TS

Exercices sur les intégrales

Dans les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{11}$, calculer l'intégrale après avoir justifié son existence.

$\boxed{1}$ $I=\int_1^5\left(x^2+x-\frac{1}{x}\right)\,dx$ $\boxed{2}$ $I=\int_1^5\frac{dx}{2x-1}$ $\boxed{3}$ $I=\int_{-4}^{-2}\frac{dx}{x+1}$ $\boxed{4}$ $I=\int_1^5\frac{\ln x}{x}\,dx$ $\boxed{5}$ $I=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

$\boxed{6}$ $I=\int_1^6\sqrt{x+3}\,dx$ $\boxed{7}$ $I=\int_1^e\frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$ $\boxed{8}$ $I=\int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx$ $\boxed{9}$ $I=\int_0^3\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$

$\boxed{10}$ $I=\int_3^4\frac{x^3-4x^2+x+1}{x^2}\,dx$ $\boxed{11}$ $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$

$\boxed{12}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(\ln x)$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

2°) Calculer $f'(x)$.

3°) Calculer $I=\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}$ après avoir justifié son existence.

$\boxed{13}$ **Sans aucun calcul,** donner le signe de chacune des intégrales suivantes :

$A=\int_2^4\ln(1+x)\,dx$; $B=\int_0^{\frac{1}{2}}-e^{x+3}\,dx$; $C=\int_{-2}^{-6}\sqrt{2-x}\,dx$; $D=\int_0^1\frac{dx}{x-3}$.

$\boxed{14}$ Soit f et g deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $[0 ; 5]$ telles que $\int_0^2 f(x)\,dx=-3$;

$\int_2^5 f(x)\,dx=4$; $\int_0^5 g(x)\,dx=3$.

Calculer $\int_0^5 f(x)\,dx$; $\int_0^5\big(2f(x)-5g(x)\big)\,dx$; $\int_2^0 f(x)\,dx$.

$\boxed{15}$ Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[-2; 7]$ telle que $\int_{-2}^7 f(x)\,dx=5$ et

$\int_4^7 f(x)\,dx=-1$.

Calculer $\int_{-2}^4 f(x)dx$.

$\boxed{16}$ Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0 ; 1]$ telle que pour tout $x\in[0 ; 1]$ on ait $x^2\leq f(x)\leq x$.

Donner un encadrement de $I=\int_0^1 f(x)\,dx$.

$\boxed{17}$ On pose $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$.

1°) Justifier l'existence de I et J.

2°) Calculer I + J et I – J ; en déduire les valeurs de I et J.

$\boxed{18}$ On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ et $g(x)=\frac{x^3}{1+x^2}$.

1°) Calculer $I_1=\int_0^1 f(x)\,dx$.

2°) Soit $I_2=\int_0^1 g(x)\,dx$.

Calculer I_1+I_2 ; en déduire la valeur de I_2.

$\boxed{19}$ On considère la fonction $f : x \mapsto |x-3|$.

On pose $I=\int_1^4 f(x)\,dx$.

1°) Justifier l'existence de I.

2°) Exprimer $f(x)$ sans valeur absolue suivant les valeurs de x.

3°) En écrivant $I=\int_1^3 f(x)\,dx+\int_3^4 f(x)\,dx$, calculer I.

Dans les exercices $\boxed{20}$ à $\boxed{25}$, calculer l'intégrale I à l'aide d'une intégration par parties.

$\boxed{20}$ $I=\int_0^{\pi}x\sin x\,dx$ $\boxed{21}$ $I=\int_0^1 x\,e^x\,dx$ $\boxed{22}$ $I=\int_1^2 x\ln x\,dx$ $\boxed{23}$ $I=\int_1^2\ln x\times\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$\boxed{24}$ $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\times\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ $\boxed{25}$ $I=\int_0^1 x\times\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

$\boxed{26}$ Calculer l'intégrale $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx$ à l'aide de deux intégrations par parties.

$\boxed{27}$ Calculer l'intégrale $I=\int_0^1 x^2\,e^x\,dx$ à l'aide de deux intégrations par parties.

$\boxed{28}$ Calculer la valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto \sin x$ sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

$\boxed{29}$ Calculer $I=\int_1^x\ln t\,dt$ (où x est un réel strictement positif) à l'aide d'une intégration par parties.

On prendra $u'(t)=1$ et $v(t)=\ln t$.

$\boxed{30}$ 1°) Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \mapsto x^2-9$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2°) Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

3°) Calculer l'aire (en unité d'aire) du domaine limité par $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.

