Exercices d'arithmétique

Le vendredi 2 mars 2018

1 Soit *a*, *b*, *c* trois entiers relatifs tels que *a* et *c* soient premiers entre eux.
Démontrer que $\text{PGCD}(a\,;bc)=\text{PGCD}(a\,;b)$.

On démontre que $D(a,bc)=D(a,b)$.

1°) $D(a,b)\subset D(a,bc)$
1 $D(a,bc)\subset D(a,b)$

Soit *k* un diviseur de *a* et de *bc*.
k divise *ab* donc *k* divise le PGCD de *ab* et de *bc*.

Exercices d'arithmétique :

2 Pour tout entier naturel *n*, on pose $a_n=5^{2^n}+1$ et l'on note b_n l'entier naturel tel que $a_n=2b_n$.
1°) Calculer la classe de congruence de a_n modulo 4 ; en déduire que b_n est impair.
2°) Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}\quad a_{n+1}=2+4a_0\ldots a_n$. En déduire que si $n\neq m$ alors b_n et b_m sont premiers entre eux.

Noté au crayon :
$a_n\equiv 2(\text{mod}.4)$ car $5^N\equiv 1\ (\text{mod}.4)$

3 Pour tout entier naturel *n*, on pose $a_n=2^n+3^n$. Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}\quad a_n$ et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Noté au crayon :
n / 5 | a_n

$b_n=7^n-2^n$

3 Démontrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$, $\frac{\ln 5}{\ln 7}$, $\frac{\ln\frac{3}{2}}{\ln\frac{5}{7}}$ sont irrationnels.

Démontrer plus généralement que si *p* et *q* sont deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 premiers entre eux, alors le nombre $\frac{\ln p}{\ln q}$ est irrationnel.

4 Déterminer les couples $(a\,;b)$ d'entiers naturels tels que $a+b=182$ et $\text{PGCD}(a\,;b)=13$.

5 Idem $2a+b=510$ et $\text{PGCD}(a\,;b)=30$.

Le 16-1-2017

28 1°) Démontrer que l'équation $x^2\equiv 12\ (\text{mod. }17)$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}$.
2°) En déduire que $\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2\,/\,x^2+3xy-2y^2=12\}=\varnothing$.

29 Soit *a*, *b*, *c* trois entiers relatifs.
Démontrer que si 7 divise $a^3+b^3+c^3$, alors au moins l'un des trois entiers *a*, *b*, *c* est divisible par 7.

30 Démontrer que l'entier $N=1^{2003}+2^{2003}+3^{2003}+4^{2003}$ est divisible par 5.

31 Pour tout entier naturel n, on pose $S_n=\sum_{k=0}^{n}k^3$.

Calculer $\text{PGCD}(S_n,S_{n+1})$ (on distinguera deux cas suivant la parité de n).

32 On se propose de résoudre dans $\mathbb{N}^3$ l'équation $10x+15y+6z=73$.
1°) a) À quel intervalle appartient *y* ?
b) Démontrer que $2\,|\,73-15y$; en déduire les valeurs possibles de *y*.
2°) Pour chaque valeur de *y* ainsi obtenue, déterminer à quel intervalle appartient *x*.
3°) Conclure.
Solutions : $(4,1,3)$, $(1,1,8)$, $(1,1,3)$

Version d'un élève :

Supposons que l'ensemble des nombres premiers congrus à – 1 modulo 4 est fini et égal à $\{p_1,p_2,\ldots p_n\}$.

Considérons $\text{N}=4\prod_{i=0}^{n}p_i-1$.

$\forall k\in[\![1;n]\!]\quad p_k\times N$ (en effet, sinon, comme $p_k\mid 4\prod_{i=0}^{n}p_i$, $p_k\mid 1$ ce qui est impossible).

Aussi, la décomposition en facteurs premiers de N ne contient-elle que des nombres premiers congrus à 1 modulo 4 (*). Ainsi, $\text{N}\equiv 1$ [4], ce qui est en contradiction avec $\text{N}\equiv -1$ [4], constaté d'après son expression.
L'hypothèse de départ était donc fausse. Par l'absurde, nous avons démontré que l'ensemble des nombres premiers congrus à – 1 modulo 4 est infini.

(*) puisqu'ils sont impairs,

Ex. **56** : $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$
Le couple $(24\,;11)$ est une solution …
Cet exercice est à rapprocher de l'exercice donné en spécialité mathématiques lors du bac juin 20104 Métropole

Le 23-3-2016

J'avais noté sur une feuille.
Cours sur nombres premiers

→ Voir projet d'accompagnement 1ère L et TL option

→ Mettre un seul énoncé

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 s'écrit de manière unique, à l'ordre près des facteurs comme produit d'un …

→ Le plus petit diviseur d de $n>1$ vérifie $d^2 \leqslant n$.

En effet, si $d^2 > n$, alors $\frac{n}{d}$ est un autre diviseur de n distinct de d et de 1 ($\frac{n}{d} \neq d$ puisque $d^2 \neq n$) donc $\frac{n}{d} \geqslant d$ d'où $d^2 \leqslant n$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

→ Rajouter dans « algorithme liés à la division euclidienne » que d est premier

24 Pour tout entier naturel k non nul, on note a_k le nombre entier dont l'écriture en base 10 ne comporte que le chiffre 1 écrit k fois.
Soit n un entier naturel non nul.
1°) Démontrer que parmi les entiers a_1, …, a_{n+1} il y en a deux au moins qui ont le même reste dans la division euclidienne par n. On pourra utiliser le principe de Dirichlet ou « principe des tiroirs » (« Si j'ai plus de chaussettes que de tiroirs, alors il y a au moins un tiroir qui contient deux chaussettes »).
2°) On note a_p et $a_{p'}$ deux tels entiers avec $1 \leqslant p < p' \leqslant n+1$. Démontrer que $a_{p'} - a_p$ est divisible par n.
3°) En déduire l'existence d'un multiple de n dont l'écriture décimale ne contient que des 0 et des 1.

