Exercices sur les espaces vectoriels (famille libres, liées, espaces vectoriels de dimension finie, applications linéaires sans le théorème du rang)

1 Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
1°) Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim E_1 + \dim E_2 > n$.
Démontrer que $E_1 \cap E_2 \neq \{0\}$.

2°) Soit $E_1, E_2, \ldots, E_k$ k sous-espaces vectoriels ($k \geqslant 1$) de E tels que $\sum_{i=1}^{k} \dim E_i > n(k-1)$.

Démontrer que $\bigcap_{i=1}^{k} E_i \neq \{0\}$.

Indication : raisonner par récurrence sur *k*.
Attention, on formulera clairement l'hypothèse de récurrence.

2 On considère les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 définies sur l'intervalle]– 1 ; 1[par $f_1(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$,

$f_2(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, $f_3(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $f_4(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1°) La famille $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est-elle libre ou liée (dans l'espace vectoriel des fonctions de]– 1 ; 1[à valeurs dans $\mathbb{R}$) ?

2°) Déterminer son rang.

3 1°) Rappeler la définition du rang d'un système de vecteurs dans un espace vectoriel.
2°) On considère les fonctions *f*, *g*, *h*, *k* définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^2 x$, $g(x) = \sin^2 x$, $h(x) = 1$, $k(x) = \cos 2x$.

a) La famille $\mathcal{F} = \{f, g, h, k\}$ est-elle libre ou liée (dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) ?

b) Déterminer son rang.

4 Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E.
On choisit une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de $F \cap G$.

1°) Démontrer qu'il existe des vecteurs $u_1, \ldots, u_q$ tels que $(e_1, \ldots, e_p, u_1, \ldots, u_q)$ soit une base de F et des vecteurs $v_1, \ldots, v_r$ tels que $(e_1, \ldots, e_p, v_1, \ldots, v_r)$ soit une base de G.

2°) Déterminer une base de $F + G$ et vérifier que $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$.

5 Soit E l'espace vectoriel des fonctions définies sur l'intervalle [– 1 ; 1] à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On munit E d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ grâce à l'addition des fonctions et au produit d'une fonction par un réel.
Soit F l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle [– 1 ; 1] à valeurs dans $\mathbb{R}$, affines sur chacun des intervalles [– 1 ; 0] et [0 ; 1].

1°) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2°) Soit f_1, f_2, f_3 les fonctions définies sur l'intervalle [– 1 ; 1] par :

- $f_1(x) = x$ si $x \in [-1 ; 0]$ et $f_1(x) = 0$ si $x \in [0 ; 1]$;
- $f_2(x) = 0$ si $x \in [-1 ; 0]$ et $f_2(x) = x$ si $x \in [0 ; 1]$;
- $f_3(x) = 1$ pour tout $x \in [-1 ; 1]$.

Démontrer que f_1, f_2, f_3 sont dans F et que (f_1, f_2, f_3) est une base de F.
En déduire la dimension de F.

6 On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On rappelle que l'ensemble E muni de l'addition des fonctions et du produit d'une fonction par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On considère les fonctions *f*, *g*, *h* définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$, $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $h(x) = 1$.

La famille $\mathcal{F} = \{f, g, h\}$ est-elle libre ou liée dans E ?

7 Soit *P* un polynôme à coefficients réels de degré *n*.
Démontrer que $(P, P', P'', \ldots, P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

8 Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
On considère deux sous-espaces vectoriels F et G de même dimension *p*.
Le but de l'exercice est de démontrer qu'il existe un supplémentaire commun à F et G.
1°) Traiter le cas où $E = F \oplus G$.
Indication : faire une figure dans le cas où $n = 2$ et $p = 1$.
2°) Traiter dans le cas général en posant $F = F' \oplus (F \cap G)$ et $F = G' \oplus (F \cap G)$.

9 On pose $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel. On définit les sous-ensembles A et B de E : $A = \{(a, b, a+b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$.
1°) Démontrer que A et B sont deux sous-espaces vectoriels de E.
2°) Déterminer $A \cap B$.

