Exercices sur les polynômes

1 Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4-5z^3+6z^2-5z+1=0$ (E).

1°) Démontrer que 0 n'est pas solution de (E) ; en déduire que l'équation (E) est équivalente à l'équation $z^2-5z+6-\dfrac{5}{z}+\dfrac{1}{z^2}=0$ (E′) (c'est-à-dire que (E) a les mêmes solutions que (E′)).

2°) Résoudre (E′) en utilisant le changement d'inconnue $Z=z+\dfrac{1}{z}$; en déduire les solutions de (E).

2

Partie A

On considère un polynôme $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0$ où a_0, a_1, …, a_n sont des réels ($a_n\neq 0$) et $z\in\mathbb{C}$.

1°) Comparer $\overline{P(z)}$ et $P(\overline{z})$.

2°) En déduire que si z_0 est une racine de $P(z)$, alors $\overline{z_0}$ est aussi une racine de $P(z)$.

Partie B

On considère le polynôme $f(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$.

1°) Démontrer que $\mathrm{i}\sqrt{3}$ est une racine de $f(z)$; en déduire sans calcul une autre racine de $f(z)$.

2°) Déterminer un polynôme $g(z)$ tel que pour tout nombre complexe z on ait $f(z)=(z^2+3)g(z)$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$ (E).

4°) Soit A, B, C, D les point du plan complexe $\boldsymbol{P}$ dont les affixes sont les solutions de (E).
Démontrer que A, B, C, D sont situés sur un même cercle dont on donnera le centre et le rayon.

3

Partie A

On considère un polynôme $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0$ où a_0, a_1, …, a_n sont des réels ($a_n\neq 0$) et $z\in\mathbb{C}$.

1°) Comparer $\overline{P(z)}$ et $P(\overline{z})$.

2°) En déduire que si z_0 est une racine de $P(z)$, alors $\overline{z_0}$ est aussi une racine de $P(z)$.

Partie B

On considère le polynôme $f(z)=z^4-6z^3+23z^2-34z+26$.

1°) Démontrer que $\alpha_1=1+\mathrm{i}$ est une racine de $f(z)$; en déduire sans calcul une autre racine α_2 de $f(z)$.

2°) Déterminer un polynôme $g(z)$ dont les racines sont α_1 et α_2.

3°) Déterminer un polynôme $h(z)$ tel que pour tout nombre complexe z on ait $f(z)=g(z)h(z)$.

4°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$.

4 1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2+\left(1-\sqrt{2}\right)Z-\sqrt{2}=0$.

2°) On considère le polynôme $P(z)=z^4+\left(1-\sqrt{2}\right)z^3+\left(2-\sqrt{2}\right)z^2+\left(1-\sqrt{2}\right)z+1$.

a) Soit $z\in\mathbb{C}^*$. On pose $Z=z+\dfrac{1}{z}$.

Exprimer le quotient $\dfrac{P(z)}{z^2}$ en fonction de Z.

b) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z)=0$ (1).

3°) Soit A, B, C, D les point images des solutions de (1) dans le plan complexe $\boldsymbol{P}$ choisis de telle sorte que le quadrilatère ABCD soit convexe.
Démontrer que A, B, C, D sont situés sur un même cercle.
Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

4°) En adaptant la méthode décrite à la question 2°), résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4+2z^3-5z^2-2z+1=0$ (2).

5 On considère le polynôme $f(z)=z^4-6z^3+23z^2-34z+26$.

On note (E) l'équation $f(z)=0$.

1°) On pose $g(z)=\dfrac{f(z)}{z^2}$ et on note (E′) l'équation $g(z)=0$.

Démontrer que (E) et (E′) sont équivalentes.

2°) Résoudre l'équation (E′) dans $\mathbb{C}$ en utilisant le changement d'inconnue $Z=z+\dfrac{1}{z}$.

6 Déterminer les polynômes P à coefficients réels tels que $P=(P')^2$.

7 Le but de l'exercice est de déterminer les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $(X+4)\hat{P}(X)=X\hat{P}(X+1)$.

1°) Déterminer quatre racines de P ; en déduire qu'il existe un polynôme $\hat{P}(X)=\hat{R}(X)\prod_{k=0}^{3}(X+k)$.

2°) Démontrer que $R(X+1)=R(X)$; en déduire R.

3°) Conclure.