25 Démontrer que pour tout entier relatif n le nombre $n^3 - n$ est divisible par 6.

26 Démontrer que pour tout entier relatif n le nombre $n^3 - n$ est divisible par 30.

27 **Les nombres de Fermat**

Pour tout entier naturel n, on définit le n-ième nombre de Fermat $F_n = 2^{2^n} + 1$.
Fermat avait remarqué que $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ et $F_4 = 65\,537$ sont des nombres premiers et conjecturé en 1640 (voir lettre à Pascal du 29 août 1654) que tous les nombres F_n sont premiers mais Euler infirma cette conjecture en 1732 en remarquant que F_5 est divisible par 641.
En fait, F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 sont les seuls nombre de Fermat inférieurs à 10^{40000} qui sont premiers.

Exercices :
1°) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $F_{n+1} = 2 + F_0 F_1 ... F_n$. En déduire que si m et n sont deux entiers naturels distincts alors F_m et F_n sont premiers entre eux.
2°) Pour tout entier naturel n on définit le polynôme à coefficients réels $F_n = X^{2^n} + 1$.
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $F_{n+1} = 2 + (X+1) F_0 ... F_{n-1} F_n$; en déduire que si n et m sont deux entiers naturels distincts alors F_n et F_m sont premiers entre eux.
3°) Démontrer que F_5 est divisible par 641 (nombre premier) (indication : utiliser après l'avoir justifiée l'égalité $2^{32} = 2^{28} \times (641 - 5^4)$.
4°) Démontrer que F_6 est divisible par l'entier $a = 2^8 \times 1071 + 1 = 274177$.

15

Corrigé manuscrit d'un élève :

$p_1 = 2$
$\forall n \geqslant 2$, p_n est le plus grand facteur premier de $p_1 ... p_{n-1} + 1$.

$p_1 + 1 = 3 \Rightarrow p_2 = 3$
$p_1 p_2 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7 \Rightarrow p_3 = 7$
$p_1 p_2 p_3 + 1 = 2 \times 3 \times 7 + 1 = 43 \Rightarrow p_3 = 43$

2°) Supposons $\exists ((i,n)) \in \mathbb{N}^2, p_i = p_n$
p_n divise $p_1 ... p_i ... p_{n-1} + 1$
$p_n = p_i$
Or $-p_n \times (p_1 ... p_{i-1} p_{i+1} ... p_{n-1}) + (p_1 ... p_{n-1} + 1) = 1$
D'après le théorème de Bezout, $p_n \wedge (p_1 ... p_{n-1} + 1) = 1$
$\Rightarrow p_n = 1$ car $p_n \mid (p_1 ... p_{n-1} + 1)$
ABSURDE

39

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}(1) \cap \boldsymbol{M}(2) \cap ... \cap \boldsymbol{M}(2n)$
$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{M}(n+1) \cap ... \cap \boldsymbol{M}(2n)$

1°) Soit $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{M}(1) \cap ... \cap \boldsymbol{M}(n)$.
$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$

2°) Admettons tout d'abord $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $\exists j \in [\![n+1, 2n]\!]$ tel que $j \in \boldsymbol{M}(i)$.
On a alors $\boldsymbol{M}(j) \in \boldsymbol{M}(i) \Rightarrow \boldsymbol{M}(i) \cap B = \boldsymbol{M}(i) \cap \boldsymbol{M}(j) \cap \left(\bigcap_{k \in \{n+1,...,2n\} \setminus \{j\}} \boldsymbol{M}(k) \right)$

$$= \boldsymbol{M}(j) \cap \left(\bigcap_{k \in \{n+1,...,2n\} \setminus \{j\}} \boldsymbol{M}(k) \right)$$

$$= \boldsymbol{B}$$

Ainsi, on a alors $\forall i \in \{a,...,n\}$ $\boldsymbol{M}(i) \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}$

$$\Rightarrow \bigcap_{i \in \{1,...,n\}} \boldsymbol{M}(i) \cap \boldsymbol{B} = \bigcap_{i \in \{1,...,n\}} \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}$$

$\forall i \in [\![1,...,n]\!]$ $\boldsymbol{M}_i = \{k, \text{tq } ki \leqslant 2n, k \in \mathbb{N}\}$

$\boldsymbol{M}_i \neq \varnothing$ car $1 \in \boldsymbol{M}_i$
$\boldsymbol{M}_i \in \boldsymbol{P}(\mathbb{Z})$ et est majorée donc elle admet un plus grand élément $k_i = \max \boldsymbol{M}_i$.

$k_i i \leqslant 2n$
$(k_i+1) \notin \boldsymbol{M}_i \Rightarrow (k_i+1)i > 2n$

$\Rightarrow k_i i > 2n - i$

Or $i \leqslant n \Rightarrow 2n - i \geqslant n$
D'où $k_i i > n$.

Ainsi, $\forall i \in [\![1, n]\!]\ \exists j \in \boldsymbol{M}(i)$ tel que $j \in [\![n+1; 2n]\!]$.

1 Soit a et b deux entiers naturels quelconques.
Déterminer PPCM$\left(a^2 ; ab ; b^2\right)$.

Idem : (le 5-9-2016)

Soit x et y deux entiers relatifs non tous les deux nuls.
Exprimer PGCD$\left(x^2 ; xy ; y^2\right)$.

2 Soit a, b, n trois entiers naturels quelconques.
Déterminer PGCD$\left(a^n ; b^n\right)$.

3 Quel est le dernier chiffre de 3^{2002} ?

4 1°) Démontrer le critère de divisibilité par 9.
2°) Énoncer et démontrer un critère analogue pour la divisibilité par 11.

5 1°) Soit P un polynôme de K[X] ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X - 1$.
2°) Démontrer le critère de divisibilité par 9 d'un entier naturel en utilisant le résultat du 1°).
Retrouver ce résultat en utilisant les congruences.