10 On pose $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel. On considère les vecteurs $u = (1, 0, 1)$ et $v = (1, 1, 0)$. On note $F = \mathrm{Vect}(u, v)$.
1°) Le vecteur $w = (1, -1, 5)$ appartient-il à F ?
2°) Déterminer une équation cartésienne de F.

11 On pose $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel. On note F et G les sous-ensembles de E définis par $F = \{(x, y, z, t) \in E / x - y - 2t = x + t = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in E / x - z + t = y + z = 0\}$.
1°) Démontrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.
Donner des bases de chacun des deux.
2°) F et G sont-ils supplémentaires dans E ?

12 On note E l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel *x*, on ait $f(x+1) - f(x) = x^2$.
1°) Déterminer une fonction polynôme de degré 3 qui appartient à E.
2°) Déterminer l'ensemble E.

13 Soit $\boldsymbol{P} = (P_1, P_2, ..., P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}[X]$.
On note $\boldsymbol{P}' = (P_1', P_2', ..., P_n')$.
Dire si les implications suivantes sont vraies ou fausses :
Si $\boldsymbol{P}$ est libre, alors $\boldsymbol{P}'$ est libre.
Si $\boldsymbol{P}'$ est libre, $\boldsymbol{P}$ est libre.

14 Soit $\boldsymbol{F} = (f_1, f_2, ..., f_n)$ une famille de fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note $\boldsymbol{F}' = (f_1', f_2', ..., f_n')$.
Dire si les implications suivantes sont vraies ou fausses :

① Si $\boldsymbol{F}$ est libre, alors $\boldsymbol{F}'$ est libre.

② Si $\boldsymbol{F}'$ est libre, $\boldsymbol{F}$ est libre.

15 Dans tout l'exercice, $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel.
Soit a un réel. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$: $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, a)$ et $u_3 = (a, 1, 1)$.
1°) À quelle condition sur a la famille (u_1, u_2, u_3) est libre ?
2°) Dans chacun des cas où la famille est liée, donner une combinaison linéaire nulle des vecteurs u_1, u_2, u_3 (avec des coefficients explicites).
3°) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur x, y, z pour que le vecteur (x, y, z) appartienne à $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.
Retrouver le résultat de la question 1°).

16 Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K. Soit H un hyperplan de E.
1°) Démontrer qu'il existe une base de E dont tous les éléments sont dans E \ H.
2°) Soit f un endomorphisme de E tel que pour tout élément $x \in$ E \ H, il existe élément λ_x de K tel que $f(x) = \lambda_x x$.
Démontrer que f est une homothétie de E.

17 Pour tout entier naturel n, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \cos^n x$.

Démontrer que la famille $\boldsymbol{F} = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ est libre dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

18 Soit n un entier naturel. Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = \sin^k x$.
La famille $\boldsymbol{F} = \{f_0, f_1, ..., f_n\}$ est-elle libre ou liée dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

19 Soit n un entier naturel. Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = \sin\left(x^k\right)$.
La famille $\boldsymbol{F} = \{f_0, f_1, ..., f_n\}$ est-elle libre ou liée dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

20 On pose $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel. On pose $\mathrm{F} = \{(x, y, z) \in \mathrm{E} \,/\, x - y + z = 0\}$ et on note G le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $u = (1, 1, 1)$.
1°) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2°) F et G sont-ils supplémentaires dans E ?

21 On pose $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel.
On pose $\mathrm{F} = \{(x, y, z) \in \mathrm{E} \,/\, x - y + z = 0\}$ et on note G le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $u = (1, 1, a)$ où a est un réel fixé.
1°) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2°) F et G sont-ils supplémentaires dans E ?

