Exercices sur les intégrales

1 Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $I=[a\,;\,b]\ (a<b)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n=\displaystyle\int_I f^n$.

1°) Démontrer que, pour tout entier $n\geq 2$, on a : $u_n u_{n-2}\geq {u_{n-1}}^2$.
2°) On suppose que f est strictement positive sur I.

Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ est convergente.

2 Pour tout réel x, on pose $u(x)=\displaystyle\int_0^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{1+\sqrt{t}}$.

Démontrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $u'(x)$.

3 Calculer l'intégrale $\mathrm{A}=\displaystyle\int_0^a \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $u(t)=t^2$.

4 Calculer l'intégrale $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+t^2\right)\mathrm{d}t$.

5 Calculer les intégrales $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$ par deux méthodes.

1ère méthode : par calcul direct
2e méthode : en calculant $\mathrm{I}+\mathrm{J}$ et $\mathrm{I}-\mathrm{J}$.

6 Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan x\right)\mathrm{d}x$.

On factorisera $\cos x+\sin x$ puis on effectuera un changement de variable sur la deuxième intégrale.

7 Déterminer les fonctions f continues définies sur $\mathrm{I}=[0\,;1]$ à valeurs dans I telles que $\displaystyle\int_I f=\int_I f^2$.

8 Soit f une fonction continue définie sur un intervalle $\mathrm{I}=[0\,;a]$ (a étant un réel strictement positif) à valeurs dans $\mathbb{R}$ ne prenant pas la valeur -1 telle que, pour tout réel $x\in\mathrm{I}$, on ait $f(x)\times f(a-x)=1$.

Calculer $\displaystyle\int_I \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$

9 Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x$

10 Soit f une fonction continue définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0\,;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

1°) Démontrer qu'il existe un réel $a\in\mathrm{I}$ tel que $f(a)=\dfrac{1}{2}$.
2°) Démontrer que f admet un point fixe.

11 1°) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

2°) a) Démontrer que pour tout réel $x>0$, on a : $x-\dfrac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x$.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

12 Déterminer l'ensemble des fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x, on ait

$$f(x)-\int_0^x (x-t)\,f(t)\,\mathrm{d}t=x.$$

13 Déterminer une primitive de la fonction Arctangente.

14 Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[-1\,;1]$.

Pour tout réel x, on pose $g(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$.

15 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $\mathrm{I}=[a\,;b]\ (a<b)$ telle que, pour tout fonction φ en escalier sur I, on ait $\displaystyle\int_I \varphi\,f=0$.

Déterminer f.

Indication : utiliser le théorème d'approximation.
Pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction en escalier φ telle que pour tout réel $x\in\mathrm{I}$, on ait $\left|\,f(x)-\varphi(x)\right|\leq\varepsilon$.

16 Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n définit sur l'intervalle $[n\,;+\infty[$ par

$$f_n(x)=\int_n^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Partie A

1°) Démontrer que la fonction f_n est dérivable sur son intervalle $[n\,;+\infty[$ et donner son sens de variation.
2°) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$.
3°) En déduire que, pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel x_n appartenant à l'intervalle $[n\,;+\infty[$ tel que $f_n(x_n)=1$.

Partie B

1°) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

2°) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{e}^{-x_n^2} \le x_n - n \le \mathrm{e}^{-n^2}$.

3°) On pose $u_n = x_n - n$.

a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.

c) Déduire de l'encadrement obtenu au 2°) que $x_n - n \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-n^2}$.

$\boxed{\mathbf{17}}$ On considère la fonction f définie par $f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.

1°) déterminer le domaine de définition de *f*.
2°) Etudier la parité et la périodicité de *f*.
3°) Le but de cette question est de calculer $f(x)$ de deux manières différentes :

a) **1ère méthode :** calculer $f'(x)$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$; en déduire $f(x)$.

b) **2e méthode :** calculer directement par changement de variable.

$\boxed{\mathbf{18}}$ Soit f une fonction continue de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{xf(x)}{x+n}\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}_n = \int_0^1 \frac{nf(x)}{x+n}\mathrm{d}x$.