8 Soit a un réel non nul et P un polynôme tel que, pour tout réel x, on ait : $\tilde{P}(x+a)=\tilde{P}(x)$.
Le but de l'exercice est de démontrer que P est un polynôme constant.
Soit Q le polynôme défini par $Q(X)=P(X)-\tilde{P}(0)$.

1°) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\tilde{Q}(na)=0$.

2°) Conclure.

9 Déterminer les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\hat{P}(X^2)=(X^2+1)\times\hat{P}(X)$.

10 Soit n un entier naturel non nul.

On considère le polynôme $P=(X+1)^n-(X-1)^n$.

1°) Déterminer le degré de P.

2°) Déterminer les racines de P dans $\mathbb{C}$.

11 Calculer la somme et le produit des racines n-ièmes de l'unité en utilisant un polynôme $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$.

12 Soit A un polynôme non nul, à coefficients dans un corps commutatif $\mathbb{K}$ de degré n.

On pose $A=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

On appelle **polynôme réciproque** de A le polynôme A^*, dont les coefficients sont ceux de A, lus dans l'ordre inverse. On a donc : $A^*=\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k$

1°) Que peut-on dire du degré de A^* ? À quelle condition a-t-on $(A^*)^*=A$?

2°) Quel est l'ensemble des polynômes A de $\mathbb{K}[X]$ tels que le polynôme A^* soit constant ?

3°) Démontrer que, pour tout couple (A, B) de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$, on a : $(AB)^*=A^*B^*$.

4°) Démontrer que, si A est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$, alors A^* l'est aussi. La réciproque est-elle vraie ?

5°) Déterminer les racines du polynôme A^* en fonction de celles de A.

13 **Localisation des racines d'une équation**

Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $(n+1)$ nombres complexes tels que $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$ (n entier naturel fixé).

On considère l'équation $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ (E), d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

On pose $\mathrm{M}=\max\left(\left|\frac{a_1}{a_0}\right|;\left|\frac{a_2}{a_0}\right|;\ldots;\left|\frac{a_n}{a_0}\right|\right)$.

Le but de l'exercice est de démontrer que toutes les racines de (E) vérifient l'inégalité $|z|<1+\mathrm{M}$.

1°) Démontrer que (E) est équivalente $\frac{a_1}{a_0 z}+\frac{a_2}{a_0 z^2}+\ldots+\frac{a_n}{a_0 z^n}=-1$ (E').

2°) Soit f la fonction définie par $f(z)=\frac{a_1}{a_0 z}+\frac{a_2}{a_0 z^2}+\ldots+\frac{a_n}{a_0 z^n}$.

a) Démontrer que : $|f(z)| \leqslant \mathrm{M}\left(\frac{1}{|z|}+\frac{1}{|z|^2}+\ldots+\frac{1}{|z|^n}\right)$.

b) Démontrer que pour tout nombre complexe z vérifiant $|z| \geqslant 1+\mathrm{M}$, on a :

$|f(z)| \leqslant \mathrm{M}\left(\frac{1}{1+\mathrm{M}}+\frac{1}{(1+\mathrm{M})^2}+\ldots+\frac{1}{(1+\mathrm{M})^n}\right)$ puis que $|f(z)|<1$.

c) Démontrer que, si $|z| \geqslant 1+\mathrm{M}$, alors z n'est pas solution de (E).

En déduire que les solutions de (E) vérifient l'inégalité $|z|<1+\mathrm{M}$.

3°) Localiser les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation $8z^5+4z^4-3z^2+5z-2=0$.

14 1°) Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $(n+1)$ réels strictement positifs (n entier naturel supérieur ou égal à 1).

On pose $\widehat{Q}(X)=a_n X^n-\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Démontrer que Q admet une unique racine dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2°) °) Soit $b_0, b_1, \ldots, b_n$ $(n+1)$ réels tels que $0<b_0<b_1<\ldots<b_n$ (n entier naturel supérieur ou égal à 1).

On pose $\widehat{P}(X)=\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ et $\widehat{Q}(X)=(X-1)\widehat{P}(X)$.

Démontrer que, si z est une racine complexe de P, alors $\widetilde{Q}(|z|) \leqslant 0$ et en déduire que : $|z| \leqslant 1$.

