TS

Exercices sur les probabilités conditionnelles

1 On lance une fois un dé truqué. On note le numéro de la face supérieure. L'expérience est modélisée par la loi de probabilité *P* donnée dans le tableau ci-dessous :

Résultat possible	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,1	0,1	0,1	0,1	0,3	0,3

Calculer la probabilité d'obtenir un numéro pair sachant que c'est un multiple de 3.
Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible. On nommera deux événements.

2 Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, *P*) tels que P (A) = 0,4, P (B) = 0,1 et P (B / A) = 0,05. Calculer P (A $\cap$ B) et P (A / B). Donner les résultats sous forme décimale.

3 Un échantillon de personnes comprend 55 % d'hommes et 45 % de femmes. Pour cet échantillon, 25 % des hommes et 10 % des femmes pratiquent un sport.
On interroge au hasard une personne de cet échantillon.

1°) On considère les événements
- S : « la personne pratique un sport »
- F : « la personne est une femme ».

On adopte le modèle d'équiprobabilité.
Faire un arbre de probabilité avec ces événements et leurs contraires ; compléter en mettant les probabilités correspondantes en utilisant les indications de l'énoncé au-dessus des branches.
2°) Calculer la probabilité que la personne interrogée pratique un sport.
Donner le résultat sous forme décimale.

4 On dispose d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de « pile » en un lancer soit égale à $\frac{2}{3}$.
On dispose également de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 5 boules rouges et 4 boules noires.
L'urne U_2 contient 3 boules rouges et 2 boules noires.
On lance la pièce une fois. Si elle tombe sur « pile », on choisit une boule au hasard dans l'urne U_1 ; si elle tombe « face », on choisit une boule au hasard dans l'urne U_2.
1°) Faire un arbre de probabilités en nommant deux événements.
2°) Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge. Donner le résultat en fraction irréductible.

5 Dans une population donnée, 15 % des individus sont atteints par une maladie M_1. Parmi ces derniers, 20 % ont aussi la maladie M_2. Parmi les individus non atteints par M_1, 4 % ont la maladie M_2.
On choisit un individu au hasard.
1°) Faire un arbre de probabilités.
2°) Calculer la probabilité que cet individu soit atteint par la maladie M_2.
Donner le résultat en écriture décimale.

6 Une urne U_1 contient *n* boules blanches et 10 boules noires ($n \in \mathbb{N}^*$).
Une urne U_2 contient une boule blanche et une boule noire.
On tire au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans l'urne U_2. On tire ensuite une boule dans l'urne U_2.

1°) Faire un arbre de probabilités. Raisonner sur la composition de l'urne U_2 après le tirage dans l'urne U_1.
2°) Calculer la probabilité p_n pour que cette dernière boule soit blanche.
3°) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

7 **Test médical**
On suppose qu'un sujet, venant consulter dans un service hospitalier donné, a la probabilité 0,3 d'être atteint d'une certaine maladie.
Chaque sujet subit un test.
On sait que :
- si un sujet n'est pas malade, 9 fois sur 10 la réponse au test est négative ;
- s'il est malade, 8 fois sur 10 la réponse est positive.

1°) Faire un arbre de probabilité avec les événements suivants :
M : « le sujet est malade » ; T : « le test est positif ».
2°) Quelle est la probabilité pour un sujet d'avoir une réponse positive au test ?
Donner le résultat sous forme décimale.
3°) Si le test est positif, quelle est la probabilité que le sujet soit malade ?
Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

8 Un artisan est contacté à domicile par ses clients sur appel téléphonique. Il dispose d'un répondeur. Lorsque l'artisan est absent, il branche systématiquement le répondeur ; lorsqu'il est présent, il le branche une fois sur trois.
Lorsqu'un client téléphone, il tombe quatre fois sur cinq sur le répondeur.
Un client téléphone à l'artisan.
On définit les événements A : « l'artisan est présent » et R : « le client obtient le répondeur ».
1°) Exprimer P (R) en fonction de P (A) ; en déduire P (A).
2°) Sachant que le client obtient le répondeur, déterminer la probabilité que l'artisan soit présent.

Donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

9 Une étude statistique sur un groupe de sportifs a permis d'estimer qu'en période de compétition, pour un sportif pris au hasard dans ce groupe, la probabilité d'être déclaré positif au contrôle anti-dopage est 0,02. La prise d'un médicament peut influencer le résultat du contrôle.
Ce médicament est pris par 25 % des sportifs du groupe.
Pour un sportif qui utilise ce médicament la probabilité d'être déclaré positif est 0,05.
On considère les événements M : « le sportif utilise le médicament » et T : « le sportif est déclaré positif ».
1°) Donner P (T), P (M) et $P\left(\mathrm{T}/\mathrm{M}\right)$ (sans faire de calcul).
2°) Calculer $P\left(\mathrm{M}\cap\mathrm{T}\right)$.
3°) Calculer $P\left(\overline{\mathrm{M}}\cap\mathrm{T}\right)$; en déduire $P\left(\mathrm{T}/\overline{\mathrm{M}}\right)$.
On donnera tous les résultats sous forme décimale.