Etudier la convergence de (I_n) et (J_n).

$\boxed{\mathbf{19}}$ Soit E l'ensemble des fonctions f définies sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $f(0)=0$ et $f(1)=1$.

Pour toute fonction f de E, on pose $J(f) = \int_0^1 \left| f'(t) - f(t) \right| \mathrm{d}t$.

1°) Démontrer que pour toute fonction $f \in \mathrm{E}$, on a : $J(f) \ge \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Indication : calculer d'abord $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\left[f'(t) - f(t)\right]\mathrm{d}t$.

2°) Existe-t-il une fonction $f \in \mathrm{E}$ telle que $J(f) = \frac{1}{\mathrm{e}}$?

3°) Pour tout entier naturel $n \ge 1$, on considère la fonction f_n définie sur I par $f_n(t) = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-nt}}{\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-n}}$.

a) Vérifier que $f_n \in \mathrm{E}$.

b) Calculer $J(f_n)$.

c) Justifier que l'ensemble $\{J(f),\ f \in \mathrm{E}\}$ admet une borne inférieure et donner sa valeur.

$\boxed{\mathbf{20}}$ On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\mathrm{d}t$.

1°) Démontrer que f est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$.

2°) Démontrer qu'il existe un et un seul réel α dans l'intervalle $]0;+\infty[$ tel que $f'(\alpha)=0$.

3°) Dresser le tableau de variation de f.

4°) Démontrer que, pour tout réel $x>0$, $f(x)$ est compris entre $\mathrm{e}^{-x^2}\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\mathrm{e}^{-x^4}\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{t}$.

En déduire la limite de f en 0^+ et en $+\infty$.

$\boxed{\mathbf{21}}$ Soit f et g deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0;1]$ telles que, pour tout réel $x\in\mathrm{I}$, on ait $f(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ et $g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

On pose $F(x) = \sup\limits_{t\in[0;x]} |f(t)|$ et $G(x) = \sup\limits_{t\in[0;x]} |g(t)|$.

Démontrer que $F(x) \le xG(x)$ et en déduire que $f=g=0$ sur I.

$\boxed{\mathbf{22}}$ Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum\limits_{1\le i<j\le n} f\left(\frac{i}{n}\right)f\left(\frac{j}{n}\right)$.

Indication : écrire $\sum\limits_{1\le i<j\le n} f\left(\frac{i}{n}\right)f\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{1}{2}\left[\sum\limits_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}} f\left(\frac{i}{n}\right)f\left(\frac{j}{n}\right) - \sum\limits_{i=1}^{n}\left[f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^2\right]$.

$\boxed{\mathbf{23}}$ Soit n un entier naturel non nul.

1°) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{n!}{(\mathrm{X}+1)\dots(\mathrm{X}+n)}$. Exprimer les coefficients à l'aide de coefficients binomiaux.

2°) En déduire que $\int_0^1 \frac{n!}{(x+1)\dots(x+n)}\mathrm{d}x = n\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\mathrm{C}_n^k \ln(k+1)$

$\boxed{\mathbf{24}}$ 1°) Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n définit sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0;1]$ par $f_n(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t - \int_x^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}t$.

Etudier le sens de variation de f_n.

2°) Démontrer qu'il existe un unique réel $c_n \in \mathrm{I}$ tel que $\int_0^{c_n}\mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t = \int_{c_n}^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}t$.

Donner la valeur de c_0.

3°) Comparer f_n et f_{n+1} ; en déduire le sens de variation de c_n.

4°) a) Démontrer que la suite (c_n) converge vers un réel $l \in \mathrm{I}$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\int_{c_n}^{1} \mathrm{e}^{-nt^2} \mathrm{d}t \leq 1$.

c) En déduire la valeur de l.

25 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $\mathrm{I} = [a\,;b]$ $(a < b)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

$\int_{\mathrm{I}} f^2 = \int_{\mathrm{I}} f^3 = \int_{\mathrm{I}} f^4$.

Démontrer que f est constante sur I.

Indication : on pourra calculer $\int_{\mathrm{I}} \left(f^2 - f\right)^2$.

