Exercices sur les développements limités

1 Déterminer le développement limité de la fonction $f : x \mapsto e^{\tan x}$ à l'ordre 4 en 0.

2 Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions $x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ et $x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x+1}$.

3 Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $f : x \mapsto \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

4 Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$.

5 Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{1-x}}$.

6 Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

7 Soit a et b deux réels strictement positifs.

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = n\left[\left(1+\dfrac{1}{n+a}\right)^n - \left(1+\dfrac{1}{n+b}\right)^n\right]$.

8 Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x+1}$.

9 Calculer les quatre premières dérivées successives de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{1+x}$ en 1.

10 Déterminer le développement limité à l'ordre 7 en 0 de la fonction $f : x \mapsto \sin x \times \operatorname{Arcsin} x$.

11 Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{1+x}\right)$.

12 On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Démontrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique Δ que l'on déterminera.

13 On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Démontrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique Δ que l'on déterminera.
Préciser la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

14 On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt[3]{x^3+x+1} - \sqrt{x^2-x-1}$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Étudier la branche infinie de $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

15 On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Étudier la parité de f.
2°) Étudier le comportement de f au voisinage de 0.
3°) Démontrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique Δ que l'on déterminera.

16 1°) Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $x \mapsto \operatorname{th} x$.
2°) Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}$.

On pourra observer que, pour tout réel $u \neq 1$, on a : $\dfrac{1+u}{1-u} = \dfrac{2}{1-u} - 1$.

17 On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2°) Démontrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique Δ que l'on déterminera.
3°) Démontrer que, pour tout réel u strictement positif, on a $\ln(1+u) > u - \dfrac{u^2}{2}$ et que pour tout réel $u \in \left]-1\,;0\right[$, on a $\ln(1+u) < u - \dfrac{u^2}{2}$; en déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

18 On considère la fonction $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Déterminer les asymptotes à $\mathscr{C}$.

19 On considère la fonction $f : x \mapsto x\, e^{-\frac{1}{x}}$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Démontrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique Δ que l'on déterminera.
Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

20 Déterminer les limites de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$ aux bornes de son ensemble de définition.

21 Déterminer les limites de la fonction f définie par $f(x) = x^{\ln x} - (\ln x)^x$ aux bornes de son ensemble de définition.

22 Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $f : x \mapsto \left(e^x - 1\right)^2$ de deux manières différentes :

- directement
- en développant $f(x)$.

23 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{1+x^2}$.

Calculer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f'''(0)$.

24 Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{1+x}$.

25 On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$.

Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

26 Déterminer le développement limité à l'ordre 6 en 0 de la fonction $x \mapsto \text{th}\, x$.

On pourra utiliser que, pour tout réel x, on a : $\text{th}\, x = 1 - \dfrac{2}{1+e^{2x}}$.

27 Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [0\,;a]$ $(a > 0)$ de classe C^2 telle que $f'(0) = 0$.

Démontrer que la fonction g définie par $g(x) = f\left(\sqrt{x}\right)$ est de classe C^1.

28 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^x$ si $x > 0$ et $f(0) = 1$.

1°) Étudier la continuité et la dérivabilité de f.

2°) Tracer la représentation graphique de f.

29 Soit α un réel strictement positif.

Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^\alpha$.

Déterminer un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Indication : démontrer que $\displaystyle\int_0^n x^\alpha \, dx \leqslant S_n \leqslant \int_0^n x^\alpha \, dx + n^\alpha$ pour $n \geqslant 1$.

30 Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Déterminer un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Indication : démontrer que $\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x} + \frac{1}{n} \leqslant S_n \leqslant \int_1^n \frac{dx}{x} + 1$.

31 Soit θ un réel fixé.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \text{ch}\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$.

Simplifier P_n en utilisant l'égalité $\text{ch}\, x = \dfrac{\text{sh}\, 2x}{2\,\text{sh}\, x}$ valable pour tout réel x non nul.

En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P_n$.

32 Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n^2}}$.

Déterminer un développement asymptotique à trois termes de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

33 Soit a un réel fixé non nul. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n$.

1°) Déterminer la limite de (u_n).

