Exercices sur les espaces vectoriels de dimension finie (applications linéaires et théorème du rang, projecteurs et symétries)

1 **Question préliminaire :**
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E.
Comparer $\text{Ker } f$ et $\text{Ker } f^2$; $\text{Im } f$ et $\text{Im } f^2$.

Dans la suite, on suppose que E est de dimension 3, $\dim \text{Ker } f = 1$ et que $\text{Ker } f \subset \text{Im } f$.
1°) Démontrer que : $\dim \text{Im } f^2 = 0 \Rightarrow \text{Im } f = \text{Ker } f$. Conclure.
2°) Démontrer que : $\dim \text{Im } f^2 = 2 \Rightarrow \text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{ 0 \}$. Conclure.
3°) Déterminer $\dim \text{Im } f^2$ et $\dim \text{Ker } f^2$.

2 Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n tels que $g \circ f = 0$ et $f + g$ soit bijective.
Démontrer que l'on a : $\text{rg } f + \text{rg } g = n$.

3 Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que
$\text{E} = \text{Im } f + \text{Im } g = \text{Ker } f + \text{Ker } g$.
Démontrer que les deux sommes sont directes.

On dit que deux sous-espaces vectoriels A et B sont en somme directe pour exprimer que :
E = A + B et A ⋂ B = { 0 }.
On dit aussi que A et B sont supplémentaires dans E.

4 Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que $f + g = \text{id}_{\text{E}}$ et $\text{rg } f + \text{rg } g \leqslant \dim \text{E}$.
Démontrer que f et g sont deux projecteurs de E.
Indication : démontrer d'abord que l'on a : $\text{Ker } g = \text{Im } f$ et $\text{Im } g = \text{Ker } f$.

5 **Théorème des noyaux et des images itérés**

Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E.
Pour tout entier naturel p, on note $\text{I}_p = \text{Im } u^p$ et $\text{K}_p = \text{Ker } u^p$.
1°) Démontrer que, pour tout entier naturel p, $\text{K}_p \subset \text{K}_{p+1}$ et $\text{I}_{p+1} \subset \text{I}_p$.
2°) On suppose que E est de dimension finie et que u est injectif.
Déterminer I_p et K_p pour tout entier naturel p.
3°) On suppose que E est de dimension finie et que u est non injectif.
a) Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leqslant n$ tel que $\text{K}_r = \text{K}_{r+1}$.
b) Démontrer qu'alors $\text{I}_r = \text{I}_{r+1}$ et que, pour tout entier naturel p, on a : $\text{K}_r = \text{K}_{r+p}$ et $\text{I}_r = \text{I}_{r+p}$.
c) Démontrer que l'on a : $\text{E} = \text{K}_r \oplus \text{I}_r$.
4°) Lorsque E n'est pas de dimension finie, existe-t-il un plus petit entier naturel r tel que $K_r = K_{r+1}$?

6 Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 1$.
On pose $\text{E} = \mathbb{R}_n[X]$. Soit φ l'application de E dans E telle que $\varphi(P) = \widehat{P}(X+1) - \widehat{P}(X)$.
1°) Démontrer que φ est un endomorphisme de E.
2°) Déterminer $\text{Ker } \varphi$ par deux méthodes différentes :
a) directement ;
b) en observant que si $P \in \text{Ker } \varphi$, alors $\widetilde{P}(0) = \widetilde{P}(1) = \ldots = \widetilde{P}(n)$.
3°) Déterminer $\text{Im } \varphi$.

7 Soit E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F telle que les deux espaces $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ soient de dimension finies.
Démontrer que E est de dimension finie.

Indications :
Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une base de $\text{Im } f$. Pour tout entier naturel i compris entre 1 et p, il existe un élément e_i de E tel que $u_i = f(e_i)$.
Distinguer 3 cas :
- $\text{Ker } f = \{0\}$;
- $\text{Ker } f = \text{E}$;
- $\text{Ker } f \neq \{ 0 \}$ et $\text{Ker } f \neq \text{E}$.

8 Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit f et g deux endomorphismes de E tels que $f + g = f \circ g$.
1°) Déterminer $(f - \text{id}_E) \circ (g - \text{id}_E)$.
2°) Démontrer $f \circ g = g \circ f$.