26 Egalité de Young

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[0\,;a]$ (où a un réel strictement positif), à valeurs réelles, continue et strictement croissante sur $[0\,;a]$, dérivable dans l'intervalle $]0\,;a[$ et s'annulant en 0.

On se propose de démontrer que pour tout réel α tel que $0 \leq \alpha \leq a$, on a :

$\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(\alpha)} f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = \alpha f(\alpha)$ (1).

1°) Justifier que l'on a : $f^{-1}(0) = 0$.

2°) Exemple : on prend $f(x) = x^p$ avec p réel strictement positif ; vérifier la relation (1).

3°) Pour tout réel α tel que $0 \leq \alpha \leq a$, on note $\varphi(\alpha)$ la quantité :

$\varphi(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(\alpha)} f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x - \alpha f(\alpha)$.

a) Exprimer la fonction φ à l'aide de f et de primitives de f et f^{-1}.

b) En déduire que la fonction φ est définie et continue sur l'intervalle $[0\,;a]$.

c) Démontrer que φ est dérivable sur l'intervalle $]0\,;a[$, de dérivée nulle sur $]0\,;a[$. Que peut-on en déduire pour φ ?

d) Déterminer $\varphi(0)$ et en déduire l'égalité (1).

4°) Illustrer graphiquement l'égalité (1) avec des aires.

27 Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k}$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim_{n\to+\infty} S'_n$.

28 Partie A

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ pour tout entier naturel n non nul.

1°) Calculer u_1.

2°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

3°) Déterminer la limite de u_n.

Partie B

Etant donné un réel a, on considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $v_1 = a$ et la relation de récurrence $v_{n+1} = (n+1)v_n - 1$ pour tout entier naturel n non nul.

On s'intéresse à l'influence du terme initial a de cette suite sur son comportement à l'infini.

1°) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $v_n = u_n + n!(a+2-\mathrm{e})$.

2°) Etudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a.

29 Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(x+1)^n}\,\mathrm{d}x$.

1°) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$.

2°) Déterminer une relation entre I_{n-1} et I_n ; en déduire un équivalent simple de I_n lorsque $n \to +\infty$.

30 Pour tout entier naturel n non nul, on pose $\mathrm{I}_n = \int_1^2 (\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

1°) Etudier la suite (I_n).

2°) a) Exprimer I_n en fonction de I_{n+1}.

b) A l'aide de cette relation, démontrer que $\frac{\mathrm{I}_n}{(\ln 2)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. (On observera que $\mathrm{I}_{n+1} \leq (\ln 2)^{n+1}$)

c) Déterminer un équivalent de I_n lorsque $n \to +\infty$.

31 Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $\mathrm{I} = [0\,;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$.

32 Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $U_n = n^2 \left(\prod_{k=1}^{n} k^k\right)^{-\frac{4}{n^2}}$.

1°) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $\ln U_n = -\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \ln\frac{k}{n} - 2\frac{\ln n}{n}$.

2°) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

33 Soit a un réel strictement positif.

Déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 telles que l'on ait pour tout réel x,

$[f(x)]^2 = \int_0^x \left(f^2(t) + f'^2(t)\right)\mathrm{d}t + a$.

34 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $\mathrm{I}=[a\,;b]$ ($a<b$) à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe un entier naturel n tel que $\forall k\in\{0,1,\dots,n\}\quad \int_{\mathrm{I}} x^k f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

Le but de l'exercice est de démontrer que f s'annule au moins une $n+1$ fois en changeant de signe dans l'intervalle $]a\,;b[$.

1°) Calculer $\int_{\mathrm{I}} f(x)P(x)\,\mathrm{d}x$ pour $P\in\mathbb{R}_n[X]$.

2°) Démontrer que f s'annule en changeant de signe au moins une fois dans $]a\,;b[$.

2°) On suppose que f s'annule en changeant de signe en $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_p$ $(a_1<a_2<\dots<a_p)$ dans $]a\,;b[$ avec $p\leq n$.

Conclure en considérant $P(x)=\prod_{i=1}^{p}(x-a_i)$.