2°) Déterminer un développement asymptotique à trois termes de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

34 Soit θ un réel non nul fixé.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\theta}{n^2}\right)$ et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\theta}{n^2}\right)$.

Déterminer la limite des suites (S_n) et (S'_n).

35 1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

a) Étudier la parité de la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - \dfrac{1}{2}$.

b) Déterminer le développement de f à l'ordre 4 en 0 de f.

2°) En déduire le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $g : x \mapsto \ln\left(1+e^x\right)$.

36 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$ si $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$.

1°) Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f.

2°) Démontrer que f est bijective et déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f^{-1}.

37 Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n! \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\theta}{k}\right)}$ (θ réel fixé dans $[0\,;\pi]$) en utilisant le théorème de Césaro.

38 1°) Démontrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$; en déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

2°) Soit f une fonction sur l'intervalle [0 ; 1] telle que $f(0) = 0$ et dérivable en 0.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right)$ (utiliser le développement limité de f en 0 à l'ordre 1).

Application : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\left(\dfrac{1}{n+k}\right)$.

39 Vrai ou faux

Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques réelles.

1°) Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n{}^n \sim v_n{}^n$.

2°) Si pour tout entier naturel n on a $0 \leq u_n < 1$, alors $u_n{}^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

40 Soit a un réel strictement positif.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction polynôme P_n définie par $P_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}x^k-a$.

1°) Démontrer que le polynôme P_n admet une unique racine positive que l'on notera x_n.

Démontrer que $x_n \leqslant a$.

2°) Calculer x_1 et x_2 en fonction de a.

3°) Étudier le signe de $P_{n+1}(x_n)$. En déduire le sens de variation de la suite (x_n).

4°) Démontrer que la suite (x_n) converge.

On note l sa limite.

Démontrer que $0 \leqslant l < 1$.

5°) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, x_n est solution de l'équation $x^{n+1}-(a+1)x+a=0$.

Chercher $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)^{n+1}$; en déduire l.

41 1°) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, il existe un unique réel $x_n \in [0\,;n]$ solution de l' équation $\mathrm{e}^x = x^n$.

2°) Démontrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ converge et calculer sa limite.

42 1°) Déterminer de deux manières différentes le développement limité à l'ordre $n+2$ en 0 de la fonction $x \mapsto (1-\mathrm{e}^x)^n$ où n est un entier naturel fixé.

2°) En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\,\mathrm{C}_n^k\,k^p$ pour $p\in\{0, 1, 2, ..., n+2\}$.

43 Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\left(k^2\right)}$.

Déterminer un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Indication : on pourra démontrer que $\mathrm{e}^{\left(n^2\right)} \leqslant u_n \leqslant n\mathrm{e}^{(n-1)^2}+\mathrm{e}^{\left(n^2\right)}$.

44 On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(x^2+x+1\right)$.

Déterminer le développement limité de f à l'ordre 10 en 0.

On pourra remarquer que $f(x)=\ln\left(1-x^3\right)-\ln(1-x)$ pour $x\in\left]-1\,;1\right[$.

45 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

Déterminer le développement limité de f à l'ordre 10 en 0.

On pourra remarquer que $f(x)=\dfrac{1-x}{1-x^3}$ pour $x \neq 1$.

46 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.

Déterminer le développement limité de f à l'ordre 5 en 0.

47 On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(3\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^{-x}\right)$.

Déterminer le développement limité de f à l'ordre 5 en 0.

48 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x}}$.

Déterminer le développement limité de f à l'ordre 5 en 0.

49 On considère la fonction $f : x \mapsto \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Démontrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $+\infty$.

50 Soit θ un réel fixé. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $P_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\left(\dfrac{\theta}{2^k}\right)$.

Simplifier P_n (on pourra utiliser l'égalité $\cos x=\dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$ valable pour tout réel x qui n'est pas un multiple entier de π). En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$.

51 1°) Soit θ un réel fixé. Pour tout entier naturel n non nul, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{\theta}{2^k}$.