10 La proportion de pièces défectueuses dans un lot est égale 0,04.
Le contrôle de fabrication des pièces est tel que :
- si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité de 0,97 ;
- si elle est mauvaise, elle refusée avec la probabilité 0,98.

On prend au hasard une pièce et on la contrôle.
1°) Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle. Donner le résultat sous forme décimale.
2°) Calculer la probabilité qu'une pièce acceptée soit mauvaise.
Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

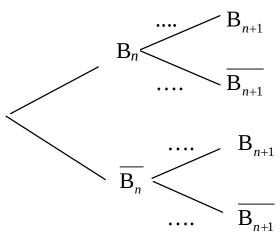
11 On lance une fois un dé non truqué. On considère les événements
A : « obtenir un numéro pair » et B : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 4 ».
Les événements sont-ils indépendants ?

12 Soit A et B deux événements indépendants d'un espace probabilisé (Ω, *P*) tels que P (A) = 0,1 et P (B) = 0,5.
Calculer $P\left(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\right)$. Donner le résultat sous forme décimale.

13 Deux chasseurs tirent simultanément sur une cible. Le premier a 80 % de chances de l'atteindre ; le deuxième a 70 % de chances de l'atteindre.

Quelle est la probabilité
1°) que la cible soit atteinte par au moins l'un des deux chasseurs ?
2°) qu'aucun chasseur n'atteigne la cible ?
Indication :
Considérer les événements A : « le premier chasseur atteint la cible » et B : « le deuxième chasseur atteint la cible ». On notera que les événements A et B sont indépendants.
Donner chaque résultat sous forme décimale.

14 Dans un pays imaginaire, à la suite d'un dérèglement climatique, le temps évolue de la manière suivante.
On admet qu'un jour donné soit il fait beau, soit il pleut.
S'il fait beau un jour, alors il fera beau le jour suivant avec la probabilité $\frac{1}{2}$. S'il pleut un jour, alors il pleuvra encore le lendemain avec une probabilité $\frac{2}{3}$.
Aujourd'hui, il pleut. On s'intéresse à la probabilité qu'il fasse beau demain, dans 2 jours, dans 3 jours … dans n jours.
Pour $n \geq 1$, on désigne par B_n l'événement « il fera beau dans n jours ».
1°) Donner, pour $n \geq 1$, les valeurs de $P_{\mathrm{B}_n}\left(\mathrm{B}_{n+1}\right)$ et $P_{\overline{\mathrm{B}_n}}\left(\mathrm{B}_{n+1}\right)$.
Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en complétant les valeurs des probabilités pour les pointillés (on ne mettra rien sur les deux branches qui partent du nœud de base)



2°) Etablir que, pour $n \geq 1$, on a : $P\left(\mathrm{B}_{n+1}\right) = \frac{1}{6} P\left(\mathrm{B}_n\right) + \frac{1}{3}$.
3°) On pose désormais, pour $n \geq 1$, $p_n = P\left(\mathrm{B}_n\right)$ et $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.
a) Déterminer la nature de la suite $\left(u_n\right)$.
b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n pour $n \geq 1$.
c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Comment peut-on interpréter ce résultat ?

15 Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires.
On tire une boule au hasard dans l'urne puis, sans la remettre dans l'urne, on en tire une deuxième au hasard.
Calculer la probabilité des événements suivants en utilisant les probabilités conditionnelles (faire un arbre de probabilité) :
A : « les deux boules sont blanches »
B : « les deux boules sont noires »
C : « les deux boules sont de la même couleur »
D : « les deux boules sont de couleurs différentes ».
Donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

16 Une urne contient deux boules rouges et deux boules noires.
On tire successivement deux boules avec remise.
Calculer la probabilité des événements suivants en utilisant les probabilités conditionnelles (faire un arbre de probabilité) :
A : « obtenir deux boules de la même couleur » et B : « obtenir au moins une boule rouge ».

17 Un sac contient 5 jetons marqués avec les lettres M, A, R, I, E. On tire deux jetons au hasard successivement sans remise.
Calculer la probabilité des événements suivants en utilisant les probabilités conditionnelles (faire un arbre de probabilité) :
E_1 : « obtenir deux voyelles » ;
E_2 : « obtenir deux consonnes » ;
E_3 : « obtenir une voyelle et une consonne (dans n'importe quel ordre) ».
Donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Corrigé

1 N.B. On ne peut pas trouver cette probabilité conditionnelle de manière intuitive car on n'est pas dans une situation d'équiprobabilité.