Hachurer le domaine sur la figure.

$\boxed{31}$ 1°) Tracer sur un même graphique les courbes représentatives $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ des fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto -x^2+4x$ (l'unité graphique est le centimètre).

2°) Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

3°) Calculer l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ en cm^2 (valeur exacte sous forme fractionnaire).

Hachurer le domaine sur la figure.

$\boxed{32}$ Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité graphique 4 cm.

1°) Tracer sur un même graphique la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et la droite Δ d'équation $y = x$.
2°) Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.
3°) Calculer l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$ et Δ (hachurer le domaine sur la figure).

$\boxed{33}$ On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, 9]$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Calculer le volume V du solide engendré par la rotation de la courbe $\mathcal{C}$ autour de l'axe des abscisses.

$\boxed{34}$ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x \ln\left(1+t^2\right)\, \mathrm{d}t$.

On ne demande pas de calculer $f(x)$.
Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Corrigé

Pour les exercices de calculs d'intégrales, il est évidemment très intéressant de vérifier tous les résultats en utilisant la calculatrice (valeur approchée) ou mieux un logiciel de calcul formel sur ordinateur qui pourra donner une valeur exacte.

$\boxed{1}$ La fonction $f : x \mapsto x^2 + x - \frac{1}{x}$ est continue sur l'intervalle [1, 5] (somme de fonctions continues) donc f est intégrable sur l'intervalle [1, 5].

Une primitive de la fonction f sur l'intervalle]0, +∞[est la fonction F: $x \mapsto \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \ln x$.

$$\mathrm{I} = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \ln x\right]_1^5$$
$$= \left(\frac{5^3}{3} + \frac{5^2}{2} - \ln 5\right) - \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - \ln 1\right)$$
$$= \left(\frac{125}{3} + \frac{25}{2} - \ln 5\right) - \frac{5}{6}$$
$$= \frac{160}{3} - \ln 5$$

$\boxed{2}$ Remarque d'écriture : $\mathrm{I} = \int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{2x-1} = \int_1^5 \frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x$.

$f : x \mapsto \frac{1}{2x-1}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ comme fonction rationnelle (même s'il n'y a pas de x au numérateur) donc par restriction sur l'intervalle [1 ; 5].

Rappel d'une règle sur les primitives que l'on utilise ici.

Une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{ax+b}$ où a et b sont deux réels tels que a soit non nul est la fonction F: $x \mapsto \frac{1}{a}\ln|\,ax+b\,|$.

Une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2x-1}$ sur chacun des intervalles où elle est définie est la fonction F: $x \mapsto \frac{1}{2}\ln|\,2x-1\,|$.

$$\mathrm{I} = \left[\frac{1}{2}\ln|\,2x-1\,|\right]_1^5$$
$$= \left(\frac{1}{2}\ln|\,10-1\,|\right) - \left(\frac{1}{2}\ln|\,2-1\,|\right)$$
$$= \frac{1}{2}\ln 9$$
$$= \ln 3$$

$\boxed{3}$ Une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ sur chacun des intervalles où elle est définie est la fonction F: $x \mapsto \ln|\,x+1\,|$ (les valeurs absolues de sécurité s'avèrent très importantes ici).

$$\mathrm{I} = \left[\ln|\,x+1\,|\right]_{-4}^{-2}$$
$$\mathrm{I} = \ln|-1| - \ln|-3|$$
$$\mathrm{I} = -\ln 3$$

$\boxed{4}$ On peut écrire : $\mathrm{I} = \int_1^5 \frac{1}{x} \times \ln x\,\mathrm{d}x$.

On reconnaît la forme uu' dont la primitive est $\frac{u^2}{2}$.

Une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur l'intervalle]0, +∞[est la fonction F: $x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{2}$.

En effet, on peut écrire l

$$\mathrm{I} = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^5$$
$$= \frac{(\ln 5)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2}$$
$$= \frac{(\ln 5)^2}{2}$$

Remarque : $(\ln 5)^2 \neq 2\ln 5$ (autrement dit, on ne peut pas transformer $(\ln 5)^2$ en 2 ln 5)

Attention à la place du carré, on a : . $\ln(5^2) = 2\ln 5$

$\boxed{5}$ $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

On pose $u(x) = \mathrm{e}^x + 1$; $u'(x) = \mathrm{e}^x$; $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Un primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par $F(x) = \ln|\,u(x)\,| = \ln|\,\mathrm{e}^x + 1\,| = \ln(\mathrm{e}^x + 1)$.