6 Soit p un nombre premier, autre que 2 et 5.
On se propose de démontrer qu'il existe un multiple de p dont l'écriture décimale ne comporte que des 1.
1°) Régler le cas de $p = 3$.
À partir de maintenant, on suppose donc que $p > 5$.
2°) Soit N_k le nombre de k chiffres dont l'écriture décimale ne comporte que des 1.
a) Démontrer que N_k est un multiple de p si et seulement si $9 \times N_k$ est un multiple de p.
b) Démontrer que $9 \times N_k = 10^k - 1$.
c) Démontrer que le nombre N_{p-1} convient.

7 Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

1°) Calculer PGCD$\left(S_n, S_{n+1}\right)$.
On distinguera deux cas suivant la parité de n.
2°) Calculer PGCD$\left(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}\right)$.

8 1°) Déterminer PGCD(585, 247).
2°) Déterminer un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que $585u + 247v = 13$.
3°) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $585x + 247y = 13$.

9 Démontrer que pour tout entier naturel n le nombre $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est toujours divisible par 24.

10 Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $x + y - 1 = x \wedge y$.

11 Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $3x^2 + xy - 11 = 0$.

12 On considère le polynôme $P = X^4 - 20X + 4$.
1°) Factoriser P en produit de facteurs de degré 2 de $\mathbb{R}[X]$.
2°) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $\widetilde{P}(n)$ est un entier naturel non premier.

13 On considère le polynôme $P = X^4 + 4$.
1°) Déterminer la décomposition de P en facteurs irréductibles de P de $\mathbb{R}[X]$.
2°) Démontrer que pour tout entier naturel, $\widetilde{P}(n)$ n'est pas un nombre premier.

14 1°) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X + 1$.
2°) Démontrer, à l'aide du 1°), le critère suivant de divisibilité d'un entier naturel n par 11 :
« Un entier naturel est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme de ses chiffres de rang pair et la somme de ses chiffres de rang impair est divisible par 11. »
Retrouver ce résultat par une autre méthode.

15 On considère la suite (p_n) ainsi définie :
$p_1 = 2$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, p_n est le plus grand facteur premier de $p_1 \ldots p_{n-1} + 1$.
1°) Calculer p_2, p_3, p_4.
2°) Démontrer que les nombres p_n sont deux à deux distincts.
3°) Démontrer que 5 n'appartient pas à cette suite.
Il y avait deux questions intermédiaires avant le 2°), peut-être sur les puissances de 2.

16 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (suite de Fibonacci).
1°) Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.
2°) Démontrer que, si $n \mid m$, alors $u_n \mid u_m$.
3°) Démontrer que $u_n \wedge u_m = u_{n \wedge m}$.

17 Soit n un entier strictement positif.
1°) Décomposer $n^4 + n^2 + 1$ en produit de facteurs du premier degré puis démontrer que ces deux facteurs sont premiers entre eux.
2°) Démontrer que si $n \geqslant 2$, alors le nombre $n^4 + n^2 + 1$ n'est pas premier.

18 1°) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne par 8 d'un carré parfait ?
2°) Démontrer que tout entier de la forme $8k + 7$, $k \in \mathbb{N}$, n'est pas la somme de trois carrés parfaits.

19 1°) Soit *n* un entier relatif quelconque. Déterminer tous les restes possibles de la division euclidienne de n^2 par 8, puis ceux de la division euclidienne de $2n^2$ par 8.
2°) Soit *x* et *y* deux entiers naturels quelconques. Déterminer les restes possibles de la division euclidienne de $2x^2+y^2$ par 8.
Indication : faire un tableau avec les résultats du 1°).
3°) Déduire de la question précédente que, *x* et *y* étant deux entiers relatifs, l'équation $2x^2+y^2=5$ n'a pas de solution.

20 1°) Déterminer suivant les valeurs de l'entier *x*, le reste de la division euclidienne par 5.
2°) En déduire que l'équation $x^2-5y^2=3$, avec *x* et *y* entiers, n'a pas de solution.

21 Démontrer que, pour tout entier naturel *n* non nul, on a $10^{10^n}\equiv 4 \pmod 7$.

22 Démontrer que 13 divise $2^{70}+3^{70}$.

23
Partie A
Soit *N* un entier naturel non nul.
On note $S(N)$ la somme des chiffres de *N* et $S'(N)$ le nombre de chiffres de *N*.
1°) Démontrer que $S(N)\equiv N \pmod 9$.
Indication : on utilisera la décomposition en base 10 de *N*.
2°) Démontrer que $S'(N)=\mathrm{E}(\log N)+1$.
Indication : utiliser l'encadrement d'un nombre à *n* chiffres.
3°) Démontrer que $S(N)\leqslant 9\times S'(N)$.
Partie B (la calculatrice est autorisée)
On pose $\mathrm{A}=(2005)^{2005}$, $\mathrm{B}=S(\mathrm{A})$, $\mathrm{C}=S(\mathrm{B})$ et $\mathrm{D}=S(\mathrm{C})$.
1°) Déterminer le reste de la division euclidienne de 7^n par 9 suivant les valeurs de l'entier naturel *n* ; en déduire le reste de la division euclidienne de A par 9.
2°) Déterminer le nombre de chiffres de A ; en déduire un majorant de B puis de C.
3°) Étudier la liste des entiers inférieurs ou égaux à ce majorant. En déduire D.

24 Soit *a* et *b* deux entiers relatifs premiers entre eux.
Quelles sont les valeurs possibles du PGCD de $a+b$ et $a-b$?

25 Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On pose $a=n^4+n^2+1$. En utilisant le fait que $a=n^4+2n^2+1-n^2$, démontrer que *a* n'est pas un nombre premier.

26 Soit A_1, A_2, …, A_n des polynômes premiers entre eux deux à deux $(n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2)$. Pour tout entier *j* compris au sens large entre 1 et *n*, on pose $B_j=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} A_i$.
Démontrer que les polynômes B_1, B_2, …, B_n sont premiers entre eux dans leur ensemble.

27 On considère l'anneau $\mathrm{A}=\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ ($\mathbb{K}$ étant un corps commutatif) ou $\mathrm{A}=\mathbb{Z}$.
Soit *a* et *b* deux éléments de A.
Démontrer que *a* et *b* sont premiers entre eux si et seulement si $a+b$ et ab sont premiers entre eux.