15 Soit n un entier naturel non nul et α un réel n'appartenant pas à $\pi\mathbb{Z}$.

1°) Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P=(X-1)^n-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}(X+1)^n$.

2°) Déterminer une expression simplifiée du produit $\prod_{k=0}^{n-1}\cot\left(\frac{\alpha+k\pi}{n}\right)$.

16 On pose $\alpha=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$ (n est un entier naturel non nul fixé).

1°) Calculer $\sum_{k=1}^{n-1} k\alpha^{k-1}$.

2°) On pose $P=\sum_{k=0}^{n-1} X^k$. Calculer $\widetilde{P}(\alpha)$.

17 Soit n un entier naturel non nul fixé. On considère le polynôme $P=(X+1)^{2n}-(X-1)^{2n}$.

1°) Déterminer les racines complexes de P.

2°) Calculer le produit des racines non nulles de P.

18 Décomposer le polynôme $X^{2n}-1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

19 Pour tout entier naturel n, on pose $P_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{X^k}{k!}$.

1°) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $P'_n=P_{n-1}$.

2°) Démontrer que, pour $n \geqslant 1$, toutes les racines complexes de P_n dans $\mathbb{C}$ sont simples.

3°) Déterminer le nombre de racines réelles de P_n.

Indication : on pourra considérer la fonction $f: x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\widetilde{P_n}(x)$.

20 Soit n un entier naturel non nul.

Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 dans le polynôme $P=X^{2n}-nX^{n+1}+nX^{n-1}-1$.

21 On considère le polynôme $P=aX^{n+1}+bX^n+1$ où n est un entier naturel non nul et a et b deux réels.

Déterminer les réels a et b pour que P soit divisible par $(X-1)^2$.

$\boxed{22}$ Soit P un polynôme à coefficients réels, non constant, tel que : $\widehat{P}\left(X^2\right)=\widehat{P}\left(X\right)\widehat{P}\left(X-1\right)$ (E).
Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble des polynômes qui vérifient (E).
1°) Soit m un entier naturel non nul.
Vérifier que $\left(X^2+X+1\right)^m$ vérifie (E).
2°) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme qui vérifie (E).
Quel résultat du cours permet d'affirmer que P a une racine dans $\mathbb{C}$?
3°) Le but de cette question est de démontrer que 0 n'est pas racine de P.
On raisonne par l'absurde et on suppose que $\widetilde{P}(0)=0$.
Soit la suite $\left(u_n\right)$ définie par son premier terme $u_0=0$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=\left(u_n+1\right)^2$.
a) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $\widetilde{P}\left(u_n\right)=0$.
b) Démontrer que la suite $\left(u_n\right)$ est strictement croissante.
c) En déduire que le polynôme P est nul, et conclure.
4°) On veut démontrer que toutes les racines complexes de P sont de module 1.
On raisonne de nouveau par l'absurde en supposant que P admet une racine complexe α non nulle telle que $|\alpha|\neq 1$.
a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $\widetilde{P}\left(\alpha^{2^n}\right)=0$.
b) Justifier que tous les termes de la suite $\left(\alpha^{2^n}\right)$ sont distincts.
c) En déduire que P est nul, et conclure.
5°) Soit α une racine de P.
a) Démontrer que $|\alpha+1|=1$.
b) Démontrer que $\alpha=j$ ou $\alpha=j^2$, où $j=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.
c) Démontrer que j et j^2 sont racines de P. Que peut-on dire de leur ordre de multiplicité ?
d) En déduire qu'il existe un entier naturel m non nul tel que $\widehat{P}\left(X\right)=\left(X^2+X+1\right)^m$.

$\boxed{23}$ Soit θ un réel qui n'est pas un multiple entier de π.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère le polynôme $P_n\left(X\right)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin\left(k\theta\right)X^k$.

1°) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $P_n\left(X\right)=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left[\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}X\right)^n-\left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}X\right)^n\right]$.
2°) Soit n un entier naturel non nul.
Démontrer que les racines de $P_n\left(X\right)$ sont les nombres $z_k=\dfrac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\theta-\frac{k\pi}{n}\right)}$ avec $k\in[\![0\,;n-1]\!]$.

3°) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\theta-\frac{k\pi}{n}\right)}$.