$$\mathrm{I} = \left[\ln(\mathrm{e}^x + 1)\right]_0^{\ln 2}$$
$$= \ln(\mathrm{e}^{\ln 2} + 1) - \ln(\mathrm{e}^0 + 1)$$
$$= \ln 3 - \ln 2$$
$$= \ln \frac{3}{2}$$

$\boxed{6}$ $\mathrm{I}=\int_{1}^{6}\sqrt{x+3}\ \mathrm{d}x=\int_{1}^{6}(x+3)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}x=\left[\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{6}=\left(\frac{2\times 9^{\frac{3}{2}}}{3}\right)-\left(\frac{2\times 4^{\frac{3}{2}}}{3}\right)=\frac{54}{3}-\frac{16}{3}=\frac{38}{3}$

Primitive d'une fonction de la forme $u'u^{\alpha}\longrightarrow\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

Détail : $9^{\frac{3}{2}}=\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{3}=\left(\sqrt{9}\right)^{3}=3^{3}$

$\boxed{7}$ $\mathrm{I}=\left[\frac{(\ln x)^{3}}{3}\right]_{1}^{\mathrm{e}}$

$\mathrm{I}=\frac{(\ln \mathrm{e})^{3}}{3}-\frac{(\ln 1)^{3}}{3}$

$\mathrm{I}=\frac{(\ln \mathrm{e})^{3}}{3}$

$\mathrm{I}=\frac{1^{3}}{3}$

$\mathrm{I}=\frac{1}{3}$

$\boxed{8}$ On pense à la forme $u'\mathrm{e}^{u}$.

On effectue la réécriture $x\ \mathrm{e}^{\left(x^{2}\right)}=\frac{1}{2}\times 2x\times \mathrm{e}^{\left(x^{2}\right)}$.

Une primitive de la fonction $f: x\mapsto x\ \mathrm{e}^{x^{2}}$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $F: x\mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x^{2}}}{2}$.

$\mathrm{I}=\left[\frac{\mathrm{e}^{x^{2}}}{2}\right]_{0}^{1}$

$=\frac{\mathrm{e}^{1}}{2}-\frac{\mathrm{e}^{0}}{2}$

$=\frac{\mathrm{e}-1}{2}$

$\boxed{9}$ $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^{2}+x+1}$; on pose $u(x)=x^{2}+x+1$; $u'(x)=2x+1$; $f(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$;

$F(x)=\ln\left|u(x)\right|=\ln\left|x^{2}+x+1\right|=\ln\left(x^{2}+x+1\right)$ (on utilise des valeurs absolues de sécurité que l'on enlève après)

$\mathrm{I}=\left[\ln\left(x^{2}+x+1\right)\right]_{0}^{3}=\ln 13$

$\boxed{10}$ Il faut écrire : $\dfrac{x^{3}-4x^{2}+x+1}{x^{2}}=\dfrac{x^{3}}{x^{2}}-4\dfrac{x^{2}}{x^{2}}+\dfrac{x}{x^{2}}+\dfrac{1}{x^{2}}=x-4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^{2}}$; $\mathrm{I}=\ln\dfrac{4}{3}-\dfrac{5}{12}$

Solution détaillée :

$$\mathrm{I}=\int_{3}^{4}\frac{x^{3}-4x^{2}+x+1}{x^{2}}\ \mathrm{d}x=\int_{3}^{4}\left(x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{2}}\right)\ \mathrm{d}x=\left[\frac{x^{2}}{2}-4x+\ln x-\frac{1}{x}\right]_{3}^{4}=\ln\frac{4}{3}-\frac{5}{12}$$

Il fallait penser à effectuer une réécriture du quotient en séparant chaque terme du numérateur de manière à obtenir une somme pour laquelle on puisse aisément déterminer une primitive.
(La division polynomiale revient à effectuer cette transformation).

$\boxed{11}$ On utilise une primitive de la fonction tangente sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$.

Une primitive de la fonction $x\mapsto\tan x$ est la fonction $x\mapsto -\ln|\cos x|$ (reconnaissance de la forme $-\dfrac{u'}{u}$).

$$\mathrm{I}=\left[-\ln|\cos x|\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=-\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right|+\ln|\cos 0|=-\ln\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|+\ln|1|=-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=-\ln\sqrt{2}+\ln 2=-\frac{1}{2}\ln 2+\ln 2=\frac{\ln 2}{2}$$

$\boxed{12}$ 1°) $\boldsymbol{D}=\left]1\,;+\infty\right[$ 2°) $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ 3°) $\mathrm{I}=\ln 2$

Solution détaillée :

1°) $f(x)$ existe $\Leftrightarrow\begin{cases}\ln x>0\\ x>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow x>1$

$\boldsymbol{D}=\left]1\,;+\infty\right[$

2°) f est dérivable sur $\boldsymbol{D}$ comme composée de fonctions dérivables.