28 Soit *a* un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2.
Pour tout entier naturel *k*, on pose $u_k=a^k-1$.
1°) Démontrer que, pour tout couple (*n*, *m*) d'entiers naturels, si *n* divise *m*, alors $u_n \mid u_m$.
2°) Soit *n* et *m* deux entiers naturels tels que $m\neq 0$. On note *r* le reste de la division euclidienne de *n* par *m*. Démontrer que le reste de la division euclidienne de u_n par u_m est égal à u_r.
3°) Démontrer que, pour tout couple (*n*, *m*) d'entiers naturels, on a : $\mathrm{PGCD}(u_n, u_m)=u_d$ où $d=\mathrm{PGCD}(n,m)$.

29 Pour tout entier naturel *k*, on pose $P_k=\mathrm{X}^k-1$.
1°) Démontrer que, pour tout couple (*n*, *m*) d'entiers naturels, si *n* divise *m*, alors $P_n \mid P_m$.
2°) Soit *n* et *m* deux entiers naturels tels que $m\neq 0$. On note *r* le reste de la division euclidienne de *n* par *m*. Démontrer que le reste de la division euclidienne de P_n par P_m est égal à P_r.
3°) Démontrer que, pour tout couple (*n*, *m*) d'entiers naturels, on a $\mathrm{PGCD}(P_n, P_m)=P_d$ où *d* = PGCD(*n*, *m*).

30 Pour tout entier naturel *n* non nul, on pose $u_n=16^n+10^n-1$.
1°) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?
2°) Soit $\boldsymbol{D}$ l'ensemble des diviseurs communs à tous les termes u_n lorsque $n\in\mathbb{N}^*$.
Démontrer que $\boldsymbol{D}$ admet un plus grand élément.

31 Soit *P* un polynôme non nul de $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$. On note $c(P)$ le PGCD de ses coefficients (appelé ***contenu*** de *P*).
On dit que *P* est **primitif** lorsque $c(P)=1$ (par exemple, tout polynôme unitaire est primitif).
1°) Le but de cette question est de démontrer que, si *P* et *Q* sont deux polynômes non nuls de $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ primitifs, alors *PQ* l'est aussi (résultat dû à Gauss).
On pose $P=a_0+a_1\mathrm{X}+\ldots+a_d\mathrm{X}^d$, $Q=b_0+b_1\mathrm{X}+\ldots+b_{d'}\mathrm{X}^{d'}$ et $PQ=\sum_{i=0}^{d+d'} c_i\mathrm{X}^{d+d'-i}$.
a) Supposons qu'un nombre premier *p* divise tous les c_i, il diviserait alors a_0b_0 donc par exemple a_0 mais pas tous les a_i.
Soit a_j le premier coefficient de *P* non divisible par *p* et b_k le premier coefficient de *Q* non divisible par *p*.
Que peut-on dire de c_{j+k} ? (écrire le résultat sous forme développée).
b) Conclure.
2°) En déduire que, si *P* et *Q* sont deux polynômes non nuls de $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$, alors $c(PQ)=c(P)c(Q)$.
Indication : poser $P=c(P)P_1$ et $Q=c(Q)Q_1$. Que peut-on dire de P_1 et Q_1 ?

32 **Question de cours**
Soit *A* et *B* deux polynômes de degré supérieur ou égal à 1 dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif.
Démontrer que si *A* et *B* sont premiers entre eux, alors il existe un unique couple (U_0, V_0) de polynômes de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tels que l'on ait $AU_0+BV_0=1$; $\deg U_0<\deg B$; $\deg V_0<\deg A$.

Soit *n* un entier naturel non nul.
1°) Démontrer qu'il existe un unique couple (P_0, Q_0) de polynômes dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degrés inférieurs ou égaux à $n-1$ tels que $\mathrm{X}^nP_n+(1-\mathrm{X})^nQ_n=1$.
2°) Démontrer que $Q_n(\mathrm{X})=\widehat{P_n}(1-\mathrm{X})$.
3°) En dérivant la relation du 1°), démontrer que X^{n-1} divise $(1-\mathrm{X})Q_n'-nQ_n$.
Est-il vrai qu'il existe un réel *a* tel que $(1-\mathrm{X})Q_n'-nQ_n=a\mathrm{X}^{n-1}$?

33 Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels vérifiant l'égalité $7(a \wedge b)+2(a \vee b)=111$.

34 Démontrer que pour tout entier premier $p \geqslant 5$, l'entier p^2-1 est divisible par 24.

35 Déterminer le reste de la division euclidienne de $N=2222^{3333}+3333^{2222}$ par 5.

36 Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que l'on ait $a \geqslant b$.
Démontrer que si r est le reste de la division euclidienne de a par b, alors $a>2r$.

37 On considère la suite (u_n) définie par ses deux premiers termes $u_0=0$, $u_1=1$ et la relation de récurrence $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ (suite de Fibonacci).
1°) Déterminer la parité de u_n.
2°) Démontrer que
• pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n - 1$.
• pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ $u_n u_{n-2} - {u_{n-1}}^2 = (-1)^{n-1}$.
• pour tout couple (n, p) d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 1, $u_{n+p-1}=u_{n-1}u_{p-1}+u_n u_p$.
Pour cette dernière égalité, on effectuera une récurrence forte sur p.
3°) Déterminer $u_n \wedge u_{n+1}$.
4°) Démontrer que pour tout couple (n, m) d'entiers naturels, $u_n \wedge u_m = u_d$ où $d=n \wedge m$.
On effectuera une récurrence forte sur n.