On utilise la définition : $P(\text{A}/\text{B}) = \dfrac{P(\text{A} \cap \text{B})}{P(\text{B})}$.

(On applique la formule sans se poser de question sur le « sachant que » dans cette situation).

On définit les événements A : « le numéro obtenu est pair » et B : « le numéro obtenu est un multiple de 3 ».

$P(\text{B}) = P(3) + P(6) = 0{,}4$

Pour calculer la probabilité de A ∩ B, il n'y a pas de formule.

On va d'abord définir A ∩ B puis on cherche les résultats qui correspondent à cet événement.

A ∩ B : « obtenir un numéro pair <u>et</u> multiple de 3 »

Un seul résultat correspond à A ∩ B : 6.

$P(\text{A} \cap \text{B}) = P(6) = 0{,}3$

$$P(\text{A}/\text{B}) = \frac{P(\text{A} \cap \text{B})}{P(\text{B})} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = \frac{3}{4}$$

On peut aussi écrire : $P_{\text{B}}(\text{A}) = \dfrac{3}{4}$.

2 On utilise la formule des probabilités composées.

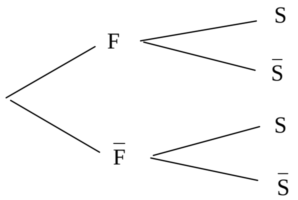
$P(\text{A} \cap \text{B}) = P(\text{A}) \times P(\text{B}/\text{A}) = 0{,}02$

$$P(\text{A}/\text{B}) = \frac{P(\text{A} \cap \text{B})}{P(\text{B})} = \frac{0{,}02}{0{,}1} = 0{,}2$$

3 1°) Inutile de définir les événements $\overline{\text{F}}$ et $\overline{\text{S}}$ contraires de F et S.

S : « la personne pratique un sport »

F : « la personne est une femme »



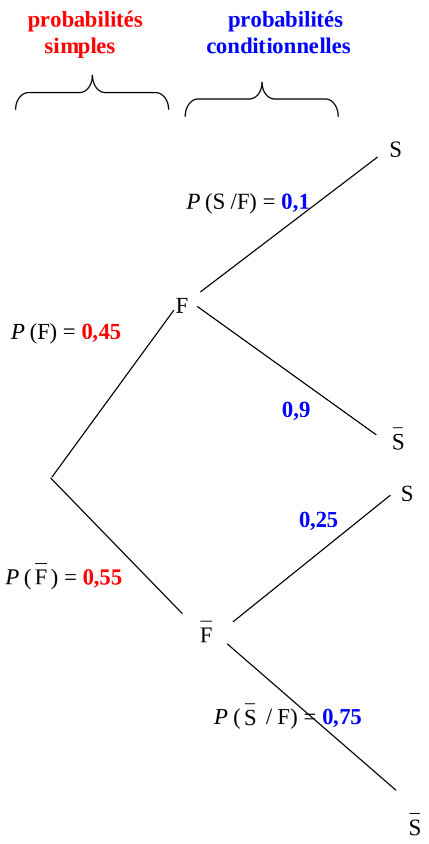
Compléter avec les probabilités écrites sous forme décimale (lorsque les probabilités sont calculées à partir de pourcentages, on donne les résultats sous forme décimale).

$P(\text{F}) = \dfrac{45}{100} = 0{,}45$

$P(\overline{\text{F}}) = 0{,}55$

$P(\text{S}/\overline{\text{F}}) = 0{,}25$

$P(\text{S}/\text{F}) = 0{,}1$



Attention à la lecture de l'énoncé :

● L'énoncé dit : « Un échantillon de personnes comprend 55 % d'hommes et 45 % de femmes. »
Ces deux informations fournissent des **probabilités simples**.

● L'énoncé dit : « Pour cet échantillon, 25 % des hommes et 10 % des femmes pratiquent un sport. »
Ces deux informations fournissent des **probabilités conditionnelles**.

2°) On écrit que les événements F et $\overline{\text{F}}$ constituent un système complet d'événements et l'on applique la formule des probabilités totales :

$$P(\text{S}) = P(\text{S} \cap \text{F}) + P(\text{S} \cap \overline{\text{F}})$$

$$= \underline{P(\text{F})} \times \underline{P(\text{S} / \text{F})} + \underline{P(\overline{\text{F}})} \times \underline{P(\text{S} / \overline{\text{F}})}$$

$$= 0{,}45 \times 0{,}1 + 0{,}55 \times 0{,}25$$

$$= 0{,}1825$$

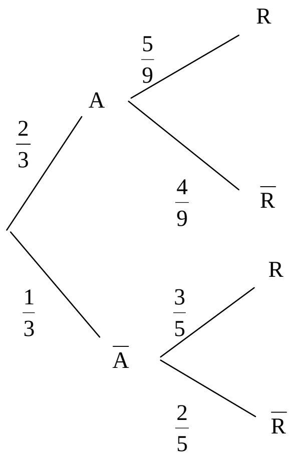
L'événement « la personne pratique un sport » est la réunion des événements

« la personne pratique un sport <u>et</u> est une femme » et « la personne pratique un sport <u>et</u> est un homme ».