(on pourra simplifier d'abord le produit en utilisant l'égalité $\cos x=\dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$ valable pour tout réel x qui n'est pas un multiple entier de π).

2°) Pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, on pose $a_k=\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}$ (le dénominateur comprend k radicaux superposés).

Démontrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, $a_k = \dfrac{1}{\cos \frac{\pi}{2^{k+1}}}$. En déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$ (formule de Viète).

François Viète est un mathématicien français du XVI^e siècle (1540-1603). Il est l'inventeur du calcul littéral (c'est-à-dire avec des lettres).
Il découvrit la formule qui porte son nom en 1579 à partir considérations géométriques en utilisant les polygones réguliers à 2^n côtés inscrits dans un cercle de rayon 1. Cette formule a la particularité de ne faire intervenir que le chiffre 2.

52 1°) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 6 de la fonction $x \mapsto \tan x$.

2°) En déduire le développement limité en 0 à l'ordre 6 de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+\tan x}$.

53 1°) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 5 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

2°) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ directement.

Retrouver ce résultat en utilisant le 1°).

54 1°) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 6 de la fonction $x \mapsto \tan x$.

2°) En déduire le développement limité en 0 à l'ordre 7 de la fonction $x \mapsto \ln(\cos x)$ directement.
Retrouver ce résultat en utilisant le 1°).

55 Déterminer le développement limité en 1 à l'ordre 3 de la fonction $f : x \mapsto \ln(\cos x)$.

56 1°) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction $f : x \mapsto \tan x$.

2°) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $g : x \mapsto \ln(\cos x)$.

57 1°) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction $f : x \mapsto \text{th}\, x$.

2°) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $g : x \mapsto \ln(\text{ch}\, x)$.

58 Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 100 de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^{99}}{99!}\right)$.

Réponses

1 $f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{3}{8}x^4+\mathrm{o}\left(x^4\right)$

2 Même développement limité à l'ordre 3 en 0 : $f(x)=x-x^2+\dfrac{2x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^3\right)$

3 $f(x)=1-\dfrac{x}{6}+\dfrac{x^2}{72}+\mathrm{o}\left(x^2\right)$

4 $f(x)=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2-\dfrac{5\sqrt{2}}{128}x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)$

5 $f(x)=x^2(1-x)^{-\frac{1}{3}}=x^2+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{9}x^4+\dfrac{14}{81}x^5+\mathrm{o}\left(x^5\right)$

6 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x=\mathrm{e}^2$

7 $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\mathrm{e}(b-a)$

8 $f(x)=x-x^2+\dfrac{2x^3}{3}-\dfrac{2x^4}{3}+\dfrac{13x^5}{15}+\mathrm{o}\left(x^5\right)$

9 $f(1+h)=\dfrac{h}{2}-\dfrac{h^2}{2}+\dfrac{5h^3}{12}-\dfrac{h^4}{3}+\mathrm{o}\left(h^4\right)$ donc $f(1)=0$, $f'(1)=\dfrac{1}{2}$, $f''(1)=-1$, $f^{(3)}(1)=\dfrac{5}{2}$; $f^{(4)}(1)=-8$.

10 $\operatorname{Arcsin}x=x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{3x^5}{40}+\mathrm{o}\left(x^6\right)$; $f(x)=x^2+\dfrac{x^6}{18}+\mathrm{o}\left(x^7\right)$.

11 $f(x)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{4}-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{7x^3}{96}-\dfrac{3x^4}{128}+\mathrm{o}\left(x^4\right)$

12 $y=x-1$

13 $f(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{48x^2}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$; $\Delta : y=x-1$