35 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0\,;\pi]$ par $f(0)=0$ et $f(x)=\dfrac{1-\cos\frac{x}{3}}{\sin\frac{x}{2}}$ pour $x\neq 0$.

1°) Etudier la continuité de f.

2°) Calculer $\int_{\mathrm{I}} f$.

36 1°) Donner les solutions de l'équation différentielle $xy'+2y=\dfrac{x}{x^2+1}$ (E) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0.

2°) Démontrer qu'il existe une unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$. On note f cette solution.

Calculer $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

37 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $\mathrm{I}=[a;b]$ ($a<b$) à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Démontrer que si l'on a : $\left|\int_{\mathrm{I}} f\right|=\int_I |f|$, alors f est de signe constant sur I.

Indication : écrire $f=f_+-f_-$ et distinguer deux cas suivant que $\int_{\mathrm{I}} f\geq 0$ ou $\int_{\mathrm{I}} f\leq 0$.

38 Pour tout entier naturel $n\geq 1$, on note f_n la fonction en escalier définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0\,;1]$ par $f_n(x)=n$ si $x\in\left]0\,;\frac{1}{n}\right]$ et $f_n(x)=0$ si $x=0$ ou si $x\in\left]\frac{1}{n}\,;1\right]$.

1°) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ ($x\in\mathrm{I}$ fixé).

2°) Calculer $\int_{\mathrm{I}} f_n$.

39 Soit f une fonction de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1.

Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)$.

40 Soit f une fonction de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 qui ne s'annule pas.

Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{f'\left(\frac{k}{n}\right)}{f\left(\frac{k}{n}\right)}$.

41 Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+2\cos^2 x}$ en utilisant le changement de variable $u=\tan x$.

42 Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$ en utilisant le changement de variable $u=\tan x$.

43 Déterminer une primitive des fonctions $x\mapsto\cos(\ln x)$ et $x\mapsto\sin(\ln x)$ sur leur ensemble de définition.

44 Déterminer une primitive des fonctions $x\mapsto\dfrac{\cos(\ln x)}{x}$ et $x\mapsto\dfrac{\sin(\ln x)}{x}$ sur leur ensemble de définition.

45 Déterminer une primitive de la fonction $x\mapsto\mathrm{Arctan}\left(x^2\right)$ sur son ensemble de définition.

46 Déterminer une primitive de la fonction $x\mapsto\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{x}\right)$ sur son ensemble de définition.

47 Déterminer une primitive de la fonction $x\mapsto\mathrm{Arcsin}\left(\sqrt{x}\right)$ sur son ensemble de définition.

48 Déterminer une primitive de la fonction $x\mapsto\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ sur son ensemble de définition.

49 Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $\mathrm{I}_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^n x}{\cos^n x+\sin^n x}\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^n x}{\cos^n x+\sin^n x}\mathrm{d}x$.

Démontrer que $\mathrm{I}_n=\mathrm{J}_n$.

Calculer $\mathrm{I}_n+\mathrm{J}_n$; en déduire I_n et J_n.

50 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $\mathrm{I}=[a;b]$ ($a<b$) à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Démontrer que l'on a : $\left(\int_a^b f(x)\cos x\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin x\,\mathrm{d}x\right)^2\leq(b-a)^2\int_a^b\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$.

Préciser le cas d'égalité.

51 Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0\,;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1°) Démontrer que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

2°) Démontrer que si $f(1)=0$, alors $\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

52 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\ ;\ 2\right]$ par $f\left(x\right)=\dfrac{4}{x^2+4}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Calculer le volume V du solide engendré par la rotation de la courbe $\mathcal{C}$ autour de l'axe des abscisses.

53 Déterminer les primitives de la fonction $f : x \mapsto x^2\sqrt{x+1}$.

54 Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \pi\right]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

On suppose qu'il existe un réel a tel que pour tout entier $k \in \left\{0\,;1\,;2\right\}$, on ait $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\left(2kx\right) f\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(4k+1\right)a$.

Le but de l'exercice est de démontrer que f est identiquement nulle sur $\left[0\ ;\ \pi\right]$.