38 Pour tout entier naturel non nul n, on note P_n le polynôme à coefficients entiers $P_n(X)=\prod_{j=0}^{n-1}(X-j)$.
Pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, on note $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ le coefficient de X^k dans P_n. Ainsi, $P_n=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}X^k$.
1°) Calculer tous les $\begin{bmatrix} 3 \\ k \end{bmatrix}$ pour k entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant 3$ et tous les $\begin{bmatrix} 4 \\ k \end{bmatrix}$ pour k entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant 4$.
Pour n entier naturel quelconque non nul, calculer $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}$.
2°) Démontrer que, si n est un entier naturel quelconque tel que $n \geqslant 3$ et k un entier naturel tel que $2 \leqslant k \leqslant n-1$, alors $\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}-n\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.
On pourra remarquer que $P_{n+1}=(X-n)P_n$.
3°) Démontrer que si p est un nombre premier et si $2 \leqslant k \leqslant p-1$, alors p divise $\begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix}$.
Indication : On pourra se placer dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Cette propriété subsiste-t-elle si p n'est pas premier ?

39 Soit n un entier naturel quelconque non nul.
Le but de l'exercice est de démontrer que $\text{PPCM}(1, 2, \ldots, 2n)=\text{PPCM}(n+1, n+2, \ldots, 2n)$.
On note A l'ensemble des multiples communs à 1, 2, …, $2n$ et B l'ensemble des multiples communs à $n+1$, …. $2n$.
1°) Démontrer que A est inclus dans B.
2°) Réciproquement, démontrer que B est inclus dans A.
On pourra démontrer que tout entier naturel compris entre 1 et n au sens large, admet un multiple compris entre n et $2n$ au sens large.

40 1°) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et b un réel fixé.
Démontrer que s'il existe une infinité de nombres entiers k tels que $\widetilde{P}(k)=b$, alors P est le polynôme constant égal à b.
2°) Soit P un polynôme à coefficients entiers et a un entier relatif fixé.
On pose $b=\widetilde{P}(a)$.
Démontrer que b divise $\widetilde{P}(a+kb)$ pour tout entier relatif k (on pourra utiliser la formule de Taylor pour les polynômes).
3°) Démontrer que si un polynôme P à coefficients entiers est tel que $\widetilde{P}(a)$ soit un nombre premier pour tout entier a, alors il est nécessairement constant.

41 Pour tout entier relatif x, on note $v(x)$ le plus grand entier naturel n tel que 2^n divise x.
1°) Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.
Démontrer que si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$, alors $v(a) \geqslant v(b)$.
2°) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose : $u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$.
On note m l'entier naturel tel que $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$.
a) Soit k un entier naturel inférieur ou égal à n.
Démontrer que si $k \neq 2^m$, alors $v(k) \leqslant m-1$.
b) Soit $k \in \{1, ..., n\}$.
Démontrer que $\frac{n!}{k}$ est un entier naturel et que si $k \neq 2^m$, alors $v\left(\frac{n!}{k}\right) \leqslant v(n!)-m$.
c) Démontrer que $\sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{k}$ est le produit de $2^{v(n!)-m}$ par un nombre impair, et en déduire que u_n n'est pas un nombre entier.

42 1°) Démontrer l'existence d'un couple (A_0, B_0) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ solution de l'équation $(X^3+1)A+(X^2+X+1)B=1$ (E).
2°) En déduire toutes les solutions de (E) dans $\mathbb{R}[X]$.
3°) Déterminer les solutions de (E) dans $\mathbb{Z}[X]$.

43 Soit P un polynôme de K[X] où K est un corps commutatif.
Démontrer que si P et P' sont premiers entre eux, alors toutes les racines de P dans K sont simples.

44 Soit A, B, C trois polynômes de K[X] où K est un corps commutatif.

Démontrer que si A, B, C, sont premiers entre eux deux à deux, alors AB + BC + CA et ABC sont premiers entre eux.

45 Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $4x^2 - xy - 17 = 0$.

46 1°) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 \equiv 3$ (mod. 5).

2°) Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $x^2 - 5y^2 = 3$ (E).

47 Déterminer l'entier naturel *a* qui vérifie :

- *a* possède exactement deux diviseurs premiers distincts.
- le nombre total des diviseurs positifs de *a* est égal à 6.
- la somme des diviseurs positifs de *a* est égale à 28.

48 Soit α un entier naturel. On pose $m = 2^\alpha \times 3^\alpha \times 5^2$.
Déterminer α sachant que *m* possède 12 diviseurs entiers naturels.

49 L'utilisation de la calculatrice est autorisée.
On a : $2005 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4$.
On se propose de démontrer qu'il est impossible de trouver six entiers naturels non nuls n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6 distincts ou non tels que $2015 = {n_1}^4 + {n_2}^4 + {n_3}^4 + {n_4}^4 + {n_5}^4 + {n_6}^4$.
1°) Calculer 7^4. En déduire que chacun des entiers n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6 est strictement inférieur à 7.
2°) Calculer les restes dans la division euclidienne par 16 de 1^4, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4, 6^4 et de 2015.
3°) Conclure.

50 Soit *a* et *b* deux entiers naturels tels que $\text{PGCD}(a, b) = 7$. La dernière division de reste nul étant écrite, les quotients successifs de l'algorithme d'Euclide sont respectivement 3 ; 1 ; 1 ; 3.
Quelles sont les valeurs de *a* et *b* ?

51 Soit *n* un entier naturel non nul. On considère les nombres *a* et *b* définis par $a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1$ et $b = 2n + 1$.
Déterminer le PGCD de *a* et *b*.

52 Déterminer tous les couples (*a*, *b*) d'entiers naturels tels que l'on ait : $\begin{cases} a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{PPCM}(a, b) = 440 \end{cases}$.

Indication : déterminer les valeurs possibles du PGCD de *a* et *b*.

53 Soit *n* une entier naturel non nul. On pose $a = 6n^2 + 24n + 18$ et $b = 3n^3 + 12n^2 + 9n$.
1°) Factoriser *a* et *b*.
2°) Exprimer PGCD(*a*, *b*) en fonction de PGCD(2, *n*).
3°) Déterminer PGCD(*a*, *b*) selon les valeurs de *n*.
4°) En déduire PPCM(*a*, *b*) selon les valeurs de *n*.
5°) En déduire le PPCM de 144 et 216.
6°) Calculer le PPCM de $6 \times 2^{10} + 24 \times 2^5 + 18$ et $3 \times 2^{15} + 12 \times 2^{10} + 9 \times 2^5$.