$\boxed{4}$ 1°) **Arbre de probabilité**

A : « la pièce tombe sur pile »
R : « la boule tirée est rouge »

On effectue un arbre dans lequel on met les probabilités sous forme fractionnaire.



2°) **Calculons *P* (R).**

Les événements A et $\overline{\text{A}}$ constituent un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(\text{R}) = P(\text{R} \cap \text{A}) + P(\text{R} \cap \overline{\text{R}})$$

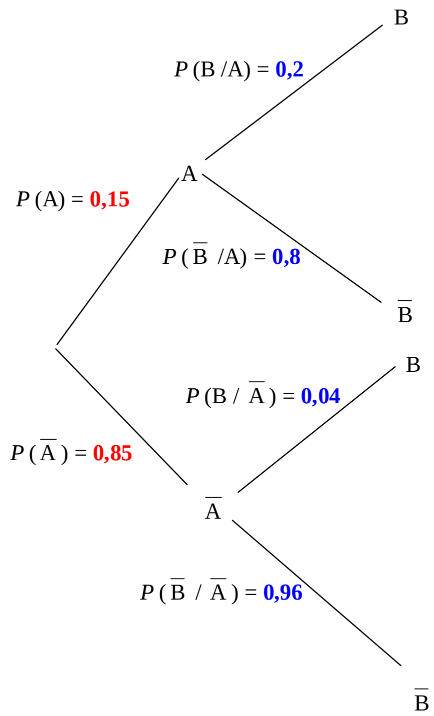
$$= P(\text{S}) \times P(\text{R} / \text{S}) + P(\overline{\text{S}}) \times P(\text{R} / \overline{\text{S}})$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{5}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{77}{135}$$

$\boxed{5}$ 1°) On définit les événements

A : « l'individu est atteint par la maladie M_1 »
B : « l'individu est atteint par la maladie M_2 »



2°) Les événements A et $\overline{A}$ constituent un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$$
$$= P(A) \times P(B / A) + P(\overline{A}) \times P(B / \overline{A})$$
$$= 0{,}15 \times 0{,}2 + 0{,}85 \times 0{,}04$$
$$= 0{,}064$$

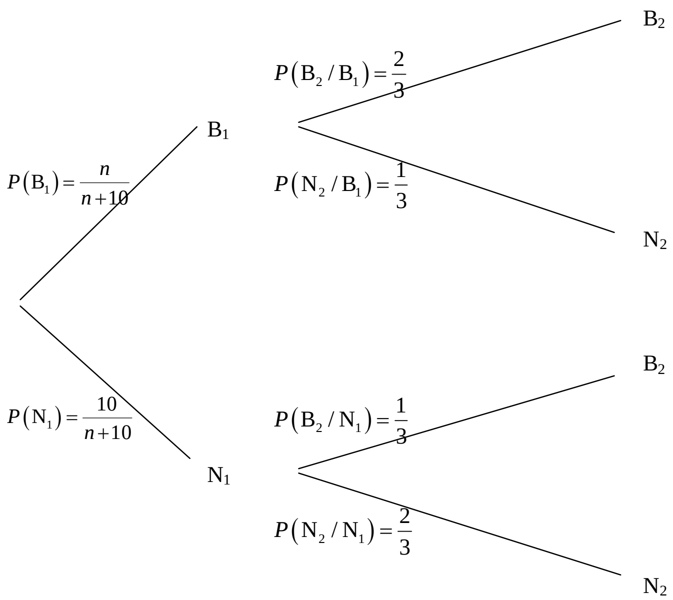
Conclusion : $P(B) = 0{,}064$

$\boxed{\mathbf{6}}$ 1°) Définir les événements

- B_1 : « la boule tirée au premier tirage dans l'urne U_1 est blanche »
- N_1 : « la boule tirée au premier tirage dans l'urne U_1 est noire »
- B_2 : « la boule tirée au deuxième tirage dans l'urne U_2 est blanche »
- N_2 : « la boule tirée au deuxième tirage dans l'urne U_2 est noire »

On adopte le modèle d'équiprobabilité ; réfléchir pour les probabilités conditionnelles que l'on doit mettre dans l'arbre.

Probabilités simples **Probabilités conditionnelles**



Remarque : Pourquoi on « fait » 4 événements ?
On pourrait n'en faire que 2 (avec les contraires).
C'est bon avec 2.
Mais c'est plus parlant avec B_1, N_1, B_2, N_2.

Si on a tiré une boule blanche dans l'urne U_1, alors cette boule est placée dans l'urne U_2.
Donc l'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.

