TS3 — Interrogation écrite du lundi 23 mars 2009

Prénom et nom : ………………………………. **Note : ……/20**

I. (1 point) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 4$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n(u_n - 2)$.

On souhaite réaliser une feuille de calcul sur le modèle ci-contre.
Dans la colonne A, on désire mettre les valeurs de *n*.
Dans la colonne B, on désire calculer les termes de la suite (u_n).

	A	**B**	**C**
1	n	u_n	v_n
2			
3			
4			
5			
6			

1°) Dans la cellule B2, on tape « 4 ».
Dans la cellule B3, quelle formule faut-il taper pour obtenir les termes de la suite (u_n) en recopiant cette formule vers le bas ?

……...………………………

2°) Pour tout entier naturel *n*, on pose : $v_n = u_{n+1} - u_n$. Dans la cellule C2, quelle formule faut-il taper pour obtenir les termes de la suite (v_n) en recopiant cette formule vers le bas ? ……………………………………………….

II. (1,5 points) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$.

On souhaite réaliser une feuille de calcul donnant le calcul des termes de la suite (S_n) par deux méthodes indépendantes.

	A	**B**	**C**
1	n	u_n	S_n
2	1		
3	2		
4	3		
5			
6			

1$^{\text{ère}}$ méthode :

On introduit la suite de terme général $u_k = \frac{1}{k}$.

Dans la colonne A, on désire mettre les valeurs de *n*.
Dans la colonne B, on désire calculer les termes de la suite (u_n).
Dans la colonne C, on désire calculer les termes de la suite (S_n).

1°) Dans la cellule B2, quelle formule faut-il taper pour obtenir les termes de la suite (u_n) ? …………………

2°) Choisir parmi les formules ci-dessous laquelle il faut rentrer dans la cellule C2 pour obtenir en la recopiant vers le bas les termes de la suite (S_n). Entourer la formule exacte.

= SOMME(B2 : B2)	= SOMME(B2 ; B2)	= SOMME(B2 : B2)	= SOMME(B2 ; B2)

2$^{\text{e}}$ méthode :

Dans la colonne A, on désire mettre les valeurs de *n*.
Dans la colonne B, on désire calculer les termes de la suite (S_n).

	A	**B**
1	n	S_n
2	1	
3	2	
4	3	
5		
6		

Dans la cellule B2, on tape « 1 ».

On observe que pour tout entier naturel *p* non nul, on a : $S_{p+1} = S_p + \frac{1}{p+1}$.

Dans la cellule B3, laquelle faut-il rentrer pour obtenir en la recopiant vers le bas les termes de la suite (S_n) ? Entourer la réponse choisie.

= B2+1/A2	= B2+1/A3	= BB2+1/A3	= B2+1/A3

III. (2 points) Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

1°) Donner sans explication une expression simplifiée de S_n (sans dénominateur).	$S_n = $ ....
2°) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.	$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = $ ....

IV. (1 point) Calculer les nombres.
On donnera le premier résultat sous forme algébrique.

$\dfrac{1}{(1+\mathrm{i})^2} = $ .... $\left|(2-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})\right| = $ ....

V. (1 point) Entourer la bonne réponse.

Pour tout nombre complexe z, on pose : $Z = \left(\overline{z}\right)^2 + 2\mathrm{i}z$.

$\overline{Z}$ est égal à :

$z^2 + 2\mathrm{i}\overline{z}$	$z^2 - 2\mathrm{i}z$	$z^2 - 2\mathrm{i}\overline{z}$	$\left(\overline{z}\right)^2 - 2\mathrm{i}z$

VI. (2 points) À tout nombre complexe z on associe le nombre complexe $Z = \frac{1}{2}\left(z + \mathrm{i}\overline{z}\right)$. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont deux réels.
Exprimer Re Z et Im Z en fonction de x et y.
On ne détaillera pas les calculs ; donner les résultats dans l'encadré ci-contre.

....

....

VII. (5,5 points)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On note A le point d'affixe i.

Partie A

Vrai ou faux. Remplir la colonne de droite sans justifier (pas de points retirés en cas de mauvaise réponse).

1°) L'ensemble E des points M du plan P d'affixe z tels que $\left\lvert z - \mathrm{i} \right\rvert = 1$ est un cercle passant par O.	
2°) L'équation $\dfrac{z}{z-\mathrm{i}} = z + \mathrm{i}$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$.	
3°) Pour tout nombre complexe $z \neq \mathrm{i}$, les nombres complexes $\dfrac{z}{z-\mathrm{i}}$, $\dfrac{z}{\overline{z}+\mathrm{i}}$ et $\dfrac{\overline{z}}{\mathrm{i}-z}$ ont le même module.	
4°) Pour tout nombre complexe z distinct de i et de – i, on a : $\dfrac{z}{z-\mathrm{i}} = \dfrac{z^2 + \mathrm{i}z}{z^2+1}$.	
5°) L'équation $\dfrac{2z}{z-\mathrm{i}} = z$ admet deux solutions dans $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$.	

Partie B

À tout point M de P distinct de A, d'affixe $z \neq \text{i}$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{2z}{z - \text{i}}$.

Déterminer, en rédigeant convenablement, l'ensemble E des points M du plan tels que $|z'| = 2$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

VIII. (6 points) Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction f définie sur un intervalle I.
On demande de donner l'expression d'une primitive F sur I. Tirer les traits de fractions à la règle.

$f(x) =$	I	$F(x) =$
$\dfrac{2}{(3x-1)^4}$	$\left]\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$	
$\dfrac{1}{\text{e}^{2x}} - \cos 3x$	$\mathbb{R}$	
$\dfrac{1}{1-2x}$	$\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$	
$\dfrac{1-\text{e}^{-\frac{x}{2}}}{2}$	$\mathbb{R}$	

Bonus au choix (l'une des quatre primitives)

Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression donnée.

$f(x) = \text{e}^{x+\text{e}^x}$	$f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{2+\sin^2 x}}$	$f(x) = \dfrac{1}{1+\text{e}^x}$	$f(x) = \cos^2 3x$

Corrigé de l'interrogation écrite du 23-3-2009

I. 2°) On peut aussi rentrer la formule $\boxed{\text{= B2*(B2–3)}}$ (intéressant à mettre dans un QCM)

III. On peut mettre la formule $S_n = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 2-\frac{1}{2^n}$.

$f(x)=$	I	$F(x)=$
$\dfrac{2}{(3x-1)^4}$	$\left]\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$	$-\dfrac{2}{9(3x-1)^3}$
$\dfrac{1}{e^{2x}}-\cos 3x$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{2}e^{-2x}-\dfrac{\sin 3x}{3}$
$\dfrac{1}{1-2x}$	$\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$	$-\frac{1}{2}\ln\lvert 1-2x\rvert = -\frac{1}{2}\ln(2x-1)$
$\dfrac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{2}x+e^{-\frac{x}{2}}$

$$\frac{2}{(3x-1)^4} = \frac{2}{3}\times\frac{3}{(3x-1)^4}$$

$$\frac{1}{e^{2x}}-\cos 3x = e^{-2x}-\cos 3x$$

$$\frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$$

Primitive de e^{ax} : $\frac{1}{a}e^{ax}$

$e^{-\frac{x}{2}}$ $\qquad \dfrac{1}{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}} = -2e^{-\frac{x}{2}}$