Prénom : ……………… Nom :………………………………… Note : …… /20

1$^{\text{ère}}$ S3

Interrogation écrite du vendredi 19 février 2010 (1 h 30)

Rédiger au stylo plume sans abréviations ni ratures.
Encadrer en rouge les tous les résultats à la règle.

I. (2 points) Soit ABC un triangle équilatéral de côté a $(a \in \mathbb{R}_+^*)$.

Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ en fonction de a. Ne pas faire de figure sur la copie.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

II. (5 points) Soit A et B deux points du plan. On note I le milieu de [AB].
1°) **Question de cours**
Recopier et compléter la propriété : « Pour tout point M du plan, $\text{MA}^2+\text{MB}^2=...$ ».
Refaire la démonstration de cette propriété.
2°) On suppose que AB = 3.
Déterminer en rédigeant soigneusement l'ensemble E des points M du plan P tels que l'on ait $\text{MA}^2+\text{MB}^2=7$.

Aide à la rédaction

• On rédigera la recherche de la manière suivante :

« M $\in$ E si et seulement si ……….
si et seulement si ……… »

• On conclura ainsi :

« L'ensemble E est ………………… ».

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

III. (2 points) Soit ABC un triangle tel que $AB = 3\sqrt{6}$, $AC = \sqrt{2}$ et $\widehat{BAC} = 30°$.
Calculer la valeur exacte de l'aire *S* du triangle ABC (faire les calculs sur une ligne).

………..………..…

IV. (1 point) Soit EFG un triangle tel que $EF = 4$, $FG = 8$ et $\widehat{EFG} = 40°$.
Donner l'arrondi au dixième de la longueur EG sans détailler les calculs.

EG ≈ ……………..

V. (2,5 points) Soit ABC un triangle du plan tel que $BC = 5$, $\widehat{ABC} = 50°$ et $\widehat{ACB} = 75°$.
1°) Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$ (directement, sans faire de phrase).
2°) Calculer AB et AC et donner l'arrondi au dixième.
3°) **Question bonus :** calculer le rayon *R* du cercle circonscrit au triangle ABC et donner l'arrondi au dixième.

………..………..……

………..………..……

………..………..……

………..………..……

………..………..……

………..………..……

………..………..……

………..………..……

………..………..……

………..………..……

………..………..……

VI. (4 points) Soit A et B deux points du plan *P*. On note I le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; 2).
Déterminer en rédigeant convenablement

- l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) = 0$;
- l'ensemble *F* des points M du plan *P* tels que $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \bullet \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) = 0$.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

VII. (3,5 points)

1°) Question de cours

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose que f est dérivable en un réel a fixé dans I.
Compléter dans l'encadré ci-dessous la formule d'approximation affine tangente en a.

Pour h « proche » de 0, on a : $f(a+h) \approx$ ....

2°) Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g(1)=2$, $g'(1)=3$ et $g'(1{,}2)=2$.

• Donner la valeur approchée de $g(1{,}2)$ fournie par la formule d'approximation affine tangente de g en 1.

• Donner la valeur approchée de $g(1{,}4)$ fournie par la formule d'approximation affine tangente de g en 1,2 (en réutilisant le résultat de la question précédente).

Compléter le tableau ci-dessous sans justifier.

$g(1{,}2) \approx$	$g(1{,}4) \approx$ ....

3°) Soit h (nom mal choisi) la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\frac{3}{2}\right]$ par $h(x)=\sqrt{3-2x}$.
Compléter la phrase :

La meilleure approximation affine de h en 1 est la fonction φ définie par $\varphi(x)=$ ....

4°) **Bonus :** On sait que 1,473 est une valeur approchée d'un réel x à 2×10^{-3}.
Donner le meilleur encadrement possible de x.

Corrigé et barème de l'interrogation écrite du 19 février 2010

I. (2 points : 1 point par produit scalaire)

Calcul de $p_1 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

1[ère] méthode : on utilise la définition du produit scalaire de deux vecteurs.

$p_1 = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ (on évite d'écrire $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}}\right)$ qui est un peu lourd, même si c'est ce que l'on fait en physique)

Eviter d'écrire $\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ qui fait appel au cosinus d'un angle orienté car le plan n'est pas supposé orienté dans cet exercice.

