Exercices sur la convexité

$\boxed{1}$ **Inégalité de Poncelet**

Soit f une fonction définie convexe sur un intervalle I = $[a\ ;\ b]$ $(a < b)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe C^1.

Démontrer que l'on a :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_{\mathrm{I}} f \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

$\boxed{2}$ Étudier la convexité de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)$.

En déduire que pour tout n-uplet $(x_1, x_2, ..., x_n)$ $(n \geqslant 2)$ de réels positifs ou nuls on a :

$$1+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)} \leq 1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

$\boxed{3}$ Soit f une fonction convexe définie sur un intervalle I = $]\alpha\ ;\ \beta[$ $\left((\alpha,\beta)\in\overline{\mathbb{R}}^2\right)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Démontrer que f est lipchitzienne sur tout intervalle J = $[a\ ;\ b]$ inclus dans I.

Indications :

On fixe a' et b' dans I tels que $a' < a < b < b'$.

Démontrer que pour tout couple $(x\ ;\ y)$ d'éléments de J tels que $x \neq y$, on a :

$$\frac{f(a)-f(a')}{a-a'} \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(b)-f(b')}{b-b'}.$$

Conclure.

$\boxed{4}$ Soit n un entier naturel.

Démontrer que $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$. En déduire que : $n! = \mathrm{o}\left(n^n\right)$.

$\boxed{5}$ Soit $f : [0\ ;\ 1] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

Démontrer que la fonction φ définie par $\varphi(x) = f(x) + f(1-x)$ est décroissante sur $\left[0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$.

$\boxed{6}$ Soit x et y deux réels quelconques dans $[1\ ;+\infty[$.

Comparer $\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)$ et $\sqrt{\ln x\ \ln y}$; préciser le cas d'égalité.

$\boxed{7}$ 1°) Démontrer que la somme de deux fonctions convexes sur un intervalle est convexe.

2°) Déterminer les fonctions f à la fois convexes et concaves sur un intervalle I non vide, non réduit à un singleton.

3°) Soit φ une fonction affine sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux fonctions convexes f et g définies sur $\mathbb{R}$ telles que l'on ait $f + g = \varphi$.

Démontrer que f et g sont affines.

$\boxed{8}$ Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

1°) On suppose qu'il existe un réel x_0 tel que $f'(x_0)=0$.

Démontrer que f présente un minimum global en x_0.

2°) On suppose qu'il existe un réel α strictement positif tel que $\forall\ x \in \mathbb{R}$ $f''(x) \geq \alpha$.

Démontrer que f présente un minimum global sur $\mathbb{R}$.

Indications :

- Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $f'(x) \geq f'(0) + \alpha x$.
  En déduire $\lim\limits_{+\infty} f'$.
- Déterminer de même $\lim\limits_{-\infty} f'$.
- Établir que f' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et conclure.

$\boxed{9}$ Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1°) On suppose que f est majorée au voisinage de $+\infty$.

Démontrer que f est décroissante.

Indication :

Raisonner par l'absurde en considérant deux réels a et b tels que $a < b$ et $f(a) < f(b)$.

Justifier que pour tout réel $x > b$, on a : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et étudier $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2°) On suppose que f est majorée au voisinage de $-\infty$.

Démontrer que f est croissante.

3°) Existe-t-il des fonctions convexes sur $\mathbb{R}$ et majorées ?

$\boxed{10}$ Soit f une fonction convexe non constante définie sur intervalle I (non vide, non réduit à un singleton) à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose que f est dérivable sur I et que f admet un extremum local en un réel en x_0 distinct des extrémités de I.

Préciser la nature de cet extremum.

Peut-on déterminer la nature de cet extremum lorsque x_0 est une extrémité de I ?

$\boxed{11}$ Soit f une fonction convexe définie sur intervalle I = $[a\ ;\ b]$ $(a < b)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1°) Démontrer que f atteint sa borne supérieure en a ou b.

2°) Démontrer que si f admet un extremum local en un réel x_0 de I, alors f admet un minimum global en x_0.

12 Soit f une fonction convexe définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démontrer que la fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en $+\infty$.

13 Soit f une fonction convexe sur un intervalle I (non vide, non réduit à un élément).

1°) On note $\mathcal{C}$ la représentation de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit α et β deux réels quelconques dans I tels que $\alpha < \beta$.
On note A et B les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives α et β.
Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite (AB).
2°) On suppose que I = $]a\,;\,b[$ où a et b sont deux réels fixés tels que $a < b$.
Démontrer que f est minorée sur I.