54 1°) Démontrer que 211 est un nombre premier.
2°) On note *n* l'entier naturel dont l'écriture décimale est composée de 210 chiffres tous égaux à 9.
Calculer $n + 1$.
3°) En utilisant le petit théorème de Fermat, démontrer que *n* est divisible par 211.

55 Soit $P \in \mathbb{R}$ [X] tel que toutes les racines complexes ont une partie réelle négative.
Démontrer que tous les coefficients de *P* sont de même signe.

56 1°) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $24x + 11y = 1$. Ex. à enlever
2°) Déterminer le PGCD de $10^{24} - 1$ et de $10^{11} - 1$.

57 On considère un polynôme $P = X^3 + pX + q$ où *p* et *q* sont deux nombres complexes.
On pose $\Delta = 4p^3 + 27q^2$.
On note z_1, z_2 et z_3 les racines complexes de *P*.
1°) Exprimer $z_1 + z_2 + z_3$, $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$ et $z_1z_2z_3$ en fonction de *p* et *q*.
2°) Démontrer que $\Delta = \widetilde{P}'(z_1)\widetilde{P}'(z_2)\widetilde{P}'(z_3)$.

58 Démontrer que la somme de deux nombres premiers consécutifs strictement supérieurs à 2 admet au moins une décomposition en trois facteurs (différents de 1) non nécessairement distincts.
Par exemple : $7 + 11 = 18 = 2 \times 3 \times 3$; $23 + 29 = 52 = 2 \times 3 \times 13$.

59 Soit deux entiers *m* et *n* tels que $m \geqslant n \geqslant 1$.
Pas obligé On peut prendre *m* et *n* quelconques.

On considère l'entier $N = mn\left(m^{60} - n^{60}\right)$.
1°) Trouver tous les nombres premiers *p* tels que $p - 1$ divise 60.
2°) Démontrer que tout entier *p* de cette liste est un diviseur de *N*.
On pourra utiliser le petit théorème de Fermat : si *p* est premier et ne divise pas *a*, alors $a^{p-1} \equiv 1 \ [p]$.
3°) Justifier que *N* est un multiple de 56 786 730.

60 **Théorème des restes chinois**

Un général un peu distrait (mais amateur d'arithmétique) ne se souvient pas du nombre de ses soldats. Il sait seulement qu'il y en a entre 700 et 800. Pour s'éviter de les compter un à un, il procède de la façon suivante : Il les fait se ranger par rangées de 25 : il reste 5 soldats hors des rangs ; puis il les fait se ranger par rangées de 16 : il reste alors 3 soldats hors des rangs. Il en déduit rapidement le nombre de ses soldats.
Le but de l'exercice est de trouver quel est ce nombre.

1°) Soit *p* et *q* deux entiers naturels premiers entre eux, et soit *a* et *b* deux entiers naturels. On considère le système $\begin{cases} x \equiv a \ [p] \\ x \equiv b \ [q] \end{cases}$.
a) Justifier qu'il existe deux entiers naturels *u* et *v* tels que $pu + qv = 1$ puis démontrer que l'entier $x = bpu + aqv$ est solution du système.
b) Soit *y* un entier. Démontrer que *y* est solution du système si et seulement si $x - y \equiv 0 \ [pq]$.
4°) Trouver le nombre de soldats. On pourra vérifier que $25 \times (-7) + 16 \times 11 = 1$.

61 Le but de cet exercice est de démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k+3$, avec $k \in \mathbb{N}$. Soit $A = \{p \in \mathbb{N},\ p \text{ premier et } p = 4k+3, k \in \mathbb{N}\}$. On suppose que A est fini. On pose alors $A = \{p_0 ; p_1 ; p_2 ; p_3 ; ... ; p_n\}$, avec $p_0 = 3$, $p_1 = 7$, $p_2 = 11$, etc (les éléments étant écrits dans l'ordre croissant), et on considère l'entier $N = 4p_1p_2p_3...p_n + 3$ (Attention : on remarquera que $p_0 = 3$ ne figure pas dans le produit !).
1°) Justifier que *N* est non premier et impair.
2°) a) Justifier que, dans la décomposition en produit de facteurs premiers, il en existe au moins un qui est congru à 3 modulo 4.
b) Démontrer maintenant qu'on aboutit à une contradiction et conclure.

1°) $N = 4\alpha + 1$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$ et $N > p_n$

2°) $p_i \mid N$

62 Démontrer que l'ensemble des nombres premiers congrus à – 1 modulo 4 est infini.
Indication : Raisonner par l'absurde en considérant un entier N de la forme $4p_1...p_n - 1$.

63 Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $n!+1$ et $(n+1)!+1$ sont premiers entre eux.

Le 21 septembre 2021

Soit *n* un entier naturel non nul.
Démontrer que $n(n+1)$ n'est pas un carré parfait.
Le produit de deux entiers naturels consécutifs non nuls n'est jamais un carré parfait.
L'idée consiste à utiliser la décomposition en facteurs premiers.
n et $n+1$ sont premiers entre eux donc $n(n+1)$ carré parfait implique *n* et $n+1$ carrés parfaits.
En déduire que $\sqrt{\frac{n}{n+1}} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{\frac{n}{n+1}} + \sqrt{\frac{n+1}{n}} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{\frac{n}{n+1}} - \sqrt{\frac{n+1}{n}} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{n} - \sqrt{n+1} \notin \mathbb{Q}$.

Le 21 septembre 2021

Soit *n* un entier naturel non nul.
Démontrer que $n(n+2)$ n'est pas un carré parfait.
Démontrer des résultats analogues à la question précédente.

Il suffit d'observer que $n(n+2) = (n+1)^2 - 1$.
Le résultat est alors quasiment évident.

Le dimanche 9 mai 2022

Déterminer les entiers naturels *n* tels que $2^n + 1$ soit un carré parfait.

