Exercices sur les calculs de primitives

$\boxed{1}$ Calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^1 \ln\left(1+t^2\right)\,\mathrm{d}t$.

$\boxed{2}$ Soit f la fonction définie sur l'intervalle I = [0 ; π] par $f(0) = 0$ et $f(x) = \dfrac{1-\cos\frac{x}{3}}{\sin\frac{x}{2}}$ pour $x \neq 0$.

1°) Étudier la continuité de f.

2°) Calculer $\int_{\mathrm{I}} f$.

$\boxed{3}$ 1°) Donner les solutions de l'équation différentielle $xy'+2y = \dfrac{x}{x^2+1}$ (E) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0.

2°) Démontrer qu'il existe une unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$. On note f cette solution.

Calculer $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$\boxed{4}$ Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\mathrm{d}x}{1+2\cos^2 x}$ en utilisant le changement de variable $u = \tan x$.

$\boxed{5}$ Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$ en utilisant le changement de variable $u = \tan x$.

$\boxed{6}$ Déterminer une primitive des fonctions $x \mapsto \cos(\ln x)$ et $x \mapsto \sin(\ln x)$ sur leur ensemble de définition.

$\boxed{7}$ Déterminer une primitive des fonctions $x \mapsto \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{\sin(\ln x)}{x}$ sur leur ensemble de définition.

$\boxed{8}$ Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x^2)$ sur son ensemble de définition.

$\boxed{9}$ Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{Arctan}(\sqrt{x})$sur son ensemble de définition.

$\boxed{10}$ Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{Arcsin}(\sqrt{x})$ sur son ensemble de définition.

$\boxed{11}$ Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ sur son ensemble de définition.

$\boxed{12}$ On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $f(x) = \dfrac{4}{x^2+4}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Calculer le volume V du solide engendré par la rotation de la courbe $\mathcal{C}$ autour de l'axe des abscisses.

$\boxed{13}$ Déterminer les primitives de la fonction $f : x \mapsto x^2\sqrt{x+1}$.

$\boxed{14}$ Déterminer les primitives de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3\sin x - \cos x}{\sin x - \cos x}$ sur les intervalles où elle est définie.

Indication :

Écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} + k$ où k est un réel que l'on déterminera.

$\boxed{15}$ **Volume d'un tore sans collier**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O, on considère un disque de centre I(d, 0) (d est un réel strictement positif) et de rayon r tel que $0 < r < d$.
En faisant tourner ce disque autour de l'axe (Oy), on obtient un solide de révolution appelé tore.
On se propose de calculer son volume.

1°) Préciser la nature de la section du tore par un plan orthogonal à (Oy) et démontrer que l'aire de cette section est $S(y) = 4\pi d\sqrt{r^2-y^2}$.

2°) En déduire le volume du tore.

$\boxed{16}$ Calculer $\int_0^{\sqrt{3}} \dfrac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^2\right)^2}$.

$\boxed{17}$ Déterminer les primitives de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+\sqrt[3]{x}}$.

$\boxed{18}$ Déterminer les primitives de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+4}}{x+8}$.

$\boxed{19}$ Déterminer les primitives de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\mathrm{e}^x-1}$.

$\boxed{20}$ Déterminer les primitives de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$.

$\boxed{21}$ Déterminer les primitives de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$.

$\boxed{22}$ Vérifier que la fonction $x \mapsto \ln \tan \dfrac{x}{2}$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$ sur l'intervalle]0 ; π[.

Calculer $\int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$ en utilisant le changement de variable $x = \tan t$.

$\boxed{23}$ Calculer $\mathrm{I} = \int_0^1 \dfrac{\sqrt{t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

$\boxed{24}$ Calculer $\mathrm{I} = \int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{1}{t+t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t$.

25 Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin x + \sin 2x}$ en utilisant le changement de variable $u = \cos x$.

26 Déterminer les primitives de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^3}$.

27 Déterminer les primitives de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^3}{x^2 + 6x + 9}$.

28 Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3 + 1}$. En déduire une primitive de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{\left(x^3 + 1\right)^2}$.

29 Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan x}\,\mathrm{d}x$.

Réponses

1 $\mathrm{I} = \ln 2 - 1 + \dfrac{\pi}{4}$

2 $\mathrm{I} = \mathrm{J} = \dfrac{1}{4}\ln 2 + \dfrac{\pi}{8}$

4 $\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$

4 $\mathrm{I} = \dfrac{\pi}{18}$ Elève classe lycée Hoche (28 février 2011)

11 $F(x) = 2\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - 2\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$. Faire la vérification.

