TS

Équations différentielles (3)
Équations différentielles de la forme $y'=ay+b$ (a et b constantes)

I. Résolution

1°) Théorème

Les solutions de l'équation différentielle $y'=ay+b$ $\left((a\,;b)\in\mathbb{R}^2,\ a\neq 0\right)$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\mathrm{e}^{ax}-\frac{b}{a}$ $\left(k\in\mathbb{R}\right)$.

2°) Démonstration

Prérequis : résolution des équations différentielles de la forme $Y'=mY$

$y'=ay+b$ (E) $\left((a\,;b)\in\mathbb{R}^2,\ a\neq 0\right)$

(E) $\Leftrightarrow$ $y'=a\underbrace{\left(y+\frac{b}{a}\right)}_{Y}$

On pose : $Y=y+\underbrace{\frac{b}{a}}_{\text{constante}}$.

y est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc Y est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a : $Y'=y'$.

(E) s'écrit donc $Y'=aY$.

D'après le théorème fondamental, les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=k\mathrm{e}^{ax}$ $\left(k\in\mathbb{R}\right)$.

On a : $y=Y-\frac{b}{a}$.

Dons les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\mathrm{e}^{ax}-\frac{b}{a}$ $\left(k\in\mathbb{R}\right)$.

Vocabulaire : k est appelé un **paramètre**.

3°) Exercice

Résoudre (intégrer) l'équation différentielle $y'=2y+1$ (E).

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay+b$ avec $a=2$ et $b=1$.

Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}$ $\left(k\in\mathbb{R}\right)$.

4°) Bêtise à ne pas faire

Ne pas utiliser la formule lorsque a et b ne sont pas de constantes.

Exemple : $y'=2y+3x$

Ne pas appliquer le théorème.

II. Solution prenant une valeur donnée (problème de Cauchy)

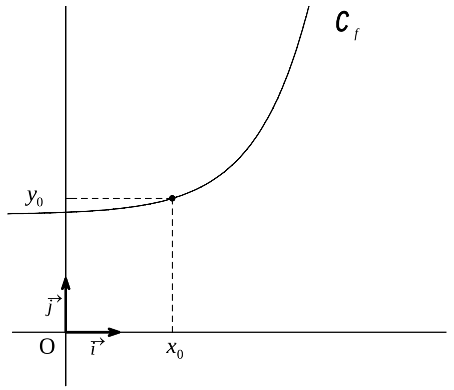
Cauchy : mathématicien français du XIX[e] siècle

1°) Théorème

a et b sont deux réels tels que $a\neq 0$.

Pour tout couple $(x_0\,;y_0)$ de réels, il existe une unique fonction f solution de l'équation différentielle $y'=ay+b$ telle que $f(x_0)=y_0$.

2°) Interprétation graphique



Il existe une unique fonction f solution de l'équation différentielle dont la courbe représentative par le point de coordonnées $(x_0\,;y_0)$.

3°) Démonstration (ROC)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto k\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a} \quad (k \in \mathbb{R})$

On cherche k tel que $f(x_0) = y_0 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow k\mathrm{e}^{ax_0} - \frac{b}{a} = y_0$$
$$\Leftrightarrow k\mathrm{e}^{ax_0} = y_0 + \frac{b}{a}$$
$$\Leftrightarrow k = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{-ax_0}$$

k existe et est unique donc f existe et est unique.
La solution cherchée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(y_0 + \dfrac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{a(x-x_0)} - \dfrac{b}{a}$.

III. Équations différentielles en physique : circuit RC série en électricité

On pose : $u = u_C$.

u_C est une fonction qui dépend du temps t.

$t \in [0\,;+\infty[$

On suppose que la fonction u_C dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

On établit l'équation différentielle $\underbrace{RC}_{\tau} \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E$

constante de temps

avec la condition initiale $u_C(0) = 0$.

L'équation différentielle s'écrit $\tau \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}u_C + \dfrac{E}{\tau}$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -\dfrac{1}{\tau}$ et $b = \dfrac{E}{\tau}$.

Donc $u_C(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + E \quad (k \in \mathbb{R})$.

On se place dans le cas d'une charge.

k est déterminé par la condition initiale $u_C(0) = 0$ donc $0 = k + E$ d'où $k = -E$.

On obtient donc $\boxed{u_C(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$.

Commentaire :

En physique, on a ce que l'on appelle des « **conditions aux limites** » ce que l'on n'a pas en mathématiques.

Cette expression permet de voir que u_C est strictement croissante $[0\,;+\infty[$ (par exemple par dérivation).

On a $\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ (car $\tau > 0$ donc $-\dfrac{1}{\tau} < 0$) donc $u_C(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} E$.

On considère la représentation graphique de u_C en fonction de t.
Elle admet la droite d'équation $y = E$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

Application : Détermination graphique de la constante de temps par la méthode de la tangente.

On considère la représentation graphique de u_C en fonction de t.

Cette courbe passe par l'origine et la tangente en ce point et la tangente T en ce point a pour équation $y = \dfrac{E}{\tau}t$ (démonstration très facile).

Pour avoir l'abscisse du point d'intersection de T avec la droite d'équation $y = E$, on résout l'équation $\dfrac{E}{\tau}t = E$.
On trouve $t = \tau$.

Autre méthode pour déterminer la constante de temps :

On calcule $u_C(\tau) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{\tau}}\right) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right)$.

Avec la calculatrice, on obtient $1 - \mathrm{e}^{-1} = 0{,}632120...$.

$u_C(\tau) \approx 0{,}63E$

Régime transitoire-régime stationnaire

$u_C(5\tau) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{5\tau}{\tau}}\right) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-5}\right)$

Avec la calculatrice, on obtient $1 - \mathrm{e}^{-5} = 0{,}993262...$.

Pour $t \geqslant 5\tau$, on peut considérer que $u_C(t)$ est « égal » à E à moins de 1 %.
On peut considérer que la tension est constante ce qui revient à considérer que la courbe représentation est confondue avec l'asymptote horizontale.

De 0 à 5τ, on dit que l'on est en régime transitoire.

À partir de 5τ, on dit que l'on est en régime stationnaire.

Idem pour la décharge.

Dans ce cas, on obtient $\boxed{u_C(t) = E\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}$.