$1^{\text{ère}}$ S3 Devoir pour le lundi 15 février 2010

Dans tout le devoir, un effort est demandé
- sur le plan de la rédaction ;
- sur le plan des notations ;
- sur le plan des graphiques.

Dans tout le devoir, le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I. On donne deux droites D et D' d'équations cartésiennes respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ ($\left(a, b\right) \neq \left(0, 0\right)$ et $\left(a', b'\right) \neq \left(0, 0\right)$).

1°) Démontrer que $D\,//\,D'$ si et seulement si $ab'-a'b=0$.
2°) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que D et D' soient perpendiculaires.

II. On considère les points $\text{A}\left(5\,;2\right)$ et $\text{B}\left(-1\,;4\right)$.

On note Δ la médiatrice du segment [AB].

Faire une figure **<u>codée</u> sur papier**.

Réaliser la figure sur ordinateur à l'aide de *Geogebra*.

Le but de l'exercice est de déterminer une équation cartésienne de Δ.

1ère méthode : en utilisant la définition de la médiatrice d'un segment

Rappeler la définition de Δ :
« Δ est la droite … ».
Calculer les coordonnées du milieu I de $\left[\text{AB}\right]$ et déterminer une équation cartésienne de Δ en rédigeant convenablement.

Vérifier que l'équation obtenue coïncide bien avec celle qui est donnée par *Geogebra*.

2e méthode : en utilisant la caractérisation de la médiatrice d'un segment

Rappeler la propriété : « Un point appartient à Δ si et seulement si … ».

Déterminer alors une équation cartésienne de Δ en rédigeant ainsi :

Soit M un point quelconque de P de coordonnées $\left(x\,;y\right)$.

$\text{M} \in \Delta$ si et seulement si $\text{MA} = \text{MB}$

si et seulement si $\text{MA}^2 = \text{MB}^2$

si et seulement si …

III. On donne la droite D d'équation cartésienne $3x-4y+1=0$ et le point $\text{A}\left(8\,;0\right)$.

On fera :
- une figure **<u>codée</u>** sur papier.
- une figure sur ordinateur à l'aide de *Geogebra*.

1°) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ perpendiculaire à D passant par A.
Contrôler que le résultat coïncide avec celui donné par *Geogebra*.
2°) En déduire les coordonnées du point d'intersection H de ces deux droites.
On rédigera ainsi :
« Les coordonnées du point H sont solutions du système… ».
3°) Utiliser ce résultat pour déterminer les coordonnées du point A', image de A dans la réflexion d'axe D (on note $\text{A}' = S_D\left(\text{A}\right)$).

IV. On considère les droites D et D' d'équations cartésiennes respectives $2x-y+1=0$ et $x+2y-5=0$.

1°) Tracer D et D' ; que peut-on dire de D et D' ? Justifier.
2°) Déterminer l'ensemble E des points $\text{M}\left(x\,;y\right)$ de P tels que $\left(3x+y-4\right)^2 = \left(x-3y+6\right)^2$.
On rédigera ainsi : « $\text{M} \in E$ si et seulement si … ».

Rappels sur les ensembles

Soit A et B deux ensembles.

• On appelle **intersection de A et B** l'ensemble noté $\mathbf{A \cap B}$ constitué des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.

• On appelle **réunion de A et B** l'ensemble noté $\mathbf{A \cup B}$ constitué des éléments qui appartiennent soit à A, soit à B soit aux deux à la fois.

Ainsi :
$x \in \text{A} \cap \text{B}$ si et seulement si $x \in \text{A}$ <u>et</u> $x \in \text{B}$.
$x \in \text{A} \cup \text{B}$ si et seulement si $x \in \text{A}$ <u>ou</u> $x \in \text{B}$ (le « ou » mathématique ayant un sens inclusif).

Corrigé du devoir pour le 15-2-2010

3 axes pour ce devoir :

- travail de rédaction (savoir bien exprimer ses idées) ;
- sur le plan des notations (respecter les notations, par exemple pour les segments : *D* est la médiatrice du segment [AB]) ;
- sur le plan des figures (figures propres et soignées, pointillés et valeurs des coordonnées sur les axes, codages des angles droits et des segments de même longueur).

I.

$D : ax+by+c=0$

$D' : a'x+b'y+c'=0$

On sait que le vecteur $\vec{v}(-b\,;a)$ est un vecteur directeur de *D*.

On sait que le vecteur $\vec{v}'(-b'\,;a')$ est un vecteur directeur de D'.

Il y a plusieurs méthodes possibles.

1°) Démontrons que $D//D'$ si et seulement si $ab'-a'b=0$.

$D//D'$ si et seulement si $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont colinéaires

si et seulement si $\begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix}=0$

si et seulement si $-b\times a'-a\times(-b')=0$

si et seulement si $ab'-a'b=0$

2°) Déterminons une condition nécessaire et suffisante pour que *D* et *D'* soient perpendiculaires.

$D\perp D'$ si et seulement si $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont orthogonaux

si et seulement si $\vec{v}\bullet\vec{v}'=0$

si et seulement si $-b\times(-b')+a\times a'=0$

si et seulement si $aa'+bb'=0$

II. Détermination d'une équation de médiatrice

$A(5\,;2)$
$B(-1\,;4)$
Δ : médiatrice du segment $[AB]$

Graphique avec codages.

Codages attendus :
- Milieu de [AB] ;
- Angle droit pour indiquer que Δ est perpendiculaire à (AB).