22 Soit n un entier naturel. On pose $P_k = X^k (1 - X)^{n-k}$.
Démontrer que la famille $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

23 On considère les polynômes suivants de $\mathbb{R}_3[X]$:
$P_1 = 3 + 3X + X^2 + X^3$; $P_2 = 1 - X - X^2 + X^3$; $P_3 = -1 - X + X^2 + X^3$; $P_4 = X + 2X^2 + X^3$.
On pose $\boldsymbol{S} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$.
Dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel, la famille $\boldsymbol{S}$ est-elle libre ? est-elle génératrice ?

24 On pose $\mathrm{E} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.
E est-il un espace vectoriel ? Si oui, en donner une base.

25 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
1°) Démontrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.
2°) Déterminer la bijection réciproque f^{-1}.
3°) Pour tout entier naturel k, on note f^k la fonction définie par $f^k(x) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^k$.
On note E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ muni de sa structure usuelle d'espace vectoriel.
Démontrer que la famille $(f, f^2, ..., f^n)$ est libre dans E.

26 On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel.
Soit n un entier naturel.

1°) On considère les fonctions $e_0 : x \mapsto \mathrm{e}^x$, $e_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{x+1}$, $e_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{x+2}$, … $e_n : x \mapsto \mathrm{e}^{x+n}$.
La famille $(e_0, e_1, ..., e_n)$ est-elle libre ou liée dans E ?
2°) On considère les fonctions $f_0 : x \mapsto 1$, $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x$, $f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$, …, $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{nx}$.
La famille $(f_0, f_1, ..., f_n)$ est-elle libre ou liée dans E ?

27 Soit n un entier naturel non nul.
On pose $E = \left\{P \in \mathbb{C}[X] \,/\, (X^n + 1)\widetilde{P}(X) = \widetilde{P}(X^2)\right\}$.
1°) Démontrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
2°) Étudier le degré des éléments de E.
3°) Dans cette question, on suppose que $n = 2$.
Déterminer E et en donner une base.

$\boxed{28}$ On pose $E=\mathbb{R}^n$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel.
1°) Démontrer que l'ensemble $G=\{(\lambda,\lambda,...,\lambda),\lambda\in\mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de *E*.

2°) Déterminer pour quelle valeur du réel *a* l'ensemble $F_a=\left\{(x_1,x_2,...,x_n)\in E\,/\,\sum_{i=1}^{n}x_i=a\right\}$ est un sous-espace vectoriel de *E*.
3°) Démontrer que, pour cette valeur de *a*, F_a et *G* sont supplémentaires dans *E*.

$\boxed{29}$ **Lemme d'échange**

Soit *E* un espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 2$ sur un corps commutatif K.
Soit $(e_1,e_2,...,e_n)$ et $(e'_1,e'_2,...,e'_n)$ deux bases de *E*.
Démonter qu'il existe un entier naturel *j* compris entre 1 et *n* au sens large tel que la famille $(e_1,\ ...,e_{n-1},e'_j)$ soit une base de *E*.

$\boxed{30}$ Soit *n* un entier naturel non nul et *K* un corps commutatif.
On note S_n l'ensemble des bijections de l'ensemble $\{1\,;2\,;...\,;n\}$ dans lui-même.
On pose $E=K^n$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel.
On note *D* la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,1,...,1)$.

On pose $H=\left\{(x_1,x_2,...,x_n)\in E\,/\,\sum_{i=1}^{n}x_i=0\right\}$.

Démontrer que les sous-espaces vectoriels *F* de *E* tels que pour tout $\sigma\in S_n$, si $(x_1,x_2,...,x_n)\in F$, alors $(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},...,x_{\sigma(n)})\in F$ sont $\{0_E\}$, *D*, *H* et *E*.
Indication : Démontrer que si un sous-espace vectoriel *F* de *E*, différent de $\{0_E\}$ et de *D*, a cette propriété de stabilité, alors $(1,-1,0,0,...,0)\in F$. On pourra utiliser les bijections particulières.

$\boxed{31}$ Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif K.
Soit $(e_1,...,e_n)$ une famille libre dans E et $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ un élément de K^n.

On pose $u=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$.