11 $2\ln 2 - 1$

35 $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f = 6$

41 $\dfrac{\ln 2}{4}$

12 $\mathrm{V} = 16\pi \displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2 + 4\right)^2} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2}$

13 Utiliser le changement de variable $u = x + 1$.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2(x+1)^{\frac{7}{2}}}{2} - \frac{4(x+1)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

16 $\dfrac{\sqrt{3}}{8} + \dfrac{\pi}{6}$

17 $F(x) = \dfrac{3}{2}\ln\left(1 + x^{\frac{2}{3}}\right)$

18 $F(x) = -4\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{x+4}}{2}\right) + 2\sqrt{x+4}$

19 On utilise le changement de variable $y = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$.

$F(x) = 2\sqrt{\mathrm{e}^x - 1} - 2\mathrm{Arc}\tan\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$

20 $F(x) = \dfrac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \dfrac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\mathrm{Arctan}\sqrt[6]{x}$

$\boxed{21}$ Quantité conjuguée pour enlever les dénominateurs

$$F(x)=-\frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$$

$\boxed{22}$ $\mathrm{I}=\ln\tan\frac{\pi}{6}-\ln\tan\frac{\pi}{8}=\ln\frac{1}{\sqrt{3}}-\ln(\sqrt{2}-1)=-\frac{1}{2}\ln 3-\ln(\sqrt{2}-1)=\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{1}{2}\ln 3$

$\boxed{23}$ $\mathrm{I}=2-\frac{\pi}{2}$

$\boxed{24}$ $\mathrm{I}=\frac{\pi}{4}$

$\boxed{25}$ $f(x)=\dfrac{1}{\sin x+2\sin x\cos x}=\dfrac{\sin x}{\sin^2 x(1+2\cos x)}=\dfrac{\sin x}{(1-\cos^2 x)(1+2\cos x)}$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\sin 2x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x+2\sin x\cos x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x(1+2\cos x)}=\int\frac{\sin x\ \mathrm{d}x}{\sin^2 x(1+2\cos x)}$$

$u=\cos x$
$\mathrm{d}u=-\sin x\ \mathrm{d}x$

$\boxed{26}$ $\displaystyle\int\frac{1}{(\mathrm{e}^x-1)^3}\ \mathrm{d}x$

On utilise le changement de variable $u=\mathrm{e}^x-1$.

$\mathrm{d}u=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=(u+1)\mathrm{d}x$

$$\int\frac{1}{u^3}\times\frac{\mathrm{d}u}{u+1}$$

$$\frac{1}{u^3(u+1)}=\frac{\alpha_1}{u}+\frac{\alpha_2}{u^2}+\frac{\alpha_3}{u^3}+\frac{\beta}{u+1}$$

Assez vite on trouve : $\beta=-1$ et $\alpha_3=1$

On effectue une division suivant les puissances croissantes.
$1=(u+1)(u^2-u+1)-u^3$

$$\frac{1}{(u+1)u^3}=\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u+1}$$

$$\begin{array}{l|l} 1 & u+1 \\ \hline & 1-u+u^2 \end{array}$$

$\boxed{27}$ $f(x)=\dfrac{2x^3}{(x+3)^2}$

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+3}+\frac{d}{(x+3)^2}$$

$$f(x)=2x-12+\frac{30}{x+3}+\frac{18}{(x+3)^2}$$

$$F(x)=x^2-12x-\frac{18}{x+3}+30\ln|x+3|$$

$\boxed{28}$ Pour g, faire une IPP pour pouvoir en déduire $\displaystyle\int^x\frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}=[\ ]-\int^x\frac{3t^3\mathrm{d}t}{(t^3+1)^2}$.

On écrit $t^3=t^3+1-t^3$.

$\boxed{29}$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan x}\ \mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t^2)}=\frac{\ln 2}{4}+\frac{\pi}{8}$

$$\frac{1}{(1+t)(1+t^2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1-t}{1+t^2}\right)$$

Questions de cours

1 Donner les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$ où a est un réel non nul fixé.

2 Astuces de calcul pour les primitives de fonctions de la forme $x \mapsto \cos^p x \times \sin^q x$ où p et q sont deux entiers naturels.