$\forall x\in\boldsymbol{D}\quad f'(x)=\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1}{\ln x}=\dfrac{1}{x\ln x}$ (rappel : $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$)

3°) La fonction f est continue sur $\boldsymbol{D}$ donc sur $\left[\mathrm{e}\,;\mathrm{e}^{2}\right]$.

Par conséquent f est intégrable sur $\left[\mathrm{e}\,;\mathrm{e}^{2}\right]$.

$$\mathrm{I}=\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\left[\ln(\ln x)\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^{2}}=\ln 2$$

$\boxed{13}$ On fera attention à l'ordre des bornes ! + ; – ; – ; – .

Solution détaillée :

Il faut mener une réflexion au niveau des bornes et au niveau du signe de la fonction (ordre des bornes et signe de ce qui est dans l'intégrale).

$\mathrm{A}=\int_2^4 \ln(1+x)\ \mathrm{d}x$

$\forall x\in[2\,;4]\quad \ln(1+x)\geq 0$

$2\leqslant 4$ (les bornes sont dans le bon sens)

Donc $\mathrm{A}\geq 0$.

$\mathrm{B}=\int_0^{\frac{1}{2}} -\mathrm{e}^{x+3}\ \mathrm{d}x$

$\forall x\in\left[0\,;\frac{1}{2}\right]\quad -\mathrm{e}^{x+3}\leq 0$

$0\leq\frac{1}{2}$

Donc $\mathrm{B}\leq 0$.

$\mathrm{C}=\int_{-2}^{-6}\sqrt{2-x}\ \mathrm{d}x$

Les bornes ne sont pas dans le bon sens ; on transforme l'écriture.

$\mathrm{C}=-\int_{-6}^{-2}\sqrt{2-x}\ \mathrm{d}x$

$\forall x\in[-6\,;-2]\quad \sqrt{2-x}\geq 0$

$-6\leq -2$

Donc $\mathrm{C}\leq 0$.

$\mathrm{D}=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x-3}$

$\forall x\in[0\,;1]\quad \frac{1}{x-3}\leq 0$

$0\leqslant 1$

Donc $\mathrm{D}\leq 0$.

$\boxed{14}$ Utilisation des propriétés des intégrales

$\int_0^5 f(x)\ \mathrm{d}x=1$; $\int_0^5\big(2f(x)-5g(x)\big)\ \mathrm{d}x=-13$; $\int_2^0 f(x)\ \mathrm{d}x=3$

Solution détaillée :

f est continue sur l'intervalle [0 ; 5].
D'après la relation de Chasles,

$$\int_0^5 f(x)\ \mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x+\int_2^5 f(x)\ \mathrm{d}x=-3+4=1$$

f et g sont continues sur l'intervalle [0 ; 5].

Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^5\big(2f(x)-5g(x)\big)\ \mathrm{d}x=2\int_0^5 f(x)\ \mathrm{d}x-5\int_0^5 g(x)\ \mathrm{d}x=-13$$

$$\int_2^0 f(x)\ \mathrm{d}x=-\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x=-(-3)=3.$$

$\boxed{15}$ Utilisation des propriétés des intégrales

$\int_{-2}^4 f(x)\ \mathrm{d}x=6$

Solution détaillée :

D'après la relation de Chasles pour les intégrales, on a :

$$\int_{-2}^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^7 f(x)\ \mathrm{d}x+\int_7^4 f(x)\ \mathrm{d}x=\int_{-2}^7 f(x)\ \mathrm{d}x-\int_4^7 f(x)\ \mathrm{d}x=5-(-1)=6$$

$\boxed{16}$ Encadrement d'une intégrale

$\frac{1}{3}\leq \mathrm{I}\leq\frac{1}{2}$ (on utilise la « croissance » de l'intégrale).

Solution détaillée :

f : fonction continue sur l'intervalle [0 ; 1] telle que $\forall\, x\in[0\,;1]\quad x^2\leq f(x)\leq x$

On désire obtenir un encadrement de $\mathrm{I}=\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$.