1°) Pour tout entier $k \in \left\{0\,;1\,;2\right\}$, on pose $J_k=\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^{2k} x \ \ f\left(x\right)\,\mathrm{d}x$.

Calculer J_k, pour tout entier $k \in \left\{0\,;1\,;2\right\}$, en fonction de a.
2°) Calculer $J_0+J_1-J_2$; conclure.

55 Déterminer les primitives de la fonction $f :\ x \mapsto \dfrac{\sin x+3\cos x}{\sin x-\cos x}$ sur les intervalles où elle est définie.

Indication :

Ecrire $f\left(x\right)$ sous la forme $f\left(x\right)=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}+k$ où k est un réel que l'on déterminera.

56 **Volume d'un tore sans collier**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère un disque de centre I(d, 0) (d est un réel strictement positif) et de rayon r tel que $0<r<d$.
En faisant tourner ce disque autour de l'axe (Oy), on obtient un solide de révolution appelé tore.
On se propose de calculer son volume.

1°) Préciser la nature de la section du tore par un plan orthogonal à (Oy) et démontrer que l'aire de cette section est $S\left(y\right)=4\pi d\sqrt{r^2-y^2}$.
2°) En déduire le volume du tore.

57 Calculer $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^2\right)^2}$ (énoncé monsieur Clark)

58 Déterminer les primitives de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+\sqrt[3]{x}}$.

59 Déterminer les primitives de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+4}}{x+8}$.

60 Déterminer les primitives de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\mathrm{e}^x-1}$.

61 Déterminer les primitives de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$.

62 Déterminer les primitives de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$.

Corrections

$\boxed{4}$ $\mathrm{I}=\ln 2-1+\dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{5}$ $\mathrm{I}=\mathrm{J}=\dfrac{1}{4}\ln 2+\dfrac{\pi}{8}$

$\boxed{6}$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}$

$\boxed{7}$ « dans I » : très important

Dans l'énoncé initial, j'avais souligné deux fois le « à valeurs dans I »

Déterminer les fonctions f continues définies sur $\mathrm{I}=[0\,;1]$ à valeurs dans I telles que $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f=\int_{\mathrm{I}} f^2$.

$\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(1-f)=0$; or, $f(1-f)\geq 0 \Rightarrow f(1-f)=0 \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=0$ ou $1-f(x)=0$.

$\boxed{8}$ $\displaystyle\int_{\mathrm{I}}\frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}=\frac{a}{2}$

$\boxed{9}$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t^2)}=\frac{\ln 2}{4}+\frac{\pi}{8}$

$\displaystyle\frac{1}{(1+t)(1+t^2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1-t}{1+t^2}\right)$

$\boxed{11}$ $2\ln 2-1$

$\boxed{12}$ En dérivant, on obtient $f''(x)=f(x)$

D'où $f(x)=a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x}$.

Or $f(0)=0$ donc $f(x)=a\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)=2a\,\mathrm{sh}\,x$.

On trouve $a=\dfrac{1}{2}$.

$f(x)=\mathrm{sh}\,x$

$\boxed{15}$ $\left|f^2-f\varphi\right|\leq\varepsilon M$ d'où $f\varphi-\varepsilon M\leq f^2\leq f\varphi+\varepsilon M$

$\boxed{19}$ 2°) Non, sinon $f(t)=C\mathrm{e}^t$ $(C\in\mathbb{R})$.

$\boxed{20}$ 1°) $\alpha\approx 1,20$ à 10^{-2} 3°) Attention suivant que $x>1$ ou $x<1$.

$\boxed{21}$ $\displaystyle f(u)=\int_0^u g(t)\,\mathrm{d}t$

$\left|f(u)\right|\leq u\sup\limits_{[0\,;u]}|g|$

$\forall u\in[0\,;x]\quad\left|f(u)\right|\leq x\times\sup\limits_{[0\,;x]}|g|$

$F(x)\leq x\times G(x)$

De même, $G(x)\leq x\times F(x)$.

Donc $F(x)\leq x^2F(x)$. Or $F(x)\geq x^2F(x)$ car $x\in[0\,;1]$.