Soit *n* un entier naturel tel que $2^n + 1$ soit un carré parfait.

Il existe donc un entier naturel *x* tel que $2^n + 1 = x^2$.

$n \geqslant 1$ x impair $x = 2y + 1$

$2^n = 4y(y+1)$

Si $n > 3$ $2^{n-2} = y(y+1)$

Or *y* et $y+1$ sont premiers entre eux.

On sait par ailleurs que les seuls diviseurs positifs de 2^{n-2} sont les entiers de la forme 2^k avec $k \in \mathbb{N}$ et $k \leqslant n-2$ (utilisation de la décomposition en facteurs premiers).
On en déduit que $y = 1$ et que $y + 1 = 2^{n-2}$ ce qui est absurde.

On regarde ensuite les cas $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$.

Il s'agit d'un problème qui peut être résolu par un gros théorème qui s'appelle la conjecture de Catalan.

Le mercredi 11 mai 2022

Déterminer les entiers naturels *n* tels que $2^n - 1$ soit un carré parfait.

Dans le cas où $n = 0$, on a $2^0 - 1 = 0$ qui est bien un carré parfait.

Dans le cas où $n = 1$, on a $2^1 - 1 = 1$ qui est bien un carré parfait.

On se place dans le cas où $n \geqslant 2$.
On suppose qu'il existe un entier naturel *x* tel que $2^n - 1 = x^2$.

On a alors x^2 qui est un nombre impair. On en déduit que $x = 2y + 1$ où *y* est un entier naturel.
$2^n - 1 = (2y+1)^2$
$2^n - 1 = 4y^2 + 4y + 1$
$2^n = 4y^2 + 4y + 2$
$2^n = 2(2y^2 + 2y + 1)$
$2^{n-1} = 2y^2 + 2y + 1$
$2^{n-1} = 2(y^2 + y) + 1$
$2^{n-1} = 2(y^2 + y) + 1$
Or $2(y^2 + y) + 1$ est un nombre impair.
On débouche donc sur une impossibilité.

Version rédigée juste après en version pour les élèves :

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = 2^n - 1$.

Le but de l'exercice est de déterminer les entiers naturels n tels que u_n soit un carré parfait.

1°) Examiner les cas $n = 0$ et $n = 1$.

2°) On se place dans le cas où $n \geqslant 2$.

On suppose que u_n est un carré parfait.

Il existe donc un entier naturel x tel que $2^n - 1 = x^2 \quad (1)$.

a) Justifier que x est impair.

b) On pose $x = 2y + 1$ où y est un entier naturel.

Justifier que l'égalité (1) débouche sur une impossibilité.

3°) Conclure l'exercice.

« Les entiers naturels n tels que u_n soit un carré parfait sont ….. »

2°) b) $2^n - 1 = (2y+1)^2$ $\qquad 2^n - 1 = 4y^2 + 4y + 1$ $\qquad 4y^2 + 4y + 2 = 2^n \quad 2y^2 + 2y + 1 = 2^{n-1}$

Corrigé

3 On travaille en congruence modulo 10.

Le dernier chiffre de 3^{2002} est égal à 9.

6 Avec le petit théorème de Fermat.

7 $S_n \wedge S_{n+1} = S_n \wedge (n+1)^3$ (car $S_{n+1} - S_n = \ldots$)

$\boxed{n = 2k}$ $S_{2k} \wedge S_{2k+1} = (2k+1)^2$

$\boxed{n = 2k+1}$ $S_{2k+1} \wedge S_{2k+2} = (k+1)^2$

2°) $\boxed{n = 2k}$ $S_n \wedge S_{n+1} \wedge S_{n+2} = (2k+1)^2 \wedge (k+1)^2 (2k+3)^2$

$\left.\begin{array}{l}(2k+1) \wedge (k+1) = 1 \\ (2k+1) \wedge (2k+3) = 1\end{array}\right\} \Rightarrow S_n \wedge S_{n+1} \wedge S_{n+2} = 1$

$\boxed{n = 2k+1}$ Même méthode

Dans les deux cas, on a : $S_n \wedge S_{n+1} \wedge S_{n+2} = 1$

8 1°) (– 8, 19)

10 **Analyse :** on pose $d = x \wedge y$ $\quad d \neq -1 \quad d = 1$

$y = 2 - x$, x impair.

N.B. : (0, 0) n'est pas solution.

11 (1, 8), (– 1, – 8), (11, – 32), (– 11, 32)

22 $10^{10} \equiv 4 \ [7]$

$4^n \equiv 4 \ [7]$

$10^{10k} \equiv 4 \ [7]$

Or 10^n est de la forme $10k$ donc $10^{10^n} \equiv 4 \ [7]$.

23 **Partie B** 1°) $A \equiv 7 \ [9]$ 2°) $S'(A) = 6621$; $B \leqslant 9 \times 6621 = 59589$; $C \leqslant 5 + 4 \times 9 = 41$ ou $C \leqslant 45$; $D \leqslant 4 + 9 = 13$

3°) $D \equiv 7 \ [9]$ donc $D = 7$.

26 Il s'agit de démontrer que : « $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (a+b) \wedge b = 1$ ».

32 **Question de cours**

Soit (U_1, V_1) un couple de polynômes tels que $AU_1 + BV_1 = 1$.

$U_1 = BQ + U_0$ avec $\deg U_0 < \deg B$.

On a donc $U_0 = U_1 - BQ$.
On pose $V_0 = V_1 - AQ$.
On a : $AU_0 + BV_0 = 1$.
On a : $V_0 B = 1 - U_0 A$.
$\deg(1 - U_0 A) = \deg(U_0 A)$
car $\deg A \geqslant 1$ et $U_0 \neq 0$
$= \deg U_0 + \deg A$
$< \deg B + \deg A$

$\deg V_0 + \deg B < \deg B + \deg A$

$\boxed{\deg V_0 < \deg A}$

33 $(59;1)$; $(1;59)$; $(3;45)$; $(45;3)$; $(9;15)$; $(15;9)$

38 1°) $\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} = 0$; $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = 2$; $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = -3$; $\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = 1$; $\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix} = 0$; $\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} = -6$; $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = 11$; $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = -6$; $\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix} = 1$.
$\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix} = 0$, $\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix} = (-1)^n (n-1)!$; $\begin{bmatrix}n\\n\end{bmatrix} = 1$.