Si on a tiré une boule noire dans l'urne U_1, alors cette boule est placée dans l'urne U_2.
Donc l'urne U_2 contient 1 boule blanche et 2 boules noires.

Dans les deux cas, l'urne U_2 contient toujours 3 boules.

2°) On doit calculer $p_n = P(B_2)$.

Les événements B_1 et N_1 constituent un système complet d'événements.
Donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$p_n = P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap N_1)$$
$$= P(B_1) \times P(B_2/B_1) + P(N_1) \times P(B_2/N_1)$$
$$= \frac{2}{3} \times \frac{n}{n+10} + \frac{1}{3} \times \frac{10}{n+10}$$
$$= \frac{2n+10}{3(n+10)}$$

3°) Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n+10}{3(n+10)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}$$

Lorsque le nombre de boules blanches tend vers $+\infty$, la probabilité de tirer une boule blanche au 2^e^ tirage tend vers $\dfrac{2}{3}$.

Comment peut-on expliquer le résultat ?

Lorsque le nombre de boules blanches n tend vers $+\infty$, on est quasiment sûr de tirer une boule blanche dans l'urne U_1 et ainsi, on est quasiment sûr de tirer une boule blanche dans une urne qui contient 2 boules blanche et une probabilité de tirer une boule blanche au 2^e^ tirage tend vers $\dfrac{2}{3}$.

Version plus simple du $\boxed{6}$:

Une urne U_1 contient n boules blanches et 10 boules noires ($n \in \mathbb{N}^*$).
Une urne U_2 contient une boule blanche et une boule noire.
On tire au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans l'urne U_2. On tire ensuite une boule dans l'urne U_2.
1°) Faire un arbre de probabilités à l'aide des événements
- B_1 : « la boule tirée au premier tirage dans l'urne U_1 est blanche »
- N_1 : « la boule tirée au premier tirage dans l'urne U_1 est noire »
- B_2 : « la boule tirée au deuxième tirage dans l'urne U_2 est blanche »
- N_2 : « la boule tirée au deuxième tirage dans l'urne U_2 est noire »

Si on a tiré une boule blanche dans l'urne U_1, alors cette boule est placée dans l'urne U_2.
Donc l'urne U_2 contient …….. boules blanches et …….. boule noire.

Si on a tiré une boule noire dans l'urne U_1, alors cette boule est placée dans l'urne U_2.
Donc l'urne U_2 contient …….. boule blanche et …….. boules noires.

2°) Calculer la probabilité p_n pour que cette dernière boule soit blanche.
3°) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

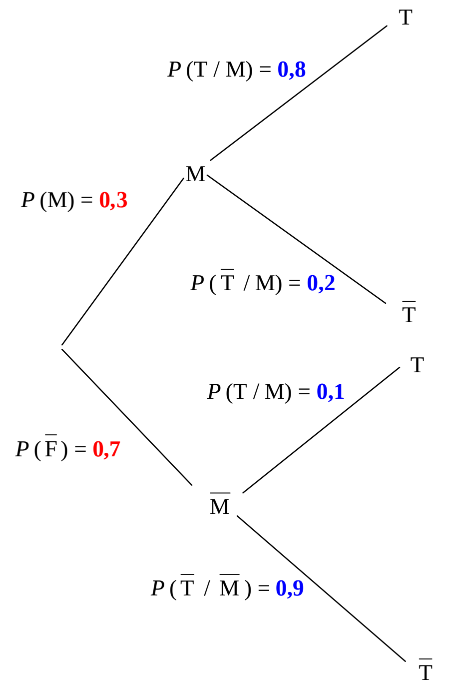
$\boxed{7}$ 1°) Faire un arbre en faisant figurer les probabilités sous forme décimale.
2°) $P(\text{T}) = 0{,}31$ 3°) $P(\text{M} / \text{T}) = \dfrac{24}{31}$

Solution détaillée :

1°) **Arbre pondéré**

M : « Le sujet est malade »

T : « Le test est positif »



2°) **Calculons la probabilité pour un sujet d'avoir une réponse positive au test.**

Les événements M et $\overline{\text{M}}$ constituent un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(\text{T}) = P(\text{T} \cap \text{M}) + P(\text{T} \cap \overline{\text{M}})$$
$$= P(\text{M}) \times P(\text{T} / \text{M}) + P(\overline{\text{M}}) \times P(\text{T} / \overline{\text{M}})$$
$$= 0{,}3 \times 0{,}8 + 0{,}7 \times 0{,}1$$
$$= 0{,}31$$

Conclusion : $P(\text{T}) = 0{,}31$

3°) **Calculons la probabilité que le sujet est malade sachant que le test est positif.**

D'après la définition du cours, donc $P(\text{M} / \text{T}) = \dfrac{P(\text{M} \cap \text{T})}{P(\text{T})}$

$$= \frac{0{,}3 \times 0{,}8}{0{,}31}$$
$$= \frac{24}{31}$$

$\boxed{8}$ 1°) Bien lire l'énoncé pour le traduire en probabilités : $P(\text{R})=\frac{4}{5}$; $P(\text{R}/\overline{\text{A}})=1$; $P(\text{R}/\text{A})=\frac{1}{3}$ (les deux dernières probabilités sont des probabilités conditionnelles).