Donc $F(x)=x^2F(x)$ d'où $\forall x\in[0\,;1[\quad F(x)=0$

$\forall x\in[0\,;1[\quad f(x)=0\Rightarrow f=0$ sur $[0\,;1]$.

De même $\forall x\in[0\,;1[\ \ G(x)=0$ d'où $\forall x\in[0\,;1[\ \ g(x)=0\Rightarrow g=0$ sur $[0\,;1]$.

$\boxed{22}$ Exercice de Fabien Delen ; $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{1\leq i<j\leq n} f\left(\frac{i}{n}\right)f\left(\frac{j}{n}\right)=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f\right)^2$

$\boxed{24}$ 2°) $c_0=\dfrac{1}{2}$

3°) $f_{n+1}\geq f_n$; $c_n\geq c_{n+1}\Rightarrow (c_n)\downarrow$ $\displaystyle\int_0^{c_n}\mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t\leq 1$

On suppose que $c_n\to l$ avec $l\neq 0$.

$$\int_0^{c_n}\mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t=\underbrace{\int_0^{\frac{l}{2}}\mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t}_{\text{positif}}+\int_{\frac{l}{2}}^{l}\mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t+\underbrace{\int_l^{c_n}\mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t}_{\text{positif}}$$

et $\displaystyle\int_{\frac{l}{2}}^{l}\mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t\geq\frac{l}{2}\mathrm{e}^{n\left(\frac{l}{2}\right)^2}$

Donc $\displaystyle\int_0^{c_n}\mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t\geq\frac{l}{2}\mathrm{e}^{n\left(\frac{l}{2}\right)^2}$

Donc il existe un entier naturel N tel que $\displaystyle\int_0^{c_N}\mathrm{e}^{Nt^2}\mathrm{d}t>2\geq 1$ donc $l=0$

$\boxed{27}$ (Exercice de révision) $\dfrac{n^2}{n^2+n}\leq S_n\leq\dfrac{n^2}{n^2+1}$ donc $S_n\to 1$; $S'_n\to\dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{28}$ **Partie A** 1°) $u_1=\mathrm{e}-2$ 2°) $u_{n+1}=(n+1)u_n-1$ 3°) $0\leq u_n\leq\dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.

$\boxed{29}$ 1°) $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n=0$ 2°) $\mathrm{I}_n=\dfrac{\mathrm{I}_{n-1}}{n-1}-\dfrac{\mathrm{e}}{(n-1)2^{n-1}}+\dfrac{1}{n-1}$ $\quad\mathrm{I}_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$

$\boxed{30}$ 2°) a) $\mathrm{I}_n=2\dfrac{(\ln 2)^{n+1}}{n+1}-\dfrac{\mathrm{I}_{n+1}}{n+1}$ c) $\mathrm{I}_n\underset{+\infty}{\sim}2\dfrac{(\ln 2)^{n+1}}{n}$.

$\boxed{31}$ Appliquer la formule de la moyenne (éventuellement, faire quelques cas ; par exemple, prendre la fonction identiquement égale à 1).

$\boxed{32}$ $$-\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\frac{k}{n}-2\frac{\ln n}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}-4\underbrace{\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x}_{-\frac{1}{4}}$$

$U_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{e}$

$\boxed{35}$ $\int_{\mathrm{I}} f=6$

$\boxed{37}$ **Autre rédaction possible de l'indication :**

Exprimer f à l'aide de f_+ et de f_- et distinguer deux cas suivant le signe de $\int_{\mathrm{I}} f$.

$\boxed{41}$ $\frac{\ln 2}{4}$ $\boxed{52}$ $\mathrm{V}=16\pi\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+4\right)^2}=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}$

$\boxed{53}$ Utiliser le changement de variable $u=x+1$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2(x+1)^{\frac{7}{2}}}{2}-\frac{4(x+1)^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$$

$\boxed{54}$ 1°) $J_0=\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=a$.

$$J_1=\int_0^{\pi}\cos^2 x\ f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}\ f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a}{2}+\frac{5a}{2}=3a$$

$$J_2=\int_0^{\pi}\cos^4 x\ f(x)\mathrm{d}x=4a$$

2°) $J_0+J_1-J_2=0$.

$$J_0+J_1-J_2=\int_0^{\pi}\left(1+\cos^2-\cos^4 x\right)f(x)\,\mathrm{d}x$$

Or $1+\cos^2 x-\cos^4 x=1+\cos^2 x\sin^2 x\geq 1$ d'où la conclusion.