$\boxed{24}$ On pose $a=\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$.
On considère le polynôme $P\left(X\right)=X^3+aX^2-aX+1$ et on pose $\widehat{Q}\left(X\right)=\widehat{P}\left(X^2\right)$.
1°) Démontrer que P divise Q (on pourra établir que l'on a : $\widehat{P}\left(X^2\right)=\widehat{P}\left(X\right)\times\widehat{P}\left(-X\right)$). En déduire que si z est racine de P alors z^7 est aussi racine de P.
2°) En déduire que les racines de P sont ω, ω^2 et ω^4 avec $\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{7}}$.

$\boxed{25}$ Déterminer le polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ de degré 3 tel que $\widetilde{P}(2)=\widetilde{P'}(2)=1$; $\widetilde{P''}(2)=4$; $\widetilde{P^{(3)}}(2)=6$.

$\boxed{26}$ Soit n un entier naturel non nul. On pose $P_n\left(X\right)=nX^{n+2}-\left(n+2\right)X^{n+1}+\left(n+2\right)X-n$.
Démontrer que P_n est divisible par $\left(X-1\right)^3$.

$\boxed{27}$ Soit a et b deux zéros complexes distincts du polynôme X^3+3X^2+X+1.
Quelle est la valeur de : a^2b+ab^2+3ab ?

$\boxed{28}$ 1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\cos 3x-1=0$.
2°) Calculer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$.
3°) On considère le polynôme $P\left(X\right)=8X^3-6X-1$.
À l'aide des questions précédentes, déterminer les racines du polynôme $P(X)$.
4°) Déterminer la valeur de $\mathrm{A}=\cos\dfrac{\pi}{9}+\cos\dfrac{5\pi}{9}+\cos\dfrac{7\pi}{9}$ et de $\mathrm{B}=\cos\dfrac{\pi}{9}\times\cos\dfrac{5\pi}{9}\times\cos\dfrac{7\pi}{9}$.

$\boxed{29}$ Déterminer tous les polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ de degré 5 tels que :
X^3-X divise $P\left(X\right)$; $X-2$ divise $P\left(X\right)+1$; $X+2$ divise $P\left(X\right)-1$.

$\boxed{30}$ Déterminer tous les polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ de degré 5 tels que :
$\left(X-1\right)^3$ divise $P\left(X\right)+1$ et $\left(X+1\right)^3$ divise $P\left(X\right)-1$.

$\boxed{31}$ 1°) a) Soit α un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2z\cos\alpha+1=0$.
b) En déduire la forme exponentielle des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^{2n}-2z^n\cos\alpha+1=0$ dans laquelle n est un entier naturel non nul donné.
2°) z étant un nombre complexe, on pose $P_\alpha\left(z\right)=z^{2n}-2z^n\cos\alpha+1$ où n est un entier naturel non nul, et α un nombre réel.
a) Démontrer que $P_\alpha\left(z\right)=\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(z^2-2z\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+1\right)$.
b) Calculer $P_\alpha\left(1\right)$ et en déduire que $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}$.
3°) Pour tout élément α de $]0\,;\pi[$, et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :
$H_n\left(\alpha\right)=\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)$.

a) Démontrer alors que $2^{n-1}H_n(\alpha)=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2n}\right)}$.

b) Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 ?

c) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $\sin\dfrac{\pi}{n}\times\sin\dfrac{2\pi}{n}\times\ldots\times\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$.

$\boxed{32}$ Soit P un polynôme non nul.

Démontrer que le polynôme $\dfrac{P}{P\wedge P'}$ a les mêmes racines que P et que toutes ses racines sont simples.

$\boxed{33}$ On considère un paquet cadeau de forme rectangulaire. On connaît son volume, l'aire latérale et la longueur de la ficelle nécessaire pour entourer ce paquet.
Déterminer les dimensions de ce paquet.

$\boxed{34}$ Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que pour tout entier naturel n, $\widetilde{P}(n)\in\mathbb{Q}$.

Démontrer que P appartient à $\mathbb{Q}[X]$.

Indication : on pose $n=\deg P$; considérer la famille de polynômes L_0, L_1, …, L_n d'interpolation de Lagrange aux points 0,1, 2, … n.

On rappelle que $L_k=\dfrac{\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}(X-i)}{\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}(k-i)}$.