Pour tout entier naturel *i* tel que $1\leqslant i\leqslant n$, on pose $v_i=e_i+u$.

Démontrer que $(v_1,...,v_n)$ liée $\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=-1$.

$\boxed{32}$ Dans $E=\mathbb{C}^3$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel, on considère les vecteurs $a=(1+\mathrm{i},1,0)$, $b=(0,1-\mathrm{i},1)$, $c=(-2,3+\mathrm{i},2+2\mathrm{i})$.
1°) Déterminer si la famille $\mathcal{F}=\{a,b,c\}$ est libre ou liée.
2°) Déterminer son rang.

Corrigé

1 2°) $\dim(E_1\cap E_2)=\dim E_1+\dim E_2-\dim(E_1+E_2)\geqslant \dim E_1+\dim E_2-n$

$\dim(E_1\cap E_2)+\sum_{i=3}^{k}\dim E_i\geqslant \dim E_1+\dim E_2-n+\sum_{i=3}^{k}\dim E_i=\sum_{i=1}^{k}\dim E_i-n>n(k-1)-n=n(k-2)$.

On applique l'hypothèse de récurrence à $(E_1\cap E_2\,;E_3\,;...;E_n)$.

L'hypothèse de récurrence doit être formulée de manière quantifiée.
« Pour toute famille …. de sous-espaces vectoriels de E …, on a : …. .

2 **Ancienne version (autre formulation) :**

Déterminer Vect $\boldsymbol{F}$ dans l'espace vectoriel des fonctions définies sur]– 1 ; 1[à valeurs dans $\mathbb{R}$ noté $\boldsymbol{F}$ ($]-1\,;1[\,;\mathbb{R}$).

5 Détailler peut-être en donnant la base car les élèves n'arrivent jamais à trouver sinon.

8 1°) Ne pas prendre $H=F+G$. Soit $(u_1,...,u_p)$ une base de F et $(v_1,...,v_p)$ une base de G.
Pour tout entier *i* compris entre 1 et *p*, on pose $w_i=u_i+v_i$.
On pose $H=\text{Vect}(w_i)$. On vérifie que H est supplémentaire commun à F et G.

Méthode :
On démontre que $(u_1,...,u_p,u_1+v_1,...,u_p+v_p)$ est une base de E.
Pour cela, on démontre que $(u_1,...,u_p,u_1+v_1,...,u_p+v_p)$ est une famille libre de E.
On utilise la propriété suivante :
Soit $(e_1,...,e_p,e_{p+1},...,e_n)$ une base d'un espace vectoriel E de dimension *n*.
Alors les sous-espaces $\text{Vect}(e_1,...,e_p)$ et $\text{Vect}(e_{p+1},...,e_n)$ sont supplémentaires dans E.

sélection d'éléments d'une base $\longrightarrow$ 2 sous-espaces vectoriels supplémentaires

2°) Traiter dans le cas général en posant $F=F'\oplus(F\cap G)$ et $F=G'\oplus(F\cap G)$.

11 1°) non 2°) $x-y-z=0$

13 L'exercice est un cas particulier de la propriété générale :

Soit E et F deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif K.

Soit $(a_1,a_2,...,a_n)$ une famille de vecteurs de E.
Si la famille de vecteurs $(f(a_1),f(a_2),...,f(a_n))$ est libre, alors la famille $(a_1,a_2,...,a_n)$ est libre.

15 1°) La famille est liée ssi $a=0$ ou $a=1$.
Donc la famille est libre ssi $a\neq 0$ et $a\neq 1$.
2°) 1er cas : $a=0$ $u_1-u_2-u_3=0$; 2e cas : $a=1$ $u_1-u_3=0$.
3°) $z=ax+(1-a)y$

(u_1,u_2,u_3) liée $\Leftrightarrow u_3\in\text{Vect}(u_1,u_2)$ [à justifier proprement en disant que les vecteurs u_1 et u_2 forment une famille libre].

$\Leftrightarrow 1=a\times a+1\times(1-a)$

$\Leftrightarrow a^2-a=0$

Deux résultats à connaître :

Une famille de vecteurs est liée si et seulement si on peut exprimer l'un des vecteurs en fonction des autres)

Soit u_1, u_2, …, u_n des vecteurs telle que $(u_1,u_2,...,u_{n-1})$ soit libre.
$(u_1,u_2,...,u_n)$ est liée si et seulement si $u_n\in\text{Vect}(u_1,u_2,...,u_{n-1})$

18 $\lambda_0+\lambda_1\sin x+\lambda_2\sin^2 x+...+\lambda_n\sin^n x=0$

$$P=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k X^k$$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad \widetilde{P}(\sin x)=0$ donc $[-1\,;1]\subset Z(P)$

Comme $[-1\,;1]\subset Z(P)$ est infini, $Z(P)=\mathbb{R}$ donc $P=0$.

20 $G=\text{Vect}(u)$ avec $u=(1,\ 1,\ 1)$

21 $G=\text{Vect}(u)$ avec $u=(1,1,a)$

22 Utiliser la règle sur les familles de polynômes de valuations échelonnées.

25 3°) $\lambda_1 f+\lambda_2 f^2+...+\lambda_n f^n=0$

On considère le polynôme $P=\lambda_1X+\lambda_2X^2+...+\lambda_nX^n$.
On a : $\forall x\in\mathbb{R}_+\quad \widetilde{P}(f(x))=0$.

Or $f(\mathbb{R}_+)=[0\,;1[$.

Donc $\forall y\in[0\,;1[\quad \widetilde{P}(y)=0$.

26 Distinguer les cas $n=0$, $n=1$ etc.

$\boxed{30}$

Soit F un sous-espace vectoriel de E différent de $\{0_E\}$, D, H qui a cette propriété.

Comme $F \neq D$, F n'est pas inclus dans D (par l'absurde) donc il existe un vecteur $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de F dont les coordonnées ne sont pas toutes égales.
On peut supposer $x_1 \neq x_2$. En effet, il est possible de faire une permutation (c'est-à-dire que l'on applique la transposition qui échange 1 et 2).

On peut alors affirmer que $v = (x_2, x_1, ..., x_n) \in F$.

$u - v = (x_1 - x_2, x_2 - x_1, 0, ..., 0)$.
$(x_1 - x_2)^{-1}(u - v) = (1, -1, 0, ..., 0)$ (en posant $\lambda = (x_1 - x_2)^{-1}$, $\lambda(u - v) \in F$)

On en déduit que $(1, -1, 0, 0, ..., 0) \in F$.

Ensuite, par des transposition, on obtient $(1, 0, -1, 0, ..., 0) \in F$, $(1, 0, 0, -1, ..., 0) \in F$, …, $(1, 0, 0, 0, ..., -1) \in F$.

Or on vérifie aisément que les vecteurs $(1, -1, 0, 0, ..., 0)$, $(1, 0, -1, 0, ..., 0)$, $(1, 0, 0, -1, ..., 0)$, …$(1, 0, 0, 0, ..., -1)$ constituent une base de H.
Ainsi, $H \subset F$.
Par les dimensions, on en déduit que $F = H$ ou $F = E$.
Or $F \neq H$ par hypothèse et, par suite, $F = E$.
On observera que l'on n'utilise que des transpositions dans la résolution de cet exercice.

Questions de cours

$\boxed{1}$ Démontrer la propriété : « Il existe une relation de dépendance linéaire entre des vecteurs (c'est-à-dire une famille de vecteurs est liée) si et seulement si l'un est combinaison linéaire des autres ».

$\boxed{2}$ Démontrer le théorème : « Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie ».

$\boxed{3}$ Enoncer et démontrer le TBI (théorème de la base incomplète).

$\boxed{4}$ Démontrer que si A et B sont deux sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel E, alors $\dim(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \dim \mathrm{A} + \dim \mathrm{B} - \dim \mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}$.

$\boxed{5}$ Soit u_1, …, u_p p vecteurs combinaisons linéaires de q vecteurs v_1, …, v_q dans un espace vectoriel E. Démontrer que toute combinaison linéaire des u_i est combinaison linéaire des vecteurs v_i.

$\boxed{6}$ Démontrer le théorème : « Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base ».

3 preuves possibles :

- famille libre maximale
- famille génératrice minimale
- lemme de l'échange

$\boxed{8}$ Démontrer la propriété : « Dans un espace vectoriel, une famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres ».

$\boxed{9}$ **TPL (théorème du prolongement linéaire)**

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.
Existence et unicité d'une application linéaire de E dans F connaissant l'image d'une base de E.

$\boxed{10}$ **Lemme d'échange ou CDS (condition suffisante de dépendance)**
Démontrer la propriété : « Dans un espace vectoriel, toute famille de $p+1$ vecteurs combinaisons linéaires de p vecteurs est liée ».

$\boxed{11}$ Existence d'un supplémentaire pour tout sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie.

$\boxed{12}$ Base canonique de $\mathbb{K}^n$. Définition.

$\boxed{13}$ Coordonnées d'un vecteur dans une base. Formes coordonnées.

$\boxed{14}$ dim $\mathcal{L}$ (E ; F) où E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie sur un même corps commutatif K.
dim E^* où E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K.

$\boxed{15}$ dim $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ où E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie sur un même corps commutatif K.

$\boxed{16}$ Définition de la dimension d'un espace vectoriel.

$\boxed{17}$ Base duale d'une base B d'un espace vectoriel de dimension finie.

$\boxed{18}$ Soit E et F sont deux espaces vectoriels sur un même corps K commutatif.
Soit $f \in \mathcal{L}$ (E ; F). Soit $(a_1, ..., a_p)$ une famille de vecteurs de E.

Compléter :

$$\left.\begin{array}{l}(a_1, ..., a_p) \text{ libre} \\ f \text{ injective}\end{array}\right\} \Rightarrow \big(f(a_1), ..., f(a_p)\big) \text{ ....}$$

$$\left.\begin{array}{l}(a_1, ..., a_p) \text{ génératrice} \\ f \text{ surjective}\end{array}\right\} \Rightarrow \big(f(a_1), ..., f(a_p)\big) \text{ ....}$$

$\boxed{19}$ Soit A et B deux familles de vecteurs d'un espace vectoriel E.

Compléter :

$$\left.\begin{array}{l}\text{A extraite de B} \\ \text{B libre}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ ....}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{A extraite de B} \\ \text{A génératrice}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ ....}$$

$\boxed{20}$ Propriétés donnant des conditions suffisantes pour qu'une famille soit liée : famille contenant deux vecteurs égaux, familles contenant le vecteur nul.

$\boxed{21}$ Soit $\mathcal{A} = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ une famille extraite de $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_p)$.
Compléter $\mathcal{A}$ liée $\Rightarrow \dots\dots$

$\boxed{22}$ Démontrer la propriété rappelée ci-dessous.

Soit $(a_1, ..., a_p)$ une famille libre d'un espace vectoriel E sur un corps commutatif K.
Soit x un vecteur quelconque de E.
$(a_1, ..., a_p, x)$ est une famille liée $\Leftrightarrow x \in \text{Vect}(a_1, ..., a_p)$.

$\boxed{23}$ Donner la définition d'un projecteur. Noyau et image.

$\boxed{24}$ Donner la définition d'une symétrie vectorielle. Caractérisation.

$\boxed{25}$ Donner la définition d'une affinité vectorielle.

$\boxed{26}$

Théorème de juxtaposition des bases

Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$.
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie.
Soit $(e_1, ..., e_p)$ une base de F et $(f_1, ..., f_q)$ une base de G.
F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $(e_1, ..., e_p, f_1, ..., f_q)$ est une base de E.

Conséquence :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $\begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim E = \dim F + \dim G \end{cases}$.