On utilise la formule des probabilités totales.

$$P(\text{R})=P(\text{R}\cap\text{A})+P(\text{R}\cap\overline{\text{A}})$$
$$P(\text{R})=P(\text{R}/\text{A})\times P(\text{A})+P(\text{R}/\overline{\text{A}})\times P(\overline{\text{A}})$$
$$P(\text{R})=\frac{1}{3}\times P(\text{A})+1\times P(\overline{\text{A}})$$
$$P(\text{R})=\frac{1}{3}\times P(\text{A})+1-P(\text{A})$$ (on utilise la propriété : $P(\overline{\text{A}})=1-P(\text{A})$)
$$P(\text{R})=1-\frac{2}{3}P(\text{A})$$
$$P(\text{A})=\frac{3}{10}$$

2°) On utilise la formule de définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P(\text{A}/\text{R})=\frac{P(\text{R}\cap\text{A})}{P(\text{R})}=\frac{P(\text{R}/\text{A})\times P(\text{A})}{P(\text{R})}=\ldots=\frac{1}{8}$$

$\boxed{9}$ On ne fait pas d'arbre dans cet exercice (on peut faire un arbre, ça permet de comprendre mais il y a des branches pour lesquelles on ne peut rien mettre).
Attention, ce n'est pas le médicament qui sert au dopage du sportif mais c'est la prise du médicament qui influe sur le résultat du test.

1°) Donnons P (T), P (M) et P (T / M).

Il s'agit d'une simple traduction d'énoncé ; il n'y a aucun calcul à faire.
L'énoncé de cette 1ère question dit bien « donner » et non « calculer ».
$P(\text{T})=0{,}02$; $P(\text{M})=0{,}25$; $P(\text{T/M})=0{,}05$ (N.B. : il peut sembler surprenant d'avoir un test pour lequel la probabilité qu'une personne prenant le médicament ait un test positif soit si faible.)

2°) Calculons P (M $\cap$ T).

On fait cette fois un calcul.

D'après la formule des probabilités composées :

$$P(\text{M}\cap\text{T})=P(\text{M})\times P(\text{T/M})$$
$$=0{,}25\times0{,}05$$
$$=0{,}125$$

3°) Calculons $P(\overline{\text{M}}\cap\text{T})$ et déduisons-en $P(\text{T}/\overline{\text{M}})$.

D'après la formule des probabilités totales, on a : $P(\text{M}\cap\text{T})+P(\overline{\text{M}}\cap\text{T})=P(\text{T})$

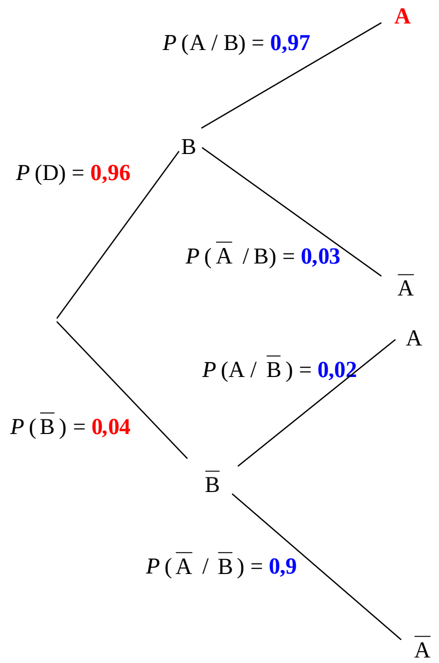
d'où $P(\overline{\text{M}}\cap\text{T})=P(\text{T})-P(\text{M}\cap\text{T})$
$= 0{,}02 - 0{,}0125$
$= 0{,}0075$

D'après la définition d'une probabilité conditionnelle, on a :

$$P(\text{T}/\overline{\text{M}})=\frac{P(\text{T}\cap\overline{\text{M}})}{P(\overline{\text{M}})}.$$
$$=\frac{0{,}0075}{0{,}75}$$
$$=0{,}01$$

$\boxed{10}$ On considère les événements

B : « la pièce est bonne » ;
A : « la pièce est acceptée ».



1°) **Calculons la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.**

On note E l'événement : « Il y a une erreur de contrôle ».
Il y a une erreur de contrôle dans les deux cas suivants :
- la pièce est défectueuse et a été acceptée ;
- la pièce n'est pas défectueuse et n'a pas été acceptée.

