mathrm{i}z$.

1°) On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $Z = X + \mathrm{i}Y$ avec x, y, X, Y réels.
Exprimer X et Y en fonction de x et y.
2°) Déterminer et représenter l'ensemble E des points M tels que Z soit réel.
On veillera à rédiger convenablement.
3°) Exprimer $\overline{Z}$ en fonction de z et $\overline{z}$.
4°) Déterminer z tels que $Z = 0$.

II. Calculer $S = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + ... + \mathrm{i}^{2009}$. Donner le résultat sous forme algébrique.

III. Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On note f l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = 1 + z^2$.

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier avec soin.

• Si M_1 et M_2 sont deux points symétriques par rapport à l'origine O du repère, alors leurs images sont confondues.

• Si M_1 et M_2 sont deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses, alors leurs images sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

• Si M_1 et M_2 sont deux points symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, alors leurs images sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

TS3

Correction du devoir pour le 15 février 2010

I.

1°) $X = x^2 - y^2 - 2y$ et $Y = 2x - 2xy = 2x(1-y)$

2°)

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in E &\Leftrightarrow Z \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \operatorname{Im} Z = 0 \\
&\Leftrightarrow Y = 0 \\
&\Leftrightarrow 2x(1-y) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ 1 - y = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ y = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

$\boxed{E = (\mathrm{O}y) \cup \Delta}$ où Δ désigne la droite d'équation $y = 1$.

3°) $\overline{Z} = z^2 - 2\mathrm{i}\overline{z}$

4°) $$\begin{aligned}
Z = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 2y = 0 \\ 2x(1-y) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 2y = 0 \\ x = 0 \text{ ou } y = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \mathrm{I} \begin{cases} x^2 - y^2 - 2y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \mathrm{II} \begin{cases} x^2 - y^2 - 2y = 0 \\ y = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

$\mathrm{I} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 2y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -y^2 - 2y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -y(y+2) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } y = -2 \\ x = 0 \end{cases}$ Les solutions de I sont 0 et –2i.	$\mathrm{II} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \text{ ou } y = -\sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases}$ Les solutions de II sont $\sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $-\sqrt{3} + \mathrm{i}$.

Conclusion : $Z = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = -2\mathrm{i}$ ou $z = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ ou $z = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$

II. Cet exercice repose sur la propriété des puissances de i.

$i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$ etc.

On observe que les puissances de i fonctionnent par cycles de 4.

1ère méthode : On utilise la formule de sommation des termes consécutifs d'une suite géométrique

$$S = 1 + i + i^2 + ... + i^{2009} = \underbrace{\frac{1-i^{2010}}{1-i}}_{\text{somme des termes d'une suite géométrique (il y a 2010 termes dans cette somme)}} = \frac{1-(-1)}{1-i} = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i$$

2e **méthode : Astucieuse compte tenu de la cyclicité d'ordre 4 des puissances de i**

On regroupe les termes par groupes de 4 en observant que $1 + i + i^2 + i^4 = 1 + i - 1 - i = 0$; de même, $i^5 + i^6 + i^7 + i^8 = 0$, $i^9 + i^{10} + i^{11} + i^{12} = 0$ etc.

III. Remarque pour cet exercice : on n'utilise pas du tout la forme algébrique de *z*.

Phrase 1 :

Si M_1 et M_2 sont deux points symétriques par rapport à l'origine O du repère, alors leurs images sont confondues.

Cette phrase est vraie.

En effet, si M_1 et M_2 sont deux points symétriques par rapport à l'origine O du repère, alors leurs affixes z_1 et z_2 vérifient $z_2 = -z_1$.

Leurs images respectives M'_1 et M'_2 par *f* ont donc pour affixes respectives $z'_1 = 1 + (z_1)^2$ et $z'_2 = 1 + (z_2)^2 = 1 + (-z_1)^2 = 1 + (z_1)^2$.

Donc $z'_1 = z'_2$ et les points M'_1 et M'_2 sont donc confondus.

Phrase 2 :

Si M_1 et M_2 sont deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses, alors leurs images sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Cette phrase est vraie.

En effet, si M_1 et M_2 sont deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses, alors leurs affixes z_1 et z_2 vérifient $z_2 = \overline{z_1}$.

Leurs images respectives M'_1 et M'_2 par *f* ont donc pour affixes respectives $z'_1 = 1 + (z_1)^2$ et $z'_2 = 1 + (z_2)^2 = 1 + (\overline{z_1})^2 = 1 + \overline{z_1^2} = \overline{1} + \overline{z_1^2} = \overline{1 + z_1^2} = \overline{z'_1}$.

Donc $z'_2 = \overline{z'_1}$ et les points M'_1 et M'_2 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Phrase 3 :

Si M_1 et M_2 sont deux points symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, alors leurs images sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Cette phrase est fausse.

En effet, si M_1 et M_2 sont deux points symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, alors leurs affixes z_1 et z_2 vérifient $z_2 = -\overline{z_1}$.

Leurs images respectives M'_1 et M'_2 par *f* ont donc pour affixes respectives $z'_1 = 1 + (z_1)^2$ et $z'_2 = 1 + (z_2)^2 = 1 + (-\overline{z_1})^2 = 1 + \overline{z_1}^2 = \overline{1} + \overline{z_1}^2 = \overline{1 + z_1^2} = \overline{z'_1}$.

Donc $z'_2 = \overline{z'_1}$ et les points M'_1 et M'_2 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (et non par rapport à l'axe des ordonnées).