ABC est un triangle équilatéral donc tous ses angles mesurent 60°.
Par suite $\widehat{BAC} = 60°$.
De plus, $AB = AC = a$
D'où : $p_1 = a \times a \times \dfrac{1}{2}$

$p_1 = \dfrac{a^2}{2}$

2[e] méthode : on utilise les projetés orthogonaux

ABCD est un carré donc (BA)⊥(BC).
B est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

$p_1 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$
$p_1 = \overrightarrow{AB}^2$ (carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$)
$p_1 = AB^2$
$p_1 = a^2$

ABC est un triangle équilatéral donc tous ses angles mesurent 60°.

Calcul de $p_2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

$p_2 = \left(-\overrightarrow{BA}\right) \cdot \overrightarrow{BC}$
$p_2 = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$
$p_2 = -\dfrac{a^2}{2}$

II.

(5 points :
1°) 0,5 pour la formule
2 points pour la démonstration
2°) 2,5 points : 2 points pour la recherche de l'ensemble *E* avec une bonne rédaction
et 0,5 point pour une conclusion très claire.

1°) Question de cours : voir démonstration du cours.

2°)

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in E & \text{ si et seulement si } \mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 = 7 \\ & \text{ si et seulement si } 2\mathrm{MI}^2 + \frac{9}{2} = 7 \\ & \text{ si et seulement si } \mathrm{MI}^2 = \frac{5}{4} \\ & \text{ si et seulement si } \mathrm{MI} = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Conclusion :

L'ensemble E est le cercle de centre I et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

III. (2 points)

Attention à ne pas utiliser des lettres non définies dans l'énoncé telles que (a, b, c pour désigner les longueurs des côtés : pas de formules plaquées, mieux vaut écrire ces formules en situation).

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \sin \widehat{\mathrm{BAC}} \\ &= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{6} \times \sqrt{2} \times \sin 30° \\ &= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{\cancel{2}} \times 3\sqrt{3} \times \cancel{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{(u.a.)} \end{aligned}$$

IV.

D'après la formule du côté dans le triangle EFG,

$$\mathrm{EG}^2 = \mathrm{FE}^2 + \mathrm{FG}^2 - 2\mathrm{FE} \times \mathrm{FG} \times \cos \widehat{\mathrm{EFG}}$$
$$\mathrm{EG}^2 = 16 + 64 - 2 \times 32 \times \cos 40°$$
$$\mathrm{EG}^2 = 80 - 64\cos 40°$$
$$\mathrm{EG} = \sqrt{80 - 64\cos 40°} \quad \text{(valeur exacte)}$$
$$\mathrm{EG} = 5{,}56535314...$$

EG ≈ 5,6 (valeur arrondie au dixième)

Attention, cet exercice était noté à la réponse.
Un résultat tel que 5,5 était compté faux.
En effet, rien ne permettait de savoir s'il s'agissait d'une faute d'arrondi ou d'une faute de calcul (même si la probabilité est bien plus grande que l'on soit dans le premier cas).

V. (2,5 points : 0,5 point pour le 1°) et 2 points pour le 2°))

1°) $\widehat{\text{BAC}} = 180° - \left(\widehat{\text{BAC}} + \widehat{\text{ACB}}\right)$

$= 180° - 125°$

$= 55°$

2°) **Calculons AB.**

D'après la formule des sinus, on a : $\dfrac{\text{AB}}{\sin\widehat{\text{ACB}}} = \dfrac{\text{BC}}{\sin\widehat{\text{BAC}}}$.

Donc $\text{AB} = \dfrac{\text{BC} \times \sin\widehat{\text{ACB}}}{\sin\widehat{\text{BAC}}} = \dfrac{5 \times \sin 75°}{\sin 55°} \approx 5{,}9$ (valeur arrondie au dixième).

Calculons AC.

D'après la formule des sinus, on a : $\dfrac{\text{AC}}{\sin\widehat{\text{ABC}}} = \dfrac{\text{BC}}{\sin\widehat{\text{BAC}}}$.

Donc $\text{AC} = \dfrac{\text{BC} \times \sin\widehat{\text{ABC}}}{\sin\widehat{\text{BAC}}} = \dfrac{5 \times \sin 50°}{\sin 55°} \approx 4{,}7$ (valeur arrondie au dixième).