La probabilité de E est égale à la probabilité que la pièce soit bonne et refusée plus la probabilité que la pièce soit mauvaise et acceptée (attention à la formulation, il s'agit bien de « et » qui se traduisent par des intersections et non de « sachant »).

$$\mathrm{E} = \left(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}\right) \cup \left(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}\right)$$

Les événements $\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}$ et $\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}$ sont incompatibles (car A et $\overline{\mathrm{A}}$ sont incompatibles ou B et $\overline{\mathrm{B}}$ sont incompatibles).

Une pièce ne peut être à la fois
- défectueuse et acceptée

et

- non défectueuse et rejetée

(C'est du simple bon sens).

$$\begin{aligned} P(\mathrm{E}) &= P\left(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}\right) + P\left(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}\right) \\ &= P\left(\mathrm{A}/\overline{\mathrm{B}}\right) \times P\left(\overline{\mathrm{B}}\right) + P\left(\overline{\mathrm{A}}/\mathrm{B}\right) \times P(\mathrm{B}) \\ &= 0{,}02 \times 0{,}04 + 0{,}03 \times 0{,}96 \\ &= 0{,}296 \end{aligned}$$

2°) Le texte demande : « calculer la probabilité qu'une pièce acceptée soit mauvaise ».
On regarde parmi les pièces acceptées celles qui sont mauvaises.
On doit calculer la probabilité qu'une pièce soit mauvaise sachant qu'elle a été acceptée (et pas le contraire !).

Il s'agit de calculer une probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned} P\left(\overline{\mathrm{B}}/\mathrm{A}\right) &= \frac{P\left(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}\right)}{P(\mathrm{A})} \\ &= \frac{P\left(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}\right)}{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + P\left(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}\right)} \\ &= \frac{P\left(\mathrm{A}/\overline{\mathrm{B}}\right) \times P\left(\overline{\mathrm{B}}\right)}{P(\mathrm{A}/\mathrm{B}) \times P(\mathrm{B}) + P\left(\mathrm{A}/\overline{\mathrm{B}}\right) \times P\left(\overline{\mathrm{B}}\right)} \\ &= \frac{0{,}04 \times 0{,}02}{0{,}932} \\ &= \frac{0{,}0008}{0{,}932} \\ &= \frac{8}{9320} \\ &= \frac{1}{1165} \end{aligned}$$

On calcule à part $P(\mathrm{A}) = 0{,}96 \times 0{,}97 + 0{,}04 \times 0{,}02 = 0{,}932$ grâce à la formule des probabilités totales (principe de séparation des calculs).

$\boxed{11}$ Cherchons si les événements A : « obtenir un numéro pair » et B : « obtenir un numéro inférieur supérieur ou égal à 4 » sont indépendants.

Il faut dire que l'on est dans un cas d'équiprobabilité.
On modélise l'expérience aléatoire par la loi d'équiprobabilité *P*.

$$P(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\mathrm{B}) = \frac{2}{3}$$

A ∩ B : « obtenir un numéro pair inférieur ou égal à 4. »

$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{2\,;4\}$ (accolades d'ensembles)

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B}) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$ donc A et B sont indépendants pour la loi *P* (ce résultat ne découle pas du bon sens, il n'y a que le calcul qui nous le montre).

Autre méthode :

$P(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (parmi les 4 numéros inférieurs ou égaux à 4, il y en a 2 qui sont pairs) et $P(\mathrm{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
On constate que $P(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = P(\mathrm{A})$. Par suite, A et B sont indépendants pour la loi *P*.

Même raisonnement avec $P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = \frac{2}{3}$ et $P(\mathrm{B}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

$\boxed{12}$ Calculons *P* (A ∪ B).

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

Or A et B sont indépendants donc $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B})$.

Par suite, $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B}) = 0{,}55$

$\boxed{13}$ 1°) On considère l'événement **E : « la cible est atteinte par au moins l'un des deux chasseurs ».**

L'événement E est réalisé lorsque :
- le 1er chasseur atteint la cible et le 2^{e} chasseur n'atteint pas la cible ;
- le 1er chasseur n'atteint pas la cible et le 2^{e} chasseur atteint la cible ;
- le 1er chasseur atteint la cible et le 2^{e} chasseur atteint la cible.

Dans les deux premiers cas, la cible est atteinte par un seul des deux chasseurs ; dans le 3^{e} cas, la cible est atteinte par les deux chasseurs.
Dans tous les cas, la cible est atteinte soit par 1 soit par 2 chasseurs donc par au moins un chasseur.

L'événement E est la réunion des événements A et B.

$\mathrm{E} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$

Donc $P(\mathrm{E}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

Or A et B sont des événements indépendants.