$\boxed{35}$ Soit n un entier naturel non nul fixé. On pose $E=\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $\omega=e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

On note $f: E \longrightarrow E$, $P\longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\widetilde{P}(\omega^k)X^k$ et $f^*: E\longrightarrow E$, $P\longmapsto\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\widetilde{P}\left(\overline{\omega}^k\right)X^k$.

1°) Démontrer que f et f^* sont des endomorphismes de E et vérifient $f\circ f^*=n\mathrm{id}_E$.

2°) En déduire que si $P\in\mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$ $\left|\widetilde{P}(\omega^k)\right|\leqslant 1$ avec au moins une inégalité stricte, alors P est un multiple de X^n-1.

Envisager d'abord le cas où $P\in\mathbb{Z}_{n-1}[X]$ puis généraliser avec une division euclidienne.

$\boxed{36}$ On note E l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que pour tout réel x, on ait : $\widetilde{P}(x)\geqslant 0$.

1°) Étudier la stabilité de E pour les opérations algébriques de $\mathbb{R}[X]$.

2°) Déterminer une condition nécessaire sur le degré de P pour que $P\in$ E.

3°) Démontrer que tout polynôme P de E peut s'écrire comme la somme des carrés de deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

Indication : on pourra commencer par le montrer pour un polynôme de degré 2 dans E puis utiliser l'identité dans $\mathbb{R}[X]$: $(A^2+B^2)(C^2+D^2)=(AC+BD)^2+(AD-BC)^2$.

$\boxed{37}$ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1°) Développer le polynôme $(1+X)^n$. En déduire que $n(1+X)^{n-1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}X^{k-1}$.

2°) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}$ en fonction de n.

$\boxed{38}$ 1°) Soit P un polynôme $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieure ou égale à 2.

Démontrer que P' divise $P\Rightarrow P''$ divise P'.

2°) Déterminer les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ divisibles par leur dérivée.

$\boxed{39}$ On posera dans cet exercice $C_i^j=0$ si $i<j$.

1°) Soit m, p, q trois entiers naturels tels que $m\leqslant p+q$.

En considérant le polynôme $(1+X)^p(1+X)^q$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}C_p^k\,C_q^{m-k}$.

2°) Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2$.

$\boxed{40}$ Déterminer trois nombres complexes a, b, c tels que l'on ait : $\begin{cases}|a|=|b|=|c|=1\\ a+b+c=1\\ abc=1\end{cases}$.

Indication : calculer $ab+bc+ca$.

$\boxed{41}$ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1°) Factoriser le polynôme $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}X^k$.

2°) Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$.

$\boxed{42}$ On pose $\omega=e^{i\frac{2\pi}{n}}$ ($n\in\mathbb{N}^*$). Calculer $S=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}k\omega^{k-1}$.

$\boxed{43}$ Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\begin{cases}x+y+z=1\\ x^2+y^2+z^2=9\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1\end{cases}$.

$\boxed{44}$ Déterminer les polynômes P vérifiant $\hat{P}(X^2)=\left[\hat{P}(X)\right]^2$.

$\boxed{46}$ Déterminer les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $(X^2+1)P''-6P=0$.

$\boxed{\mathbf{47}}$ Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que pour tout réel x, on ait : $\widetilde{P}(x)\times\cos x+\widetilde{Q}(x)\times\sin x=0$.
Montrer que $P=Q=0$.

$\boxed{\mathbf{48}}$ Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.
Démontrer qu'il existe un unique polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $Q\left(X^2\right)=P(X)\times P(-X)$.

Questions de cours

$\boxed{1}$ Déterminer une CNS pour qu'un réel a soit racine au moins double d'un polynôme P.

$\boxed{2}$ Conjugaison dans les polynômes complexes ; conséquences sur la distribution des racines d'un polynôme complexe dans le plan complexe.

$\boxed{3}$ Définition de l'ensemble des polynômes. Définition du polynôme nul, du polynôme X.
Définition du degré et de la valuation d'un polynôme non nul.
Quelle inégalité peut-on écrire entre les deux ?
Convention pour le degré et la valuation du polynôme nul.

Exemple : $P = (0 ; 1 ; -1 ; 0 ; 0 ; 2 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; \ldots)$.
Donner la valuation et le degré du polynôme P.

$\boxed{4}$ Définition de la somme de deux polynômes. Vérifier que l'on définit bien une LCI.
Conséquence sur le degré et la valuation de la somme.
Propriétés de l'addition.
Que peut-on dire de la structure de l'ensemble des polynômes muni de cette loi de composition interne ?