Considérons les fonctions g et h définies par $g(x)=x^2$ et $h(x)=x$.

$\forall x\in[0\,;1]\quad g(x)\leq f(x)\leq h(x)$

Donc par croissance de l'intégrale, on a : $\int_0^1 g(x)\ \mathrm{d}x\leq\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x\leq\int_0^1 h(x)\ \mathrm{d}x$ (car les bornes sont dans le « bon » sens).

On peut ensuite calculer les intégrales de g et h sur [0 ; 1].

$$\int_0^1 g(x)\ \mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 h(x)\ \mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

On peut alors écrire : $\frac{1}{3}\leq\mathrm{I}\leq\frac{1}{2}$.

$\boxed{17}$ Calculs astucieux d'intégrales

$\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\ \mathrm{d}x$; $\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\ \mathrm{d}x$

I et J ne sont pas calculables simplement de manière directe.

1°) Les fonctions f et g définies par $f(x)=\cos^2 x$ et $g(x)=\sin^2 x$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc par restriction sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Elles sont donc intégrables sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

On en déduit que I et J existent.

Autre rédaction possible :

La fonction $f : x \mapsto \cos^2 x$ est continue sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc intégrable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction $g : x \mapsto \sin^2 x$ est continue sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc intégrable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

On en déduit que I et J existent.

2°) Il faut utiliser les formules $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ (relation fondamentale) et $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ (formule de duplication vue en 1ère).

En utilisant la linéarité de l'intégrale, on peut écrire :

$$\mathrm{I}+\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,\mathrm{d}x=\left[\,x\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}\ ;$$

$$\mathrm{I}-\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,\mathrm{d}x=\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)}{2}-\frac{\sin\left(2\times 0\right)}{2}=\frac{\sin\pi}{2}-\frac{\sin 0}{2}=0$$

I et J vérifient le système : $\begin{cases}\mathrm{I}+\mathrm{J}=\dfrac{\pi}{2}\\ \mathrm{I}-\mathrm{J}=0\end{cases}$.

On trouve : $\mathrm{I}=\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \mathrm{J}=\dfrac{\pi}{4}$.

$\boxed{18}$ Tirer les traits de fraction à la règle.

1°) On calcule une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$.

On effectue une réécriture $\dfrac{x}{1+x^2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{1+x^2}$.

On peut donc utiliser une primitive de $\dfrac{u'}{u}$.

Ainsi, une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|=\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{2}$.

$$\mathrm{I}_1=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2}\right]_0^1=\frac{\ln\left(1^2+1\right)}{2}-\frac{\ln 1}{2}=\frac{\ln 2}{2}$$

2°) $\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left[f(x)+g(x)\right]\,\mathrm{d}x$ (linéarité de l'intégrale)

Or $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)+g(x)=\dfrac{x^3+x}{x^2+1}=\dfrac{x\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=x$

$$\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{I}_2=\frac{1}{2}-\mathrm{I}_1=\frac{1-\ln 2}{2}.$$

$\boxed{19}$ $f : x \mapsto |x-3|$

$$\mathrm{I}=\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$$

1°) **Justifions l'existence de I.**

La fonction f est continue sur l'intervalle [1 ; 4] donc est intégrable sur l'intervalle [1 ; 4].

2°) **Exprimons $f(x)$ en fonction de x sans barres de valeurs absolues.**

Rappel sur la valeur absolue :

$$|X|=\begin{cases}X & \text{si } X\geqslant 0\\ -X & \text{si } X\leqslant 0\end{cases}$$

Pour exprimer $f(x)$ sans barre de valeur absolue, on regarde le signe de $x-3$.

$$\begin{cases}f(x)=x-3 & \text{si } x\geq 3\\ f(x)=-x+3 & \text{si } x\leq 3\end{cases}$$

3°) **Calculons I.**

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&=\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_1^3(-x+3)\,\mathrm{d}x+\int_3^4(x-3)\,\mathrm{d}x\\&=\left[-\frac{x^2}{2}+3x\right]_1^3+\left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_3^4\\&=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

$\boxed{20}$ **Calcul de** $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin x\,\mathrm{d}x$

On procède en effectuant une intégration par parties car on ne peut pas trouver une primitive directement.
Le « bon » choix pour cette intégration par parties est : $u'(x)=\sin x$ et $v(x)=x$.