14 Démontrer que pour tout n-uplet $(a_1, a_2, ..., a_n)$ ($n \geqslant 2$) de réels strictement positifs on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_j} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Indication :

Poser $s = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$.

15 On considère les fonctions $f : t \mapsto \left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t$ et $g : t \mapsto \left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t+1}$.

1°) a) Par quelle transformation du plan le graphe de g se déduit-il de celui de f ?
b) Écrire une relation simple entre $g^{(k)}(t)$ et $f^{(k)}(-t-1)$.

2°) Donner le tableau de variation de f. (On pourra étudier $u = \dfrac{f'}{f}$).

3°) Étudier la concavité de f.

Indications : Pour $t > 0$, on écrira $\dfrac{f''}{f'} = (u+v)(u-v)$ où $u = \dfrac{f'}{f}$ et v à déterminer et on étudiera les variations de $u+v$ et $u-v$).
4°) Représenter graphiquement les graphes de f et g dans un même repère (unité : 2 cm).

16 **Inégalité de Jensen**

1°) Soit f une fonction continue sur l'intervalle I = [0 ; 1] et φ une fonction convexe continue sur $\mathbb{R}$.

Comparer $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} \varphi \circ f$ et $\varphi\left(\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f\right)$ avec les sommes de Riemann.

2°) Soit h une fonction continue sur l'intervalle I = [0 ; 1] à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

On pose A = $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Démontrer que l'on a : $\sqrt{1+A^2} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+[h(x)]^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 1 + A$.

b) Quel est le cas d'égalité ?

c) On suppose que h est la dérivée d'une fonction f croissante de classe C^1 définie sur [0 ; 1] à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Donner une interprétation géométrique de l'inégalité du a).

17 Soit f une fonction convexe sur un intervalle non vide I.

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels quelconques dans I ($n \in \mathbb{N}^*$).

Comparer $f\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)$ et $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$.

18 Soit f une fonction convexe définies sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs strictement positives, deux fois dérivable.

On note g la fonction définie par $g(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} f\left(\mathrm{e}^{-x}\right)$.

Démontrer que g est convexe.

19 Soit f une fonction convexe définie sur intervalle I = $[a\,;\,b]$ ($a < b$) à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Démontrer que f admet un maximum sur I atteint en a ou b.

20 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On note g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $h(x) = xf(x)$.

1°) Soit a et b deux réels strictement positifs fixés.
On note τ_a le taux de g en a et θ_b le taux en b de h.

Démontrer que pour tout réel x strictement positif, on a : $\theta_a(x) = -\dfrac{1}{a}\tau_{\frac{1}{a}}\left(\dfrac{1}{x}\right) + f(a)$.

2°) Démontrer que g est convexe si et seulement si h est convexe.

21 Soit q une fonction continue de $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel t, on ait $q(t) \geqslant 0$.

Démontrer que toute solution non identiquement nulle de l'équation différentielle $y'' = q(t)y$ s'annule au plus une fois.

22 **Inégalité de Hölder**

1°) Soit u et v deux réels positifs. Soit p et q deux réels strictement positifs tels que l'on ait : $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$.

Démontrer que l'on a : $uv \leq \dfrac{u^p}{p} + \dfrac{v^q}{q}$.

2°) Soit f et g deux fonctions définies et continues sur I = [0 ; 1] à valeurs positives.

Démontrer que l'on a : $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} fg \leq \left(\int_{\mathrm{I}} f^p\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_{\mathrm{I}} g^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

Indication : appliquer le 1°) aux fonctions u et v définies par $u(x) = \dfrac{f(x)}{\left(\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f^p\right)^{\frac{1}{p}}}$ et $v(x) = \dfrac{g(x)}{\left(\displaystyle\int_{\mathrm{I}} g^q\right)^{\frac{1}{q}}}$.

23 Soit f une fonction convexe de classe C^1 sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ on a :

$$0 \leqslant \frac{1}{2} f(0) + f(1) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2} f(n) - \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{8}\left[f'(n) - f'(0)\right]$$

24 Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$

Indication : Utiliser la convexité pour encadrer cette somme.

25 Soit f et g deux fonctions de classe C^2 sur un intervalle $[a\,;b]$ où a et b deux réels tels que $a < b$ vérifiant $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$ et pour tout $x \in [a\,;b]$ $\quad f'' \leqslant g''$.

Démontrer que l'on a : $g \leqslant f$.

Questions de cours

1 Lemme des pentes (énoncé et démonstration).

2 Comparaisons de moyennes

3 Fonction convexe deux fois dérivable sur un intervalle.

4 Méthode des trapèzes.

5 Méthode de Newton.

6 Courbe au-dessus de ses tangentes

7 La dérivée d'une fonction convexe dérivable sur un intervalle est croissante sur cet intervalle.

8 Préciser la fonction pente de la fonction carré (on se place en un réel a fixé).

Interpréter l'inégalité triangulaire comme inégalité de convexité

Solutions

$\boxed{8}$ On utilise la convexité de la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$

Corrigé

$\boxed{3}$ Utiliser la croissance de la fonction pente.

$\boxed{4}$ On utilise la concavité de la fonction ln :

$$\frac{\ln 1+\ln 2+...+\ln n}{n} \leq \ln\left(\frac{1+2+...+n}{n}\right)$$

$\boxed{5}$ Faire une figure.

$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \frac{1}{2}$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\cancel{x_2-x_1}} \leq \frac{f(1-x_1)-f(1-x_2)}{\cancel{x_2-x_1}}$$ (croissance de la fonction pente)

$\boxed{6}$ Soit x et y deux réels quelconques dans $[1\ ;+\infty[$.

$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

ln est croissante sur $]0\ ;+\infty[$.

Donc $\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \ln\sqrt{xy}$

D'où $\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\ln x+\ln y}{2}$

$\frac{\ln x+\ln y}{2} \geq \sqrt{\ln x \ln y}$ (car $\left(\sqrt{\frac{\ln x}{2}}-\sqrt{\frac{\ln y}{2}}\right)^2 \geq 0$)

Donc $\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln x \ln y}$

Autre façon :

Haddadene Rabah le 12 mars 2012

– ln est convexe donc $-\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{-\ln x-\ln y}{2}$ donc $\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\ln x+\ln y}{2} \geq \sqrt{\ln x\ \ln y}$.

La dernière inégalité provient de la comparaison entre les moyennes arithmétique et géométrique de deux nombres positifs ou nuls.

$\boxed{7}$ 2°) f convexe donc $\left.\begin{array}{l} f \text{ convexe donc } \tau_a \ \uparrow \\ f \text{ concave donc } \tau_a \ \downarrow \end{array}\right\}$ donc τ_a est constante sur I (on utilise le fait qu'une fonction croissante et décroissante sur une partie de $\mathbb{R}$, qui n'est pas nécessairement un intervalle, est constante).

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=k$$
$$f(x)-f(a)=k(x-a)$$
$$f(x)=f(a)+k(x-a)$$
Donc f est affine sur I.

3°) Idée : $f = \varphi - g$ est convexe et concave donc f est affine.

$\boxed{14}$ L'inégalité qu'il faut démontrer s'écrit donc : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}\geq\frac{n}{n-1}$.

$$\frac{a_i}{s-a_i}=\frac{s+(a_i-s)}{s-a_i}=\frac{s}{s-a_i}-1$$

On applique l'inégalité classique entre la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique aux nombres $x_i=\dfrac{s}{s-a_i}$.

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{s-a_i}}{n}\geq n\times\frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{s-a_i}{s}}=\frac{n}{n-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{s-a_i}{s}=n-1$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{s-a_i}\geq\frac{n^2}{n-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}\geq\frac{n^2}{n-1}-n=\frac{n}{n-1}$$

$\boxed{16}$ 2°) a) Utiliser la convexité de la fonction $x\mapsto\sqrt{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}_+$.
c) La longueur d'un arc de courbe est toujours supérieure ou égale à la longueur de la corde.
La longueur de la courbe est inférieure ou égale à la somme des longueurs des segments [AB] et [BC] avec A(0 ; f(0)), B (1 ; f(0)), C(1 ; f(1)) (on le voit très aisément sur un petit graphique).

$\boxed{18}$ $g'(x)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}f\left(e^{-x}\right)-e^{-\frac{x}{2}}f'\left(e^{-x}\right)$

$$g''(x)=\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}f\left(e^{-x}\right)\cancel{-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}f'\left(e^{-x}\right)}+\cancel{\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}f'\left(e^{-x}\right)}+e^{-\frac{3x}{2}}f''\left(e^{-x}\right)=\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}f\left(e^{-x}\right)+e^{-\frac{3x}{2}}f''\left(e^{-x}\right)$$
On en déduit que g est convexe.

$\boxed{20}$ 1°) Calculs

2°)

• g convexe $\Rightarrow \tau_{\frac{1}{a}}\uparrow\ \Rightarrow x\mapsto\tau_{\frac{1}{a}}\left(\dfrac{1}{x}\right)\downarrow\ \Rightarrow\theta_a\uparrow$

• h convexe $\Rightarrow \theta_a\uparrow\ \Rightarrow x\mapsto\tau_{\frac{1}{a}}\left(\dfrac{1}{x}\right)\downarrow\ \Rightarrow\tau_a\uparrow$

$\boxed{23}$ Démontrons que pour tout entier naturel $n\geqslant 2$ on a :

$$0\leqslant\frac{1}{2}f(0)+f(1)+\ldots+f(n-1)+\frac{1}{2}f(n)-\int_0^n f(x)\,dx\leqslant\frac{1}{8}\left[f'(n)-f'(0)\right]$$

Méthode générale

• Inégalité de gauche :

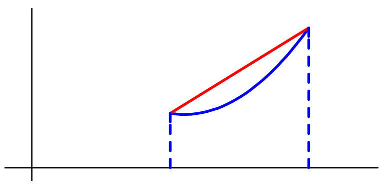
Considérer la corde sur l'intervalle [k ; k + 1].

• Inégalité de droite :

Considérer les tangentes aux points d'abscisses respectives k et k + 1.

Puis considérer $\displaystyle\int_k^{k+\frac{1}{2}}f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1}f(x)\,dx$ avec les tangentes.

• Inégalité de gauche :



On a : $\displaystyle\int_k^{k+1}f(x)\,dx\leqslant\frac{f(k)+f(k+1)}{2}$.

En écrivant toutes ces inégalités pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, on obtient :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(0)+f(1)}{2}$$

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(1)+f(2)}{2}$$

$$\vdots$$

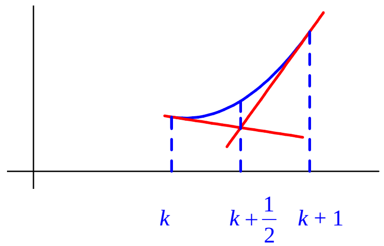
$$\int_{n-1}^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(n-1)+f(n)}{2}$$

En additionnant toutes ces inégalités membre à membre, on obtient :

$$\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}f(0)+f(1)+\ldots+f(n-1)+\frac{1}{2}f(n)$$

L'inégalité de gauche est donc démontrée.

• Inégalité de droite :



La tangente au point d'abscisse k a pour équation : $y = f'(k)(x-k) + f(k)$.

$$A\left|\begin{array}{l} k \\ f(k) \end{array}\right. \qquad B\left|\begin{array}{l} k+\frac{1}{2} \\ \frac{f'(k)}{2}+f(k) \end{array}\right.$$

L'aire du trapèze est égale à : $\dfrac{\frac{f'(k)}{2}+f(k)}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{f'(k)+4f(k)}{2}$

On a : $\displaystyle\int_k^{k+\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{f'(k)+4f(k)}{8}$.

La tangente au point d'abscisse $k+1$ a pour équation : $y = f'(k+1)(x-(k+1)) + f(k+1)$.

$$C\left|\begin{array}{l} k+\frac{1}{2} \\ f(k+1)-\frac{f'(k+1)}{2} \end{array}\right. \qquad D\left|\begin{array}{l} k+1 \\ f(k+1) \end{array}\right.$$

L'aire du trapèze est égale à : $\dfrac{2f(k+1)-\frac{f'(k+1)}{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{4f(k+1)-f'(k+1)}{8}$

On a : $\displaystyle\int_k^{k+\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{f'(k)+4f(k)}{8}$.

On a donc $\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{f(k)+f(k+1)}{2}+\frac{f'(k)-f'(k+1)}{8}$.

En écrivant toutes ces inégalités pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, on obtient :.

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{f(0)+f(1)}{2}+\frac{f'(0)-f'(1)}{8}$$

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{f(1)+f(2)}{2}+\frac{f'(1)-f'(2)}{8}$$

$$\vdots$$

$$\int_{n-1}^n f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{f(n-1)+f(n)}{2}+\frac{f'(n-1)-f'(n)}{8}$$

En additionnant toutes ces inégalités membre à membre, on obtient :

$$\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}f(0)+f(1)+\ldots+f(n-1)+\frac{f'(0)-f'(n)}{8}$$

Donc $\displaystyle\frac{1}{2}f(0)+f(1)+\ldots+f(n-1)+\frac{1}{2}f(n)-\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{8}\left[f'(n)-f'(0)\right]$.