TS3

Devoir pour le lundi 1er février 2010

I. On considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$ et $V_n = U_n + \frac{1}{n!}$.

1°) Calculer U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3.

2°) En programmant le calcul des termes sur calculatrice, on obtient le tableau de valeurs ci-dessous. Certaines valeurs sont des valeurs approchées.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
U_n	2,5	2,666	2,708333	2,71666	2,71805	2,718254	2,718278	2,71828	2,718281801	2,7182818262
V_n	3	2,8333	2,75	2,725	2,7194444	2,718452	2,718303	2,7182843	2,718282076	2,7182818512

Conjecturer le sens de variation des suites (U_n) et (V_n).

3°) Démontrer les conjectures précédentes et déterminer $\lim_{n \to +\infty} (V_n - U_n)$.

4°) En déduire que (U_n) et (V_n) convergent et ont la même limite.

N.B. : on démontrera plus tard que leur limite commune est égale au nombre de Néper e.
Grâce aux suites (U_n) et (V_n), on peut démontrer que e est un nombre irrationnel.

II. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 2}$.

1°) Etude sur tableur

Ouvrir une feuille de calcul.

• Dans la colonne A, on va mettre les valeurs de *n*.

- Se placer dans la cellule A1 ; taper « *n* ».
- Se placer dans la cellule A2, taper « 0 ».
- Se placer dans la cellule A3, taper la formule =A2+1 et recopier cette formule vers le bas jusqu'à la cellule A51.

• Dans la colonne B, on va mettre les termes de la suite (u_n).

- Se placer dans le cellule B1 ; taper « u_n ».
- Se placer dans la cellule B2, taper « 5 ».
- Se placer dans la cellule B3, taper la formule =(3*B2)/(B2+2) et recopier cette formule vers le bas jusqu'à la cellule B51.

Conjecturer la convergence de la suite (u_n).

2°) Utilisation d'une suite auxiliaire pour démontrer la convergence

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de *n*.

c) Déterminer la limite de (u_n).

III. On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1}$.

1°) Définition de la suite (u_n)

Le but de cette question est de démontrer que la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ et que tous les termes sont strictement supérieurs à 1.

Pour *n* entier naturel, on considère la phrase mathématique $P(n)$: « u_n existe et $u_n > 1$ ».

Démontrer par récurrence que la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

Conclure.

2°) Etude sur tableur

Ouvrir une feuille de calcul.

• Dans la colonne A, on va mettre les valeurs de *n*.

- Se placer dans le cellule A1 ; taper « *n* ».
- Se placer dans la cellule A2, taper « 0 ».
- Se placer dans la cellule A3, taper la formule =A2+1 et recopier cette formule vers le bas jusqu'à la cellule A51.

• Dans la colonne B, on va mettre les termes de la suite (u_n).

- Se placer dans le cellule B1 ; taper « u_n ».
- Se placer dans la cellule B2, taper « 3 ».
- Se placer dans la cellule B3, taper la formule =(3*B2–1)/(B2+1) et recopier cette formule vers le bas jusqu'à la cellule B51.

Conjecturer la convergence de la suite (u_n).

En utilisant l'assistant graphique du tableur, faire apparaître sur un graphique le nuage de points correspondant.

3°) Utilisation d'une suite auxiliaire

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 1}$.

a) Justifier que la suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$.

b) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

c) En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de *n*.

d) En déduire la limite de (u_n).

IV. On considère le polynôme complexe $P(z) = z^3 - (2+3\mathrm{i})z^2 + 3(1+2\mathrm{i})z - 9\mathrm{i}$.

1°) En observant que $P(z) = z^3 - 2z^2 + 3z - 3\mathrm{i}(z^2 - 2z + 3)$, déterminer une factorisation de $P(z)$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ (E).

V. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + z^2 = -z$ (E).

VI. Exercice facultatif

On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.

1°) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

On remarquera que : $u_{n+1} = S_{2n+2}$.
En déduire le sens de variation de (u_n).

2°) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$.

En déduire le sens de variation de (v_n).

3°) Démontrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

TS3

Correction du devoir pour le lundi 1er février 2010

I. 1°) $U_1 = 2$, $U_2 = \frac{5}{2}$, U_3, $V_1 = 3$, $V_2 = 3$, V_3.

2°) On peut conjecturer que (U_n) est croissante et que (V_n) est décroissante.

3°) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_{n+1} - U_n = \sum_{k=0}^{k=n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_{n+1} - U_n > 0$.

On en déduit que la suite (U_n) est strictement croissante à partir de l'indice 1.

• $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad V_{n+1} - V_n = U_{n+1} - U_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2-(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad V_{n+1} - V_n < 0$.

On en déduit que la suite (V_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 1.

• $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad V_n - U_n = \frac{1}{n!}$.

Donc $\lim_{n \to +\infty} (V_n - U_n) = 0$.

Conclusion :

Les suites (U_n) et (V_n) sont <u>adjacentes</u>.

2°) On en déduit que (U_n) et (V_n) convergent et ont la même limite.

N.B. : Nous démontrerons plus tard que cette limite est égale à e.