3°) On se place dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

$P_p = X^p - X$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$.

39 2°) Réciproquement, on va démontrer que B est inclus dans A.
Soit k un entier naturel compris entre 1 et n.
Soit q et r le quotient et le reste dans la division euclidienne de $2n$ par k.
On a : $2n = qk + r$ avec $0 \leqslant r < k$.
Ainsi $n \leqslant 2n - k < 2n - r \leqslant 2n$.

On a donc : $n + 1 \leqslant 2n - r \leqslant 2n$.
Or qk est un multiple de k.

Autre méthode :

On considère un entier naturel p tel que : $1 \leqslant p \leqslant n$.

On cherche un entier naturel k tel que $n \leqslant kp \leqslant 2n$ soit $\frac{n}{p} \leqslant k \leqslant \frac{2n}{p}$.

Or : $\frac{2n-n}{p} = \frac{n}{p} \geqslant 1$.

42 1°) $A_0 = \frac{1}{2}$; $B_0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}X$; 3°) Il n'existe pas de solution dans $\mathbb{Z}[X]$ (il faut raisonner par l'absurde).

Solution détaillée :
Algorithme d'Euclide étendu

X^3+1	X^2+X+1	2
	$X-1$	
1	0	1
0	1	$1-X$

$(X^3+1)\times 1 + (X^2+X+1)\times(1-X) = 2$ (E)

$(X^3+1)\times\frac{1}{2} + (X^2+X+1)\times\frac{1-X}{2} = 1$ (E)

$\left\{\left(\frac{1+\lambda(X^2+X+1)}{2}; \frac{-\lambda X^3 - X - \lambda + 1}{2}\right), \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

46 1°) L'équation $x^2 \equiv 3$ (mod. 5) n'admet aucune solution dans $\mathbb{Z}$.

2°) L'équation (E) n'admet aucune solution dans $\mathbb{Z}^2$. Pour le voir, il suffit de « passer » modulo 5.

49 On se demande s'il est possible d'écrire 2015 comme somme de 6 puissances quatrièmes d'entiers. Comme $7^4 = 2401 > 2015$, il est clair que les 6 entiers doivent être inférieurs ou égaux à 6.
Etudions des congruences modulo 16 :
$1^4 = 1 \equiv 1$ [16], $2^4 = 16 \equiv 0$ [16], $3^4 = 81 \equiv 1$ [16], $4^4 = 256 \equiv 0$ [16], $5^4 = 625 \equiv 1$ [16], $6^4 = 1296 \equiv 0$ [16] .
D'après les propriétés des congruences, une somme de 6 termes congrus à 1 ou à 0 modulo 16 sera congrue à 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 modulo 16
Le reste est toujours inférieur ou égal à 6.
Or 2015 = 2000 +15 = 16 ×125 +15 ≡ 15 [16]. Il n'est donc pas possible d'écrire 2015 comme somme de 6 puissances quatrièmes.
Remarque culturelle :
La décomposition en somme de puissances est une question ancienne, dont beaucoup de résultats restent toujours à découvrir.
Ainsi Lagrange a démontré en 1770 que tout entier pouvait se mettre sous la forme d'une somme de au plus 4 carrés. Wieferich a démontré en 1912 que tout entier pouvait se mettre sous la forme d'une somme d'au plus 9 cubes (seuls 23 et 239 demandent 9 cubes). Pour les puissances 4, on a prouvé que 35 puissances suffisent toujours, mais on ne connaît pas de nombre qui demande plus de 19 puissances (79, 239, 559 en particulier demandent les 19 puissances).

50 $a = 175$ et $b = 49$

Solution détaillée :

$a > b$

$a = 3b + x$ $\quad x < b$
$b = x + y$ $\quad y < x$
$x = y + z$ $\quad z < y$
$y = 3z + 0$

$z = 7$

Donc $y = 21$
$x = 28$

$b = 49$
$a = 175$

	3	1	1	3
a	b	x	y	7
x	y	z	0	

Vérification :

	3	1	1	3
175	49	28	21	7
28	21	7	0	

52 $440 = 2^3 \times 5 \times 11$ et $4625 = 5^3 \times 37$
$\text{PGCD}(4625, 440) = 5$
Le PGCD de a et b est égal à 1 ou à 5.

55 Indication : utilisation de la décomposition en facteurs irréductible dans $\mathbb{C}$.

Faire apparaître les racines réelles et les racines complexes.
Tous les coefficients sont du même signe que le coefficient dominant.

58 Les nombres p et q sont impairs. Le nombre $p+q$ est donc un nombre pair.

On a : $p < \frac{p+q}{2} < q$.

Comme p et q sont deux nombres premiers consécutifs, $\frac{p+q}{2}$ n'est pas un nombre premier.

Euler a démontré en 1749 que tout nombre parfait pair est de la forme $2^{p-1}\left(2^p - 1\right)$.

Le plus grand nombre parfait connu en 1992 était $2^{756838}\left(2^{756839} - 1\right)$.

Questions de cours

1 Algorithme d'Euclide.

2 Définition du PGCD de deux entiers relatifs.
Démontrer la relation entre PGCD de ka et kb et PGCD de a et b.

3 Définition du PGCD de deux polynômes.

4 Définition du PPCM de deux entiers relatifs.
Relation entre le PGCD et le PPCM de deux entiers relatifs.

5 Théorème de Gauss dans $\mathbb{Z}$. Énoncé et démonstration.

6 Théorème de Gauss dans K [X]. Énoncé et démonstration.

7 Théorème de Bezout.

8 Nombres premiers. Définition. L'ensemble premier est infini.

9 Décomposition d'un entier en produits de facteurs premier.

10 Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$. