$1^{\text{ère}}$ S3 — Devoir pour le lundi 15 mars 2010

Dans les exercices **I** à **VI**, le plan *P* est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I. On rappelle la définition suivante de la **distance d'un point à une droite** dans le plan.

> Soit *D* une droite du plan et A un point quelconque.
> On appelle **distance du point A à la droite *D*** la distance du point A à son projeté orthogonal sur *D*.
> Cette distance se note $d\left(\mathrm{A}\,;D\right)$.

Soit *D* la droite d'équation réduite $y = -2x + 9$.

1°) Déterminer l'équation réduite de la droite *D'* perpendiculaire à *D* passant par O.

2°) Calculer la distance de O à la droite *D*.

II. On considère l'ensemble $\mathcal{C}_m$ des points M de *P* dont les coordonnées $\left(x\,;y\right)$ vérifient l'équation $x^2 + y^2 - 2mx - 4my + 6m^2 - 4 = 0$ où *m* est un réel.

1°) Déterminer la nature de $\mathcal{C}_m$ suivant les valeurs de *m*.

2°) Lorsque $\mathcal{C}_m$ est un cercle, on note Ω_m son centre et $\left(x_m\,;y_m\right)$ les coordonnées de Ω_m.

Démontrer que Ω_m appartient à une droite fixe que l'on définira.

III. On considère les vecteurs $\vec{u}\left(\cos t\,;\sin t\right)$ et $\vec{v}\left(\cos t\,;-\sin t\right)$ où *t* est un réel.

Déterminer pour quelles valeurs de *t* les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

IV. À tout réel *m*, on associe les droites D_m et D_m' d'équations cartésiennes respectives $\left(m-1\right)x + my - 2 = 0$ et $mx + \left(1-m\right)y - m = 0$.

1°) Démontrer que les droites D_m passent par un point fixe A et que les droites D_m' passent par un point fixe B.

2°) Démontrer que les droites D_m et D_m' sont perpendiculaires.

3°) On note I le point d'intersection des droites D_m et D_m'.

Démontrer sans faire de calcul (<u>en particulier, sans calculer les coordonnées de I</u>) que I appartient à un cercle fixe Γ que l'on définira.

V. On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 2 ainsi que le cercle $\mathcal{C}'$ de centre A(4 ; 0) et de rayon 4.

1°) Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

2°) Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

On rédigera ainsi :

« Les coordonnées des points d'intersection éventuels de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont les solutions du système $(S)\begin{cases} \ldots \\ \ldots \end{cases}$ ».

On conclura ainsi : $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \left\{\mathrm{I}\,;\mathrm{J}\right\}$ avec $\mathrm{I}\left(\ldots\,;\ldots\right)$ et $\mathrm{J}\left(\ldots\,;\ldots\right)$.

Vérifier les résultats sur un graphique ; on pourra utiliser un logiciel de géométrie dynamique.

VI.

Démontrer que l'on a $\sin 61° - \sin 59° = \sin 1°$.

Corrigé du devoir pour le 15-3-2010

I. Faire une figure soignée.

1°) Il y a plusieurs méthodes possibles.

1ère méthode : vecteur normal – vecteur directeur

On sait que le vecteur $\vec{v}(1\,;-2)$ est un vecteur directeur de *D* donc c'est un vecteur normal à *D'*.

Par suite, *D'* admet une équation cartésienne de la forme $x-2y+c=0$ avec $c\in\mathbb{R}$.

$\text{O}\in D'$ donc $x_{\text{O}}-2y_{\text{O}}+c=0$ d'où $c=0$.
Donc une équation cartésienne de *D'* s'écrit $x-2y=0$.
D' a donc pour équation réduite $y=\frac{1}{2}x$.

2e méthode : produit des coefficients directeurs égal à – 1

L'équation réduite de D' est de la forme $y=mx+p$.

$\text{O}\in D'$ donc $p=0$.

Pour déterminer *m*, on utilise la règle du cours qui dit que dans un repère orthonormé, deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont orthogonales si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à – 1.

D'après son équation réduite, *D* a pour coefficient directeur – 2 donc, comme $D\perp D'$, on a $m\times(-2)=-1$ ce qui donné $2m=1$ d'où $m=\frac{1}{2}$.

On en conclut que D' a donc pour équation réduite $y=\frac{1}{2}x$.

2°) Soit H le projeté orthogonal du point O sur la droite *D*.
H est le point d'intersection de *D* et D'.

On a donc $\begin{cases} x_{\text{H}}-2y_{\text{H}}=0 \\ y_{\text{H}}=-2x_{\text{H}}+9 \end{cases}$.

On trouve $\begin{cases} x_{\text{H}}=\dfrac{18}{5} \\ y_{\text{H}}=\dfrac{9}{5} \end{cases}$.

Donc H a pour coordonnées $\left(\frac{18}{5}\,;\frac{9}{5}\right)$.

La distance du point O à la droite *D* est égale à la distance OH.

$$\text{OH}=\sqrt{(x_{\text{H}}-x_{\text{O}})^2+(y_{\text{H}}-y_{\text{O}})^2}=\sqrt{(x_{\text{H}})^2+(y_{\text{H}})^2}=\sqrt{\left(\frac{18}{5}\right)^2+\left(\frac{9}{5}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^2\underbrace{(2^2+1)}_{\text{Astuce de calcul}}}=\frac{9}{5}\sqrt{5}=\frac{9\sqrt{5}}{5}$$

On peut vérifier les résultats de cet exercice sur *Geogebra*.

