TS3 | **Interrogation écrite du vendredi 13 mars 2009 (50 min)**

Prénom et nom : ………………………………. **Note : ……/20**

I. (1 point) Compléter directement les deux égalités ci-dessous :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n = \ldots.$ car …………………….	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n = \ldots.$ car …………………….

II. (1,5 points) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=5$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=2(u_n)^2-1$.

On souhaite réaliser une feuille de calcul sur tableur selon le modèle ci-contre.
Dans la colonne A, on désire mettre les valeurs de *n*.
Dans la colonne B, on désire calculer les termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2		
3		
4		
5		
6		

1°) Dans la cellule A2, on tape « 0 ».
Quelle formule faut-il rentrer dans la cellule A3, afin d'obtenir par « recopie vers le bas » les valeurs de *n* ?

…………………………..

2°) Dans la cellule B2, on tape « 5 ».
Dans la cellule B3, quelle formule faut-il rentrer pour obtenir les termes de la suite ? ……………

3°) Quelle formule faut-il taper dans la cellule C2 pour obtenir le résultat de la somme $\sum\limits_{k=0}^{k=12} u_k$? ……………

III. (0,5 point) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=3$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=u_n+2n-1$.

On souhaite réaliser une feuille de calcul sur tableur selon le même modèle qu'à l'exercice **II**.
On remplit la colonne A de la même façon qu'à l'exercice **II**.
Dans la cellule B2, on tape « 3 ».
Dans la cellule B3, quelle formule faut-il rentrer pour obtenir les termes de la suite ? ……………

IV. (0,5 point) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n=\sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{k^2}$.

Soit *p* un entier naturel non nul. Calculer $S_{p+1}-S_p$ en fonction de *p*. …………………………

V. (0,5 point) Soit *n* un entier naturel. Simplifier : $\sum\limits_{k=0}^{k=n}3^k=$ ………………………

VI. (3 points) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=a$ où *a* est un réel donné tel que $-1<a<0$ et la relation de récurrence $u_{n+1}={u_n}^2+u_n$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) (rédiger brièvement).

……………………………………………………………..…………………………………………………......

……………………………………………………………..…………………………………………………......

……………………………………………………………..…………………………………………………......

2°) On admet le résultat suivant que l'on peut démontrer par récurrence : pour tout entier naturel n, $-1 < u_n < 0$.
Expliquer pourquoi la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est convergente car ………………………………………………………………………….

3°) On note ℓ la limite de (u_n). Calculer la valeur de ℓ en détaillant la démarche.

……………………………………………………………..…………………………………………………....

……………………………………………………………..…………………………………………………....

……………………………………………………………..…………………………………………………....

……………………………………………………………..…………………………………………………....

……………………………………………………………..…………………………………………………....

……………………………………………………………..…………………………………………………....

……………………………………………………………..…………………………………………………....

VII. (1 point) Vrai ou faux. Justifier la réponse donnée.

On considère une suite (u_n) dont tous les termes sont non nuls. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (v_n) est convergente.

……………………………………………………………………………..……………….………….….…..

……..……..

VIII. (1 point) Donner les résultats sous forme algébrique. $\dfrac{1}{1+\mathrm{i}} - \dfrac{1}{1-\mathrm{i}} =$ …….. $\mathrm{i}(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i}) =$ ……..

IX. (1 point) Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

À tout point M de P d'affixe z on associe le point M' d'affixe $z' = (\overline{z})^2 + 2\mathrm{i}z$.

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ avec x, y, x', y' réels.

Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
On ne détaillera pas les calculs. On donnera les résultats dans le cadre ci-contre.

……………………
……………………