On a alors $u(x)=-\cos x$ et $v'(x)=1$.

u et v sont définies et dérivables sur $[0\,;\pi]$.
u' et v' sont continues sur $[0\,;\pi]$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_0^{\pi} x \sin x \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} u'(x)\, v(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[u(x)v(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\cos x \times x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) \times 1\,\mathrm{d}x \\
&= (-\cos \pi \times \pi) - (-\cos 0 \times 0) + \int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x \\
&= -(-1)\times\pi + \left[\sin x\right]_0^{\pi} \\
&= \pi + \sin \pi - \sin 0 \\
&= \pi + 0 - 0 \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

Rappels : $\cos \pi = -1$; $\sin \pi = 0$; $\sin \pi = 0$

Version plus courte :

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi} x \sin x\,\mathrm{d}x = \left[-x\cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x)\,\mathrm{d}x = \left[-x\cos x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = -\pi\cos\pi + \left[\sin x\right]_0^{\pi} = \pi$$

$\boxed{21}$ **Calcul de** $\mathrm{I} = \int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

On pose $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x$.

On a alors $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = 1$.

On applique la formule d'IPP.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \left[x\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\
&= 1\times\mathrm{e}^1 - 0\times\mathrm{e}^0 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e} - \left[\mathrm{e}^x\right]_0^1 \\
&= \mathrm{e} - \left(\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0\right) \\
&= \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Version plus courte :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[x\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - \left[\mathrm{e}^x\right]_0^1 = \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = 1$$

I = 1

$\boxed{22}$ **Calcul de** $\mathrm{I} = \int_1^2 x \ln x\,\mathrm{d}x$

On pose $u'(x) = x$ et $v(x) = \ln x$.

On a alors $u(x) = \dfrac{x^2}{2}$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$.

$$\mathrm{I} = \left[\frac{x^2}{2}\times\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 0 - \int_1^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

$$\mathrm{I} = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

$\boxed{23}$ **Calcul de** $\mathrm{I} = \int_1^2 \ln x \times \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

On a alors $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = 2\sqrt{x}$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \left[\ln x \times 2\sqrt{x}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\ln x \times 2\sqrt{x}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \quad \left(\text{car } \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\
&= 2\sqrt{2}\,\ln 2 - \ln 1 \times 2\sqrt{1} - \left[4\sqrt{x}\right]_1^2 \\
&= 2\sqrt{2}\,\ln 2 - 4\sqrt{2} + 4
\end{aligned}
$$

On utilise $\dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$ pour tout réel $x > 0$.

$\boxed{24}$ **Calcul de** $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \times \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

$$\mathrm{I} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \quad \left(\text{observer que : } \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \ln\sqrt{2} - \ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2 - \ln 2 = -\frac{\ln 2}{2}\right)$$

Solution :

$u(x)=x \quad v'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$u'(x)=1 \quad v(x)=\tan x$

$$\mathrm{I}=\left[x\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{4}-0-\left[-\ln\left|\cos x\right|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \qquad \left(\tan 0=0\ ;\ \tan\frac{\pi}{4}=1\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-0$$

$$=\frac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}-\ln 2$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2-\ln 2$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$$

Une primitive de la fonction tangente est la fonction $x \mapsto -\ln|\cos x|$ sur tous les intervalles où elle est définie.

25 Calcul de $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^1 x\times\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

La formule d'IPP fait apparaître l'intégrale suivante dont le détail du calcul est donné ci-dessous (la démarche consiste à écrire la racine carrée à l'aide d'un exposant fractionnaire : on écrit $\sqrt{x+1}=(x+1)^{\frac{1}{2}}$).

Une primitive de la fonction $x\mapsto\sqrt{x+1}$ est la fonction $x\mapsto\dfrac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$.

On applique la règle de primitive d'une fonction de la forme $u'u^{\alpha}$ avec $u(x)=x+1$.

$$\int_0^1\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1(x+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

$$\mathrm{I}=\frac{4-2\sqrt{2}}{3}$$

26 Calcul de $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\times\cos x\,\mathrm{d}x$

On effectue une double IPP parce qu'avec une seule IPP on retombe sur une intégrale que l'on ne sait pas calculer.

On pose $u_1'(x)=\cos x$ et $v_1(x)=x^2$
$u_1(x)=\sin x$ et $v_1'(x)=2x$

$$\mathrm{I}=\left[\sin x\times x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\times 2x\,\mathrm{d}x$$

$$=\sin\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\sin 0\times 0^2-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\times x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,\mathrm{d}x$$

On calcule ensuite $\mathrm{J}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,\mathrm{d}x$.

On pose : $u_2'(x)=\sin x$ et $v_2(x)=x$.
On a alors $u_2(x)=-\cos x$ et $v_2'(x)=1$.

$$\mathrm{J}=\left[-\cos x\times x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)\times 1\,\mathrm{d}x$$

$$=\left(-\cos\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\cos 0\times 0\right)+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0$$

$$=1$$

On reprend alors le calcul de I :

$$\mathrm{I}=\frac{\pi^2}{4}-2\mathrm{J}$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-2$$

$$\mathrm{I}=\frac{\pi^2}{4}-2$$

27 **Calcul de I =** $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

On effectue une première IPP ; on trouve alors : $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[x^2\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 2x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Grâce à une deuxième IPP, que l'on effectue à part, on obtient : $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 1$. Finalement, on trouve $\mathrm{I} = \mathrm{e} - 2$.

Solution détaillée :

On pose $u_1(x) = x^2$ et $v_1'(x) = \mathrm{e}^x$

$u_1'(x) = 2x$ et $v_1(x) = \mathrm{e}^x$

D'après la formule d'IPP, on a :

$$\mathrm{I} = \left[x^2\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 2x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{e} - 2\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

On calcule $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

On pose $u_2'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v_2(x) = x$.

On a alors $u_2(x) = \mathrm{e}^x$ et $v_2'(x) = 1$.

On applique la formule d'IPP.

$$\mathrm{J} = \left[x\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

$$= 1\times\mathrm{e}^1 - 0\times\mathrm{e}^0 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{e} - \left[\mathrm{e}^x\right]_0^1$$

$$= \mathrm{e} - \left(\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0\right)$$

$$= \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1)$$

$$= 1$$

On reprend le calcul de I.

$\mathrm{I} = \mathrm{e} - 2\mathrm{J}$

$\mathrm{I} = \mathrm{e} - 2$

28 ***f* : $x \mapsto \sin x$**

Calculons la valeur moyenne de la *f* sur [0 ; π].

Par définition, la valeur moyenne μ de *f* sur [0 ; π] est égale à $\mu = \dfrac{1}{\pi - 0}\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$.

$$\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\cos\pi + \cos 0\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-(-1) + 1\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

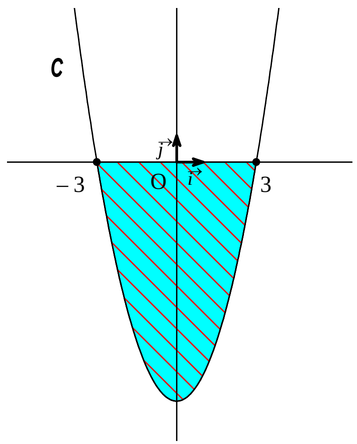
$$\mu = \frac{2}{\pi}$$

29 Calculons $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t$ ($x > 0$) à l'aide d'une IPP.

On pose $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$.

$\mathrm{I} = x\ln x - x + 1$

30 1°) $\mathcal{C}$ est l'image de la courbe représentative de la fonction carré par la translation de vecteur $-9\vec{j}$.



2°) Le mieux est de faire un tableau de signes.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
Signe de x^2-9		$+$	0	$-$	0	$+$	

3°) f est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) et $\forall x \in [-3\,;3]$ $\quad f(x) \leq 0$ donc l'aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses est égale à

$$\mathcal{A} = -\int_{-3}^{3}\left(x^2-9\right)\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{3}\left(9-x^2\right)\,\mathrm{d}x = \ldots = 36 \text{ u.a.}$$

N.B. : Le domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses est défini par le système d'inéquations $\begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$.

$\boxed{31}$ 1°) Les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' sont des paraboles.

$\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction carré.

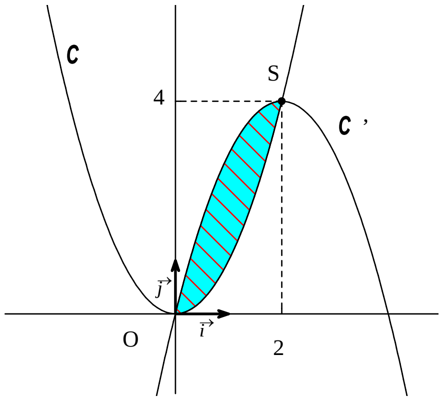
$\mathcal{C}$ ' est une parabole de sommet S (2 ; 4) tournée vers le bas ; la parabole $\mathcal{C}$ ' passe par le point O.
Pour le tracé de $\mathcal{C}$ ', on peut faire un petit tableau de valeurs.

Rappel :

La courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ est une parabole.

Son sommet S a pour abscisse $x_S = -\dfrac{b}{2a}$.

$y_S = a{x_S}^2 + bx_S + c$



2°) On étudie le signe de $f(x) - g(x) = 2x^2 - 4x = 2x(x-2)$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $2x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de $\mathcal{C}$ ' sur $]-\infty\,;0[\cup]2\,;+\infty[$.
- $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de $\mathcal{C}$ ' sur $]0\,;2[$.
- $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' sont sécantes aux points d'abscisses 0 et 2.

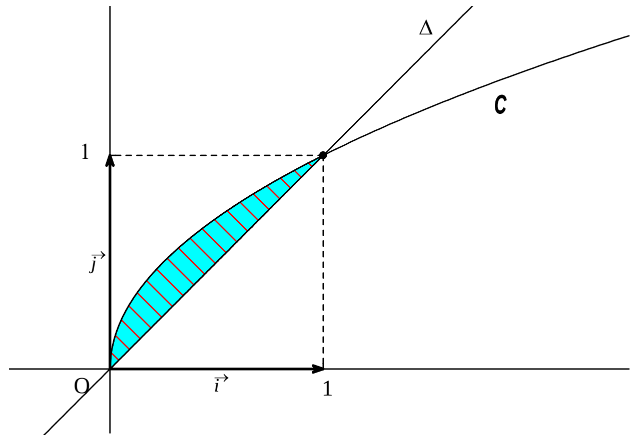
3°) $\mathcal{C}$ est au-dessous de $\mathcal{C}$ ' sur l'intervalle [0 ; 2] donc l'aire comprise entre les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' est égale à :

$$\mathcal{A} = \int_0^2 \left[g(x) - f(x)\right]\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(4x - 2x^2\right)\,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{8}{3} \text{ u.a.}$$

Or l'unité graphique est le centimètre donc $\mathcal{A} = \dfrac{8}{3}$ cm^2.

N.B. Le domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' est défini par le système d'inéquations $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$

$\boxed{32}$ 1°) Tracé de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite Δ.



2°) $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) - x = \sqrt{x} - x = \sqrt{x}\left(1 - \sqrt{x}\right)$

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\sqrt{x}$	0	$+$		$+$	
Signe de $1-\sqrt{x}$		$+$	0	$-$	
Signe de $f(x)-x$	0	$+$	0	$-$	

On peut aussi appliquer directement la règle de comparaison d'un nombre positif ou nul et de sa racine carrée (règle vue en 2^e^ ou en 1^ère^) :

- Si $0 < x < 1$, alors $x < \sqrt{x}$.
- Si $x > 1$, alors $\sqrt{x} < x$.

3°) La courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ sur l'intervalle [0 ; 1] donc l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$ et de Δ est égale à :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x\right)\,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{6} \text{ u.a.}$$

Une primitive de la fonction $u : x \mapsto \sqrt{x}$ est la fonction F: $x \mapsto \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ (on écrit $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$).

Or 1 u.a. $= (4\text{ cm}) \times (4\text{ cm}) = 16\text{ cm}^2$ donc $\mathcal{A} = \dfrac{8}{3}\text{cm}^2$.

N.B. Le domaine compris entre $\mathcal{C}$ et Δ est défini par le système d'inéquations $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq \sqrt{x} \end{cases}$.

$\boxed{\mathbf{33}}$ On applique la formule donnant le volume du solide engendré par la rotation d'une courbe autour de l'axe des abscisses (formule des disques).

Le volume du solide est donné par $\mathrm{V} = \pi \times \int_a^b \left[f(x)\right]^2\,\mathrm{d}x$.

$\mathcal{C}$ est une demi-parabole (d'axe (Ox)). La surface engendrée est un paraboloïde de révolution.

$$\mathrm{V} = \pi \int_0^9 \left[f(x)\right]^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^9 \left[\sqrt{x}\right]^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^9 x\,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{81\pi}{2} \text{ u.v.}$$

$\boxed{\mathbf{34}}$ On pose $u(t) = \ln\left(1 + t^2\right)$.

u est continue sur $\mathbb{R}$.

Or $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t$.

Donc d'après le cours, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$.

On applique le théorème sur la dérivée d'une fonction φ définie par $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est une fonction continue sur un intervalle I.

φ est dérivable sur I et $\forall x \in \mathrm{I} \quad \varphi'(x) = f(x)$.