9 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E.
1°) Comparer $\text{Ker } f$ et $\text{Ker } f^2$; $\text{Im } f$ et $\text{Im } f^2$.
2°) Dans la suite, on suppose que E est de dimension finie.
Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
a) $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.
b) $\text{Im } f = \text{Im } f^2$
c) $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\}$.
3°) On suppose que l'une des conditions du 2°) est vérifiée.
Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a : $\text{Ker } f = \text{Ker } f^n$ et $\text{Im } f = \text{Im } f^n$.

10 Soit φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P fait correspondre le polynôme $P' - P$.
1°) Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2°) Démontrer que φ est bijectif.
3°) En déduire que toute fonction $f : x \mapsto \text{e}^{-x}\widetilde{P}(x)$ où P est un polynôme admet une primitive de la forme $F : x \mapsto \text{e}^{-x}\widetilde{Q}(x)$ où Q est un polynôme.

$\boxed{11}$ 1°) Soit n un entier naturel non nul. On note Δ l'application de $K_{n+1}[X]$ dans $K_n[X]$.
définie par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.
Démontrer que Δ est bien définie, linéaire surjective.
2°) Soit Δ l'application de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{C}[X]$ définie par $\Delta(P) = \widehat{P}(X+1) - \widehat{P}(X)$.
Démontrer que Δ est un endomorphisme.
Déterminer Ker Δ et Im Δ.
3°) Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et n un entier naturel quelconque.

Démontrer que : $\Delta^n(P) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \widehat{P}(X+k)$.

En déduire que si $\deg P < n$, alors on a $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \widehat{P}(X+k) = 0$.

$\boxed{12}$ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note Δ l'application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui à tout polynôme $\widehat{P}(X)$ fait correspondre le polynôme $\widehat{P}(X+1)$.
1°) Démontrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2°) Démontrer que $\Delta - \mathrm{id}$ est nilpotent.
En déduire qu'il existe des réels $a_1, a_2 \ldots, a_n$ tels que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ on ait

$P(X) = \sum_{k=1}^{n} a_k \widehat{P}(X+k)$.

$\boxed{13}$ **Question préliminaire :**

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension quelconque tels que $f \circ g = g \circ f$.
Démontrer que le noyau et l'image de g sont stables par f.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans un espace vectoriel E de dimension finie égale à n avec $n \geqslant 2$ sur un corps commutatif K.
On considère n endomorphismes nilpotents $u_1, u_2, \ldots u_n$ qui commutent deux à deux (c'est-à-dire tels que pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 1 et n au sens large on ait $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$).
Pour tout entier naturel i, compris entre 1 et n au sens large, on pose $F_i = \mathrm{Im}\,(u_i \circ u_{i+1} \circ \ldots \circ u_n)$.
1°) Démontrer que pour tout entier naturel k compris entre 1 et $n-1$ au sens large, F_{k+1} est stable par u_k.
2°) En déduire que $u_k(F_{k+1}) \subsetneq F_{k+1}$.
3°) Démontrer que $F_k = u_k(F_{k+1})$.
4°) Démontrer que dim $\dim F_k < \dim F_{k+1}$.
5°) Démontrer que $\dim \mathrm{Im}(u_1 \circ u_2 \circ \ldots \circ u_n) = 0$.
Que peut-on en déduire pour $u_1 \circ u_2 \circ \ldots \circ u_n$?

$\boxed{14}$ Soit n un entier naturel non nul et K un corps commutatif.
On note S_n l'ensemble des bijections de l'ensemble $\{1\,;2\,;\ldots;n\}$ dans lui-même.
On pose $E = K^n$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel.
On note D la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 1, \ldots, 1)$.

On pose $H = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E \;/\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$.

Démontrer que les sous-espaces vectoriels F de E tels que pour tout $\sigma \in S_n$, si $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F$, alors $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \in F$ sont $\{0_E\}$, D, H et E.
Indication : Démontrer que si F est un sous-espace vectoriel de E différent de $\{0_E\}$, D, H a cette propriété de stabilité, alors $(1, -1, 0, 0, \ldots, 0) \in F$ et $(1, 1, 1, \ldots, 1) \in F$.
On pourra utiliser les bijections particulières.