II. $\mathcal{C}_m$: $x^2+y^2-2mx-4my+6m^2-4=0 \quad (m\in\mathbb{R})$

1°)

Soit M un point quelconque de P de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{M}\in\mathcal{C}_m &\Leftrightarrow x^2+y^2-2mx-4my+6m^2-4=0\\ &\Leftrightarrow (x-m)^2+(y-2m)^2-m^2-4m^2+6m^2-4=0\\ &\Leftrightarrow (x-m)^2+(y-2m)^2-m^2-4m^2+6m^2-4=0\\ &\Leftrightarrow (x-m)^2+(y-2m)^2=4-m^2 \end{aligned}$$

m	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Signe de $4-m^2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Discussion :

• Si $m\in\left]-\infty\,;-2\right[\cup\left]2\,;+\infty\right[$, alors $4-m^2<0$.
Dans ce cas, $\mathcal{C}_m$ est l'ensemble vide.
• Si $m\in\left]-2\,;2\right[$, alors $4-m^2>0$.
Dans ce cas, $\mathcal{C}_m$ est le cercle de centre $\Omega_m \left|\begin{array}{l} x_m=m\\ y_m=2m\end{array}\right.$ et de rayon $\sqrt{4-m^2}$.
• Si $m\in\{-2\,;2\}$, alors $4-m^2=0$.
Dans ce cas, $\mathcal{C}_m$ est un singleton.

2°) Si $m\in\left]-2\,;2\right[$, $\mathcal{C}_m$ est le cercle de centre $\Omega_m \left|\begin{array}{l} x_m=m\\ y_m=2m\end{array}\right.$ et de rayon $\sqrt{4-m^2}$.

On a : $y_m=2x_m$ donc Ω_m appartient à la droite D d'équation $y=2x$.

III.

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} &\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0\\ &\Leftrightarrow \cos^2 t-\sin^2 t=0\\ &\Leftrightarrow \cos 2t=0\\ &\Leftrightarrow 2t=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})\\ &\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \quad (k\in\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Rappel de cours : $\cos X=0 \Leftrightarrow X=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

IV.

1°) Soit A et B les points de coordonnées cartésiennes respectives $(-2\,;2)$ et $(1\,;0)$.

Démontrons que toutes les droites D_m passent par les points A et B.

$(m-1)x_{\text{A}}+my_{\text{A}}-2=(m-1)\times(-2)+m\times2-2=0$ donc $\text{A}\in D_m$.

$mx_{\text{B}}+(1-m)y_{\text{B}}-m=m\times1+(1-m)\times0-m=m-m=0$ donc $\text{B}\in D_m\,'$.

Conclusion : Les droites D_m passent toutes par le point $\text{A}(-2\,;2)$ et les droites $D_m\,'$ passent toutes par le point $\text{B}(1\,;0)$.

2°) Démontrons que les droites D_m et $D_m^{'}$ sont perpendiculaires.

On sait que le vecteur $\vec{u}(m-1\,;m)$ est un vecteur normal à D_m et que le vecteur $\vec{v}(m\,;1-m)$ est un vecteur normal à $D_m\,'$.

On a $\vec{u}\bullet\vec{v}=(m-1)\times m+m\times(1-m)=0$.

On peut donc affirmer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et par suite, que les droites D_m et $D_m\,'$ sont perpendiculaires.

3°) D'après le résultat établi à la question précédente, on sait que les droites D_m et $D_m\,'$ sont perpendiculaires.
De plus, $\text{A}\in D_m$, $\text{B}\in D_m\,'$ et $D_m\cap D_m\,'=\{\text{I}\}$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{IA}}$ et $\overrightarrow{\text{IB}}$ sont orthogonaux.

On en déduit que I appartient au cercle Γ de diamètre [AB].

V.

1°)

Une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ s'écrit : $x^2+y^2=4$.

Une équation cartésienne de $\mathcal{C}\,'$ s'écrit : $x^2+y^2-8x=0$.

2°) Déterminons par le calcul les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}\,'$.

Les coordonnées des points d'intersection éventuels de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}\,'$ sont les solutions du système :

$$(S)\begin{cases}x^2+y^2=4\\x^2+y^2-8x=0\end{cases}$$

On soustrait membre à membre les équations.
On obtient : $8x=4$ d'où $x=\dfrac{1}{2}$.

La première équation donne alors : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 4$ donc $y^2 = 4 - \frac{1}{4}$ soit $y^2 = \frac{15}{4}$.

On en déduit que $y = \frac{\sqrt{15}}{2}$ ou $y = -\frac{\sqrt{15}}{2}$.

On peut donc conclure ainsi : $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{\mathrm{I}\,;\mathrm{J}\}$ avec $\mathrm{I}\left(\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ et $\mathrm{J}\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$.

VI.

$$\begin{aligned}
\sin 61° - \sin 59° &= \sin(60° + 1°) - \sin(60° - 1°) \\
&\big\downarrow \text{ On développe en utilisant les formules d'addition} \\
&= \sin 60° \ \cos 1° + \cos 60° \ \sin 1° - (\sin 60° \ \cos 1° \ - \cos 60° \ \sin 1°) \\
&= 2\cos 60° \ \sin 1° \\
&= 2 \times \frac{1}{2} \times \sin 1° \\
&= 2 \times \frac{1}{2} \times \sin 1° \quad (\cos 60° = \frac{1}{2}) \\
&= \sin 1°
\end{aligned}$$

On trouve $\boxed{\sin 61° - \sin 59° = \sin 1°}$.