Cet énoncé est rédigé dans le livre d'Analyse MPSI de Jean-Marie Monnier (Cours et exercices corrigés p.220) sous la forme suivante :

> Soit $f:[0\,;\pi]\to\mathbb{R}$ continue à valeurs positives ou nulles.
>
> On suppose que pour tout entier $\forall n\in[\![0\,;4]\!]$, on a : $\int_0^{\pi}\cos(nx)\,f(x)\,\mathrm{d}x=(-1)^n(2n+1)\,f(0)$.
>
> Démontrer que f est identiquement nulle sur $[0\,;\pi]$.

$\boxed{58}$ $F(x)=\frac{3}{2}\ln\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)$

$\boxed{59}$ $F(x)=-4\mathrm{Arctan}\left(\frac{\sqrt{x+4}}{2}\right)+2\sqrt{x+4}$

$\boxed{60}$ $F(x)=2\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-2\mathrm{Arc}\tan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$

$\boxed{61}$ $F(x)=\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+6\mathrm{Arctan}\sqrt[6]{x}$

$\boxed{62}$ $F(x)=-\frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$

Questions de cours

$\boxed{\textbf{1}}$ Définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Exemple (illustration graphique).
Propriétés (toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée). Structure d'espace vectoriel de l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment). Partie positive, partie négative, valeur absolue d'une fonction continue par morceaux.

$\boxed{\textbf{2}}$ Subdivision d'un segment. Subdivision régulière. Subdivision plus fine qu'une autre.

$\boxed{\textbf{3}}$ Définition d'une fonction en escalier sur un segment. Subdivision adaptée.
Structure d'espace vectoriel d'une fonction en escalier sur un segment.
Définition de l'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment.

$\boxed{\textbf{4}}$ Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

$\boxed{\textbf{5}}$ Positivité de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux. Cas de nullité dans le cas d'une fonction continue sur un segment de signe constant.

$\boxed{\textbf{6}}$ Linéarité de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

$\boxed{\textbf{7}}$ Somme de Riemann d'une fonction continue sur un segment.
Théorème de convergence des sommes de Riemann.
Donner une illustration des sommes de Riemman dans le cas d'une fonction continue par morceaux à valeurs positives ou nulles.
Donner un encadrement de l'intégrale à l'aide de sommes de Riemann dans le cas d'une fonction continue par morceaux monotone à valeurs positives ou nulles. Préciser l'amplitude de l'encadrement.

$\boxed{\textbf{8}}$ Inégalité de Cauchy-Schwartz (énoncé et démonstration).
Si manque de temps, donner uniquement le principe de la démonstration.

$\boxed{\textbf{9}}$ Théorème d'approximation d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

$\boxed{\textbf{10}}$ Cahier des charges d'un opérateur d'intégration sur l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment.

$\boxed{\textbf{11}}$ Inégalité de la moyenne pour les intégrales (énoncé et démonstration).

$\boxed{\textbf{12}}$ Le théorème fondamental de l'analyse (hypothèses, énoncé et démonstration).

$\boxed{\textbf{13}}$ Le théorème du changement de variable (hypothèses, formule, démonstration et si possible un exemple).

$\boxed{\textbf{14}}$ Le théorème d'intégration par parties (hypothèses, formule, démonstration et exemple).

$\boxed{\textbf{15}}$ Formule de Taylor avec reste intégral (hypothèses, énoncé, démonstration) ; inégalité qui en résulte.
Application : écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction exponentielle entre 0 et x.

$\boxed{\textbf{16}}$ Intégrale d'une fonction continue par morceaux paire sur un segment centré en 0, intégrale d'une fonction continue par morceaux impaire sur un segment centré en 0, intégrale d'une fonction continue par morceaux périodique sur une période.