Donc $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B})$

$P(\mathrm{E}) = 0,8 + 0,7 - 0,8 \times 0,7$
$\quad = 0,94$

2°) **F : « aucun chasseur n'atteigne la cible »**

F est l'événement contraire de E.
$\mathrm{F} = \overline{\mathrm{E}}$

$P(\mathrm{F}) = P\left(\overline{\mathrm{E}}\right) = 1 - P(\mathrm{E}) = 0,06$

Commentaire :

La difficulté dans ce type d'exercice est d'exprimer les événements E et F en fonction des événements A et B.

$\boxed{14}$ Attention, dans cet exercice, la notation $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ désigne $P(\mathrm{A}/\mathrm{B})$.

1°) $P_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{B}_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$; $P_{\overline{\mathrm{B}_n}}(\mathrm{B}_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$.

2°) B_n et $\overline{\mathrm{B}_n}$ constituent un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$P(\mathrm{B}_{n+1}) = P(\mathrm{B}_{n+1} \cap \mathrm{B}_n) + P\left(\mathrm{B}_{n+1} \cap \overline{\mathrm{B}_n}\right)$.

(en effet, pour tout événement A, on a : $P(\mathrm{B}_{n+1}) = P(\mathrm{B}_{n+1} \cap \mathrm{A}) + P\left(\mathrm{B}_{n+1} \cap \overline{\mathrm{A}}\right)$; on choisit ici $\mathrm{A} = \mathrm{B}_n$)

$P(\mathrm{B}_{n+1}) = P(\mathrm{B}_n) \times P(\mathrm{B}_{n+1}/\mathrm{B}_n) + P\left(\overline{\mathrm{B}_n}\right) \times P\left(\mathrm{B}_{n+1}/\overline{\mathrm{B}_n}\right)$

$P(\mathrm{B}_{n+1}) = P(\mathrm{B}_n) \times \dfrac{1}{2} + P\left(\overline{\mathrm{B}_n}\right) \times \dfrac{1}{3}$

$P(\mathrm{B}_{n+1}) = P(\mathrm{B}_n) \times \dfrac{1}{2} + \left[1 - P(\mathrm{B}_n)\right] \times \dfrac{1}{3}$

(en effet, d'après la règle donnant la probabilité d'un événement contraire, pour tout événement A, on a :
$P\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 1 - P(\mathrm{A})$; on choisit ici $\mathrm{A} = \mathrm{B}_n$)

$P(\mathrm{B}_{n+1}) = P(\mathrm{B}_n) \times \dfrac{1}{2} + \left[1 - P(\mathrm{B}_n)\right] \times \dfrac{1}{3}$

$P(\mathrm{B}_{n+1}) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} P(\mathrm{B}_n)$

2°) $P(\mathrm{B}_{n+1}) = p_{n+1}$; $P(\mathrm{B}_n) = p_n$.

Donc $p_{n+1} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} p_n$.

a) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{2}{5}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} p_n - \frac{2}{5} \\
&= \frac{1}{6} p_n - \frac{1}{15} \\
&= \frac{1}{6}\left(p_n - \frac{2}{5}\right) \\
&= \frac{1}{6} u_n
\end{aligned}$$

(u_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{6}$.

Calculons le premier terme :

$p_1 = P(\mathrm{B}_1) = 0$ car l'énoncé nous dit qu'il pleut le 1er jour donc l'événement B_1 (« il fait beau le 1er jour ») est l'événement impossible.

(S'il avait fait beau le 1er jour, on aurait eu : $p_1 = P(\mathrm{B}_1) = 1$).

Donc $u_1 = 0 - \dfrac{2}{5} = -\dfrac{2}{5}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = u_1 \times q^{n-1} = -\dfrac{2}{5} \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$

Or $u_n = p_n - \dfrac{2}{5}$ donc $p_n = u_n + \dfrac{2}{5}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_n = \dfrac{2}{5}\left(1 - \dfrac{1}{6^{n-1}}\right)$

c) 6 > 1 donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 6^{n-1} = +\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{2}{5}$

La probabilité qu'il fasse beau le n-ième jour tend vers $\frac{2}{5}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Les exercices $\boxed{\textbf{15}}$, $\boxed{\textbf{16}}$, $\boxed{\textbf{17}}$ sont des exercices que l'on a déjà fait mais que l'on revoit avec les probabilités conditionnelles.
Il s'agit de l'application des probabilités conditionnelles à des tirages successifs.
Il faut mentionner à chaque fois qu'il y a équiprobabilité.

$\boxed{\textbf{15}}$ On nomme A_1, B_1, A_2, B_2 les événements.
On peut aussi utiliser les événements contraires.

On peut écrire $C = A \cup B$ et A et B sont incompatibles.

Donc $P(C) = P(A) + P(B)$.

$\boxed{\textbf{16}}$ A : « obtenir deux boules de la même couleur »
B : « obtenir au moins une boule rouge »

On peut aussi utiliser l'événement contraire.