14 $\sqrt{1+u}=1+\dfrac{u}{2}-\dfrac{u^2}{8}+\mathrm{o}\left(u^2\right)$; $\sqrt[3]{1+u}=1+\dfrac{u}{3}-\dfrac{u^2}{9}+\mathrm{o}\left(u^2\right)$; $\sqrt[3]{1+y^2+y^3}=1+\dfrac{y^2}{3}+\mathrm{o}\left(y^2\right)$;
$\sqrt{1-y+y^2}=1+\dfrac{1}{2}\left(-y+y^2\right)-\dfrac{y^2}{8}+\mathrm{o}\left(y^2\right)=1-\dfrac{y}{2}+\dfrac{3y^2}{8}+\mathrm{o}\left(y^2\right)$; $f(x)=\dfrac{1}{2}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation $y=\dfrac{1}{2}$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

15 $y=2x$

16 **19** $y=x-1$; $\mathrm{e}^X\geqslant 1+X$; $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ pour $x\in\mathbb{R}_+^*$; $\mathscr{C}$ est au-dessous de Δ pour $x\in\mathbb{R}_-^*$.

22 $f : x\mapsto\left(\mathrm{e}^x-1\right)^2$

Déterminons le $\mathrm{DL}_4(0)$ de f.

● directement

$$\mathrm{e}^x-1=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)$$

$$\left(\mathrm{e}^x-1\right)^2=x^2\times\left[1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right]^2$$

EXPLICITER LE CARRÉ $\quad \left(1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{6}+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right)\left(1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{6}+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right)$

$$1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}$$
$$\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}$$
$$\frac{x^2}{6}$$

$$f(x)=x^2\left(1+x+\frac{7x^2}{12}+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right)$$

$$f(x)=x^2\left(1+x+\frac{7x^2}{12}+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right)$$

● en développant $f(x)$

23 $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=3$, $f^{(3)}(0)=0$.

35 1°) $2g(x)=\dfrac{x}{2}\left[1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{6}+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right]\left[1+\dfrac{x}{2}+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right]$

$$2g(x)=\frac{x}{2}\left[1-\frac{x^2}{12}+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right]$$

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x^3}{48}+\mathrm{o}\left(x^3\right)$$

2°) $g'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=f(x)$

43 $u_n\sim\mathrm{e}^{\left(n^2\right)}$

$\boxed{45}$ $\dfrac{1}{1-x^3}=1+x^3+x^6+x^9+o\left(x^{10}\right)$

$\dfrac{1-x}{1-x^3}=1-x+x^3-x^4+x^6-x^7+x^9-x^{10}+o\left(x^{10}\right)$

$\boxed{47}$ $f(x)=5x-12x^2+40x^3-148x^4+584x^5+o\left(x^5\right)$

$\boxed{48}$ $f\left(x\right)=x^2+\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{3x^4}{8}+\dfrac{5x^5}{16}+o\left(x^5\right)$

Questions de cours

1 Intégration, dérivation d'un développement limité.

2 Développement limité de l'exponentielle en 0 et ceux qui s'en déduisent.

3 Développement limité des fonctions réciproques des fonctions circulaires.

4 Unicité du développement limité et conséquences (fonctions paires et impaires).

5 Développement limité de la fonction inverse et ceux qui s'en déduisent.

6 Développement limité en 0 des fonctions (de trigonométrie) circulaire.

7 Développement limité en 0 des fonctions de trigonométrie hyperbolique.

8 Partie principale d'un développement limité.
Lien entre équivalents et développements limités
Équivalents de e^x-1, e^x-1-x, sin x, sin $x-x$ en 0.

9 Équivalents d'une fonction polynôme non nulle en $+\infty$ et en $-\infty$.
Même question pour une fonction rationnelle non nulle.

10 Étude des points stationnaire d'une courbe paramétrée.

11 Donner la formule de Taylor-Young.

12 Équivalent en $+\infty$ et en $-\infty$ de ch x, sh x et de E(x).

13 Définition de deux fonctions équivalentes. Règles permises pour le produit et le quotient, règles interdites pour la somme et la différence. Passage à l'exponentielle.

14 On pose $P\left(x\right)=a_nx^n+...+a_mx^m$ où $a_n\neq 0$, $a_m\neq 0$ et $n\leqslant m$.

Compléter $P\left(x\right)\underset{\pm\infty}{\sim}$............. ; $P\left(x\right)\underset{0}{\sim}$.............