1$^{\text{ère}}$ méthode : utilisation de la définition de la médiatrice

Définition de Δ : Δ est la droite perpendiculaire au segment [AB] en son milieu.

Calculons les coordonnées de I.

$$\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_I=\dfrac{5-1}{2} \\ y_I=\dfrac{2+4}{2} \end{cases}$$

Le point I pour coordonnées $(2\,;3)$.

$\Delta\perp$ (AB) donc $\overrightarrow{AB}(-6\,;2)$ est un vecteur normal à Δ.

Par suite, Δ admet une équation cartésienne de la forme $-6x+2y+c=0$ avec $c\in\mathbb{R}$.

$I\in\Delta$ donc $-6x_I+2y_I+c=0$

$-6\times2+2\times3+c=0$

$c=6$

Donc une équation cartésienne de Δ s'écrit :

$$\begin{aligned} -6x+2y+6&=0 \\ 3x-y-3&=0 \end{aligned} \quad :(-2)$$

Autre méthode possible : en utilisant un point M de coordonnées $(x\,;y)$.

2$^{\text{e}}$ méthode : utilisation de la caractérisation de la médiatrice

Un point appartient à Δ si et seulement si il est équidistant des extrémités.

Soit M un point quelconque du plan *P* de coordonnées $(x\,;y)$.

$M\in\Delta$ si et seulement si $MA=MB$

si et seulement si $MA^2=MB^2$

si et seulement si $(x-5)^2+(y-2)^2=(x+1)^2+(y-4)^2$

si et seulement si $x^2-10x+25+y^2-4y+4=x^2+2x+1+y^2-8y+16$

si et seulement si $\cancel{x^2}-10x+\cancel{y^2}-4y+29=\cancel{x^2}+2x+\cancel{y^2}-8y+17$

si et seulement si $-12x+4y+12=0$

si et seulement si $3x-y-3=0$

Donc une équation cartésienne de Δ s'écrit : $\boxed{3x-y-3=0}$.

III.

$D: 3x-4y+1=0$ $A(8;0)$ Δ : perpendiculaire à D passant par A

Codage attendu sur le graphique : l'angle droit entre *D* et Δ.

1°) Déterminons une équation cartésienne de Δ.

Le vecteur $\vec{u}(4;3)$ est un vecteur directeur de D donc comme $\Delta \perp D$, c'est un vecteur normal à Δ.

Par suite, Δ admet une équation cartésienne de la forme $4x+3y+c=0$ avec $c \in \mathbb{R}$.

$A \in \Delta$ donc $4x_A+3y_A+c=0$

$4\times 8+3\times 0+c=0$

$c=-32$

Donc une équation cartésienne de Δ s'écrit : $4x+3y-32=0$.

2°) Déduisons-en les coordonnées du point d'intersection H de *D* et Δ.

Les coordonnées du point H sont solutions du système $\begin{cases} 3x-4y+1=0 \\ 4x+3y-32=0 \end{cases}$.

Il s'agit d'un système linéaire.

Le déterminant de ce système est égal à : $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 25$.

Ce déterminant est non nul donc le système admet un unique couple solution.

La meilleure méthode de résolution est ici la **méthode par combinaisons**.

Le système est successivement équivalent à :

$$\begin{cases} 25x-125=0 & (3L_1+4L_2) \\ 25y-100=0 & (-4L_1+3L_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$$

Conclusion : $H(5;4)$

3°) Déterminons les coordonnées du point $A' = S_D(A)$.

Codage attendu sur le graphique : les segments [AH] et $[A'H]$ sont de même longueur.

On peut dire que H est le milieu de $[AA']$.

Donc on en déduit que $\begin{cases} x_H = \dfrac{x_A+x_{A'}}{2} \\ y_H = \dfrac{y_A+y_{A'}}{2} \end{cases}$.

$$\begin{cases} 5 = \dfrac{8+x_{A'}}{2} \\ 4 = \dfrac{0+y_{A'}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{A'}=2 \\ y_{A'}=8 \end{cases}$$

$A'(2;8)$

IV.

$D: 2x-y+1=0$ $D': x+2y-5=0$

1°)

Le vecteur $\vec{u}(1;2)$ est un vecteur directeur de D.

Le vecteur $\vec{u}'(-2;1)$ est un vecteur directeur de D'.

$\vec{u}\bullet\vec{u}' = -2+2=0$

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux et par suite, $D \perp D'$.

N.B. : On peut aussi utiliser les vecteurs normaux.

Codage attendu sur la figure : l'un des quatre angles droits formés par les droites *D* et D'.

2°) Déterminons l'ensemble *E* des points $\mathbf{M}(x\,;\,y)$ de *P* tels que $(3x+y-4)^2=(x-3y+6)^2$.

Soit M un point quelconque de *P* de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$\mathrm{M}\in E$ si et seulement si $(3x+y-4)^2=(x-3y+6)^2$

si et seulement si $(3x+y-4)^2-(x-3y+6)^2=0$

si et seulement si $\left[(3x+y-4)+(x-3y+6)\right]\left[(3x+y-4)-(x-3y+6)\right]=0$

si et seulement si $(4x-2y+2)(2x+4y-10)=0$

si et seulement si $4(2x-y+1)(x+2y-5)=0$

si et seulement si $\left\{\begin{array}{l}2x-y+1=0\\ \text{ou}\\ x+2y-5=0\end{array}\right.$

Conclusion : *E* est la réunion des droites *D* et *D'*.

On peut écrire : $\boxed{\boldsymbol{E=D\cup D'}}$.

Le « ou » se traduit par une réunion et non par une intersection.

Attention à toutes les notations : segment.