$\boxed{5}$ Définition du produit deux polynômes. Vérifier que l'on définit bien une LCI.
Conséquence sur le degré et la valuation du produit.
Propriétés de la multiplication.
Que peut-on dire de la structure de l'ensemble des polynômes muni de l'addition et de la multiplication ?

$\boxed{6}$ Définition de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.
Caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme (critère différentiel).
Démontrer les deux implications

$\boxed{7}$ Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé.

$\boxed{8}$ Structure d'algèbre de $\mathrm{K}[X]$. Base canonique.
Sous-espace vectoriel $\mathrm{K}_n[X]$. Base canonique et dimension.

$\boxed{9}$ Formule de Taylor pour les polynômes. Enoncé et démonstration de cette formule.

$\boxed{10}$ Dérivation des polynômes. Formule de Leibniz.

$\boxed{11}$ **Substitution**

① Substituer à X un élément du corps

② Substituer à X un autre polynôme.

$\widehat{P}(A)$.

Substitution par $X-a$.
Application $\varphi : P \mapsto P(X-a)$.
Cette application est un automorphisme de $\mathrm{K}[X]$.

Conséquence : $\left(1 ; X-a ; (X-a)^2 ; \ldots ; (X-a)^n\right)$ est une base de $\mathrm{K}[X]$.

③ Substituer à X des trucs bizarres (ou d'autres trucs).

$\boxed{12}$ Si $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont des racines deux à deux distinctes d'un polynôme P de multiplicités respectives $m_1, m_2, \ldots, m_p$ alors P est divisible par $(X-a_1)^{m_1}(X-a_2)^{m_2}\ldots(X-a_p)^{m_p}$.

Conséquence : Un polynôme de degré n admet au plus n racines dans K.

$\boxed{13}$ Définition d'une racine d'un polynôme.

$\boxed{14}$ Démontrer que a racine de $P \Leftrightarrow P$ divisible par $X - a$.

$\boxed{15}$ Soit F une fraction rationnelle dont les polynômes du numérateur et du dénominateur sont de même degré. Que vaut la partie entière de F ?

$\boxed{16}$ Polynômes d'interpolation de Lagrange.

$\boxed{17}$ Fonction polynôme ; définition.

Démontrer que si K est un corps infini, l'application $\begin{array}{rcl} \varphi : \mathrm{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathrm{K}, \mathrm{K}) \\ P & \longmapsto & \widetilde{P} \end{array}$ est un morphisme d'anneau injectif.

Si une fonction polynôme est nulle sur un corps infini, que peut-on dire du polynôme ?

Le résultat subsiste-t-il si le corps est fini ?

$\boxed{18}$ Quels sont les éléments inversibles de $\mathrm{K}[X]$?
Déterminer $\mathrm{K}[X]$ est-il un anneau intègre ?

Déterminer le polynôme P tel que $XP + P = 0$.

$\boxed{19}$ Démontrer que pour tout élément α de K et pour tout polynôme P de $\mathrm{K}[X]$ le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$ est $\widetilde{P}(\alpha)$.

$\boxed{20}$ **Homomorphisme d'évaluation**

Soit K un corps commutatif et x un élément fixé dans K.
Démontrer que $\begin{array}{rcl} \delta_x : \mathrm{K}[X] & \longrightarrow & \mathrm{K} \\ P & \longmapsto & \widetilde{P}(x) \end{array}$ est un homomorphisme d'anneaux.

Corrigé

6

1) $P=0$

2) $P\neq 0$

Déterminer d'abord le degré de P (lorsque P est non nul et P' non nul) ; on trouve que le degré de P est égal à 2.

On cherche ensuite les coefficients. On trouve $P(X)=\left(\frac{1}{2}X+b\right)^2$ ou $P=0$.

7 $P(X)=\lambda\prod_{k=0}^{3}(X+k)$ (la constante λ peut être nulle)

9

Le polynôme nul convient.

Dans la suite, on suppose que P n'est pas le polynôme nul.

1°) deg P ? 2

2°) $n=$

$\alpha\left(X^2-1\right)$

13 3°) $\mathrm{M}=\frac{5}{8}$ donc $|z|<1+\mathrm{M}=\frac{5}{8}+1$ soit $|z|<\frac{13}{8}$

Les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation $8z^5+4z^4-3z^2+5z-2=0$ sont localisées dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon $\frac{13}{8}$.

14 2°) $a_n z^n=\sum_{k=0}^{n}a_k z^k$; $a_n|z|^n=\sum_{k=0}^{n}a_k|z|^k$

23 3°) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\theta-\frac{k\pi}{n}\right)}=-\frac{n\sin\left((n-1)\theta\right)}{\sin(n\theta)}$

38 De mémoire, utiliser le polynôme dérivée : $P'(X)=k(X-1)^2(X+1)^2$.
On développe puis on intègre.

42 La famille $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \dots, \mathrm{L}_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$.

De plus les polynômes $\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \dots, \mathrm{L}_n$ sont à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

$$P=\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\widetilde{P}(k)}_{\in\mathbb{Q}}\underbrace{\mathrm{L}_k}_{\in\mathbb{Q}[\mathrm{X}]}\in\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$$

43 **Méthode de division euclidienne.** On divise le polynôme X^3+3X^2-8 par le polynôme $2X^2+2X-4$.
La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y=\frac{1}{2}x+1$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

44 Exercice Centrale Maths 1

1^er^ cas : $P\in\mathbb{Z}_{n-1}[\mathrm{X}]$

$(f\circ f^*)(P)=nP \quad\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\widetilde{f(P)}(\omega^k)}{n}\mathrm{X}^k=P(\mathrm{X})$ (1)

$P\in\mathbb{Z}[\mathrm{X}]\Rightarrow \frac{\widetilde{f(P)}(\omega^k)}{n}\in\mathbb{Z}$

$\forall k\in[\![0,n-1]\!]\ \left|\frac{\widetilde{f(P)}(\omega^k)}{n}\right|<1\Rightarrow \widetilde{f(P)}(\omega^k)=0$

D'après (1), on a : $P=0$.

2^e^ cas : $P\in\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$

$P=\left(\mathrm{X}^n-1\right)Q+R$ avec deg $R<n$.

$\forall k\in[\![0,n-1]\!]\ \left|\widetilde{R}(\omega^k)\right|=\left|\widetilde{P}(\omega^k)\right|<1$
1^er^ cas $\Rightarrow$ $R=0$

50 1°) $P'\mid P\Rightarrow P''\mid P'$
2°) $P'=\lambda(X-\alpha)^{n-1}$
$P=\lambda'(X-\alpha)^n+\mu$
Récurrence sur le degré du polynôme.

58 Couple solution (1 ; 2 ; – 2)

59 Déterminons les polynômes P vérifiant $\widehat{P}(X^2)=\left[\widehat{P}(X)\right]^2$.

deg $P=n$

On a : $P = Q\ X^n + R$ avec deg $R < n$

deg $P \leqslant$ max (deg $Q\,X^n$; deg R)

Donc deg $Q = 0$.

Par suite $Q =$ c[te].
En notant λ le coefficient dominant de P, on peut écrire que : $P = \lambda X^n + R$.
On a donc : $P(X^2) = \lambda X^{2n} + R(X^2)$.
Par suite, λ l est le coefficient dominant de $P(X^2)$.
Or $\left[\hat{P}(X)\right]^2 = \lambda^2 X^{2n} + \left[R(X)\right]^2 + 2 \times X^n \times R(X)$

Le coefficient dominant de $\left[\hat{P}(X)\right]^2$ est λ^2 car deg $R < n$.

Par suite, $\lambda^2 = \lambda$ d'où $\lambda = 0$ ou $\lambda =$ l.

Si $\lambda =$ l, alors $P = X^n + R(X)$.
$R(X) = \left[R(X)\right]^2 + 2X^n R(X)$
Si $R(X) \neq 0$ c'est-à-dire X^n ne divise pas $P(X)$, on a : $1 = R(X) + 2X^n$ soit $R(X) = 1 - 2X^n$ ce qui est impossible car deg $R < n$.

Par conséquent $\lambda = 0$.

Les polynômes solutions donc les polynômes de la forme X^n ou le polynôme nul.

48 On raisonne par existence et unicité :
- existence : utiliser la factorisation (tout polynôme à coefficients complexes est scindé) ;
- unicité (on suppose qu'il y en a deux, il sont égaux sur $\mathbb{R}_+$).