3°) **Question bonus (cette question n'aurait pas dû figurer en bonus car tous les élèves l'ont réussi) :**

D'après la loi des sinus, on a : $\dfrac{\text{BC}}{\sin\widehat{\text{BAC}}} = 2R$ d'où : $R = \dfrac{\text{BC}}{2\sin\widehat{\text{BAC}}} = \dfrac{5}{2\sin 55°} = 3{,}05193647...$
donc $R \approx 3{,}1$ (valeur arrondie au dixième)

VI. (4 points : 2 points par ensemble de points avec la décomposition suivante : 1,5 poins par recherche d'ensemble et 0,5 point pour chaque conclusion)

Déterminons l'ensemble *E*.

1ère partie : réduction de la somme vectorielle

On sait que I est le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; 2).
Donc d'après la relation fondamentale,
$\forall \text{M} \in P \quad \overrightarrow{\text{MA}} + 2\overrightarrow{\text{MB}} = 3\overrightarrow{\text{MI}}$

2e partie : chaîne d'équivalences

$\text{M} \in E$ si et seulement si $\overrightarrow{\text{AB}} \bullet \left(3\overrightarrow{\text{MI}}\right) = 0$

si et seulement si $\overrightarrow{\text{AB}} \bullet \overrightarrow{\text{MI}} = 0$

3e partie : conclusion ; identification de l'ensemble

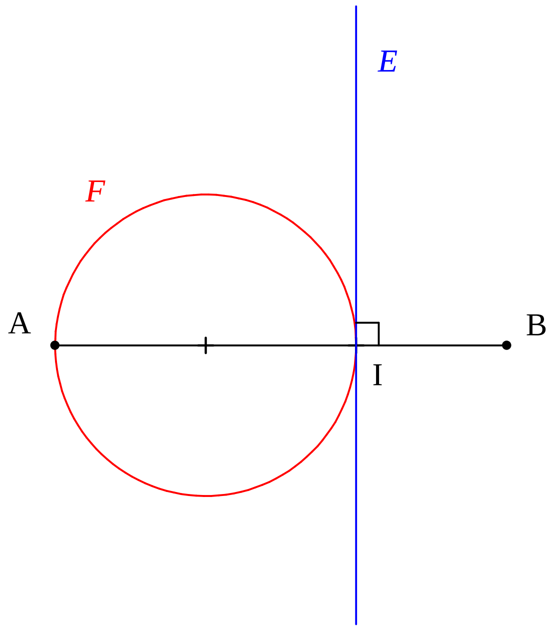
E est la droite perpendiculaire à (AB) passant par I.

Déterminons l'ensemble *F*.

$\mathrm{M} \in F$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \left(3\overrightarrow{\mathrm{MI}}\right) = 0$

si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MI}} = 0$

F est le cercle de diamètre [AI].



VII. (3,5 points : 0,5 point pour le 1°), 2 points pour le 2°), 1 point pour le 3°), 0,5 point pour le bonus)

1°) Question de cours

$\boxed{\text{Pour } h \text{ « proche » de 0, on a : } f(a+h) \approx f(a) + hf'(a).}$

2°)

$g(1{,}2) \approx 2{,}6$	$g(1{,}4) \approx 3$

Détail pour $g(1{,}4)$

$g(1{,}4) \approx g(1{,}2) + 0{,}2 \times g'(1{,}2)$

Or : $g(1{,}2) + 0{,}2 \times g'(1{,}2) \approx 2{,}6 + 0{,}2 \times 2$

Donc : $g(1{,}4) \approx 3$

3°) h est dérivable sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right[$.

$\forall x \in \left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right[\quad h'(x)=\frac{-2}{2\sqrt{3-2x}}=-\frac{1}{\sqrt{3-2x}}$ (formule $\left(\sqrt{ax+b}\right)'=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$).

$h(1)=1$

$h'(1)=-\frac{1}{1}=-1$

La meilleure approximation affine de h en 1 est la fonction φ définie par $\varphi(x)=(x-1)h'(1)+h(1)$ soit $\varphi(x)=(x-1)(-1)+1$ ou encore $\varphi(x)=2-x$.

4°) **Bonus :** On sait que 1,473 est une valeur approchée d'un réel x à 2×10^{-3}.

On a : $1{,}471 \le x \le 1{,}473$.