II. 1°) La suite (u_n) semble converger vers 1.

2°) a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}} = \frac{\frac{3u_n}{u_n+2} - 1}{\frac{3u_n}{u_n+2}} = \frac{\frac{3u_n - u_n - 2}{u_n+2}}{\frac{3u_n}{u_n+2}} = \frac{\frac{2u_n - 2}{u_n+2}}{\frac{3u_n}{u_n+2}} = \frac{2u_n - 2}{3u_n} = \frac{2}{3} \times \frac{u_n - 1}{u_n} = \frac{2}{3} v_n$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{4}{5} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n u_n = u_n - 1$ donc $v_n u_n - u_n = -1$ soit $u_n (v_n - 1) = -1$

$u_n = \frac{-1}{v_n - 1} = \frac{1}{1 - v_n} = \frac{1}{1 - \frac{4}{5} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n}$

c) $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{2}{3} < 1$. Donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$

III. (u_n) est la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1}$.

1°) Définition de la suite (u_n)

Pour *n* entier naturel, on considère la phrase mathématique $P(n)$: « u_n existe et $u_n > 1$ ».

Démontrons par récurrence que la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

$u_0 = 3$ par hypothèse donc $u_0 > 1$.

D'où $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons <u>un</u> entier naturel *k* tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $u_k > 1$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} > 1$.

On sait que $u_k > 1$.

Or $u_{k+1} - 1 = \frac{3u_k - 1}{u_k + 1} - 1 = \frac{3u_k - 1 - u_k - 1}{u_k + 1} = \frac{2u_k - 2}{u_k + 1} = \frac{2(u_k - 1)}{u_k + 1}$

On sait que $u_k > 1$ d'où $u_k - 1 > 0$.

De plus $u_k + 1 > 0$.

Donc $u_{k+1} - 1 > 0$ d'où $u_{k+1} > 1$.

Par suite, $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel *k*, alors $P(k+1)$ est vraie.

Donc, d'après le **théorème de récurrence**, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

2°) Etude sur tableur

La suite (u_n) semble converger vers 1.

3°) Utilisation d'une suite auxiliaire

(v_n) est la suite définie par $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 1}$.

a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n - 1 > 0$.

Par suite $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n - 1 \neq 0$.

On en déduit que la suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}-1} = \dfrac{\dfrac{3u_n-1}{u_n+1}+1}{\dfrac{3u_n-1}{u_n+1}-1} = \dfrac{\dfrac{3u_n-1+u_n+1}{u_n+1}}{\dfrac{3u_n-1-(u_n+1)}{u_n+1}} = \dfrac{4u_n}{2u_n-2} = \dfrac{2u_n}{u_n-1}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} - v_n = \dfrac{2u_n}{u_n-1} - \dfrac{u_n+1}{u_n-1} = \dfrac{u_n-1}{u_n-1} = 1$

La suite de (v_n) est donc arithmétique de raison $r=1$.

c) $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0 + n \times 1 = 2+n$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n(u_n-1) = u_n+1$ donc $v_n u_n - u_n = v_n + 1$ soit $u_n(v_n-1) = v_n+1$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{v_n+1}{v_n-1}$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \; u_n = \dfrac{n+2+1}{n+2_n-1} = \dfrac{n+3}{n+1}$

d) $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n}\right) = 1}$

IV. $P(z) = z^3 - (2+3\mathrm{i})z^2 + 3(1+2\mathrm{i})z - 9\mathrm{i}$.

1°) $P(z) = z^3 - 2z^2 + 3z - 3\mathrm{i}(z^2-2z+3)$

$P(z) = z(z^2-2z+3) - 3\mathrm{i}(z^2-2z+3)$

$\boxed{P(z) = (z-3\mathrm{i})(z^2-2z+3)}$

2°) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$ (E).

(E) $\Leftrightarrow$ $(z-3\mathrm{i})(z^2-2z+3)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z-3\mathrm{i}=0 \\ \text{ou} \\ z^2-2z+3=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z=3\mathrm{i} \\ \text{ou} \\ z^2-2z+3=0 \end{cases}$

Considérons le polynôme z^2-2z+3.

Recensement des coefficients :
$a=1$; $b=-2$; $c=3$

Calcul du discriminant
$\Delta = b^2-4ac$
$= 4-4\times 3$
$= -8$
On a : $\Delta < 0$ donc le polynôme admet 2 racines complexes distinctes conjuguées :

$z_1 = \dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $z_2 = \dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$z_1 = \dfrac{2-\mathrm{i}\sqrt{8}}{2}$ $\qquad$ $z_2 = \dfrac{2+\mathrm{i}\sqrt{8}}{2}$

$z_1 = 1-\mathrm{i}\sqrt{2}$ $\qquad$ $z_2 = 1+\mathrm{i}\sqrt{2}$

$\boxed{S = \{3\mathrm{i}\,;\,1-\mathrm{i}\sqrt{2}\,;\,1+\mathrm{i}\sqrt{2}\}}$

V. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3+z^2=-z$ (E).

(E) $\Leftrightarrow$ $z^3+z^2+z=0$

$\Leftrightarrow$ $z(z^2+z+1)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ \text{ou} \\ z^2+z+1=0 \end{cases}$

Considérons le polynôme z^2+z+1.

Recensement des coefficients :
$a=1$; $b=1$; $c=1$

Calcul du discriminant
$\Delta = b^2-4ac$
$= 1^2-4\times 1\times 1$
$= -3$
On a : $\Delta < 0$ donc le polynôme admet 2 racines complexes distinctes conjuguées :

$z_1 = \dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $z_2 = \dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$z_1 = \dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $z_2 = \dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$\boxed{S = \left\{0\,;\,\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\,;\,\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right\}}$