Corrigés

$\boxed{1}$ 2°) $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$; $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$.

Soit $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$. $\left.\begin{array}{l} x = f(x') \\ f(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f^2(x') = 0$ d'où $x' \in \operatorname{Ker} f$ donc $x = 0$

3°) $\dim \operatorname{Im} f^2 = 2 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$

Donc : $\dim \operatorname{Im} f^2 = 1$ et $\dim \operatorname{Ker} f^2 = 2$

$\boxed{4}$ Si $x \in \operatorname{Ker} f$, alors $g(x) = x$.

$\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Im} f \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} g \leqslant \dim \operatorname{Im} f$

$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \leqslant \dim \mathrm{E}$ d'où $\dim \operatorname{Ker} g \geqslant \dim \operatorname{Im} f$.

$\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$

De même, $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f$.

$\boxed{7}$ $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(u_1, ..., u_p)$. $u_i = f(e_i)$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(e_i)$$

$$f\left(x - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(e_i)\right) = 0 \text{ donc } x - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(e_i) \in \operatorname{Ker} f$$

On distingue 3 cas :

- $\operatorname{Ker} f = \{0\}$
- $\operatorname{Ker} f = \mathrm{E}$
- $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ et $\operatorname{Ker} f \neq \mathrm{E}$

Solution détaillée :

Attention, ne pas écrire « Ker f et Im f sont de dimensions finies, donc la somme de leurs dimensions existe et par suite, dim E = dim Ker$f$ + dim Imf ». Le théorème du rang ne permet pas de déduire que E est de dimension finie.

Soit $(u_1, u_2, ..., u_p)$ une base de Im f.

Il existe une famille $(e_1, e_2, ..., e_p)$ d'éléments de E tels que, pour tout entier naturel i compris entre 1 et p $f(e_i) = u_i$. Il est clair que cette famille est libre car une combinaison linéaire

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0 \text{ implique } f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i\right) = 0 \text{ donc } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0.$$

L'indépendance linéaire de la famille $(u_1, u_2, ..., u_p)$ implique alors que tous les scalaires λ_i sont nuls.

Soit x un vecteur quelconque de E. Il existe des scalaires α_1, α_2, ... α_p tels que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i = f\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i\right).$$

Il s'ensuit que $x - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \in \operatorname{Ker} f$.

Si f est bijective, alors $x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(e_i)$ et on en déduit que $(e_1, e_2, ..., e_p)$ est une base de E et donc que E est de dimension finie.

$\boxed{10}$ 1°) Démontrons que φ est une application linéaire

$\varphi(P_1 + P_2) = \varphi(P_1) + \varphi(P_2)$

$\varphi(kP) = k\varphi(P)$

Grâce au degré, on peut dire que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2°) Démontrons que φ est bijectif.

On étudie le noyau de φ.

$P' - P = 0 \Leftrightarrow P' = P \Leftrightarrow P = 0$ (on étudie le degré)

$\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$

3°) $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\widetilde{Q}(x)$ est dérivable

Trouver un Q tel que $\left(\mathrm{e}^{-x}\widetilde{Q}(x)\right)' = \mathrm{e}^{-x}\widetilde{P}(x)$

$\left(\mathrm{e}^{-x}\widetilde{Q}(x)\right)' = \mathrm{e}^{-x}\left[\widetilde{Q}'(x) - \widetilde{Q}(x)\right] \Leftrightarrow Q' - Q = P$

Comme φ est bijectif, $\exists Q$ tel que $Q' - Q = P$.

$\boxed{13}$ 2°) Pour démontrer que l'inclusion est stricte, je conseille de considérer l'endomorphisme $\widetilde{u_k}$ qui est l'endomorphisme induit par u_k sur le sous-espace F_k.

Cet endomorphisme est nilpotent donc il n'est pas bijectif…

Questions de cours

$\boxed{\mathbf{1}}$ Énoncer et démontrer le théorème du rang (énoncé et démonstration).

$\boxed{\mathbf{2}}$ Soit E et F deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif K.
On suppose que E et F sont de dimension finie et que leurs dimensions sont égales.

Soit f une application linéaire de E dans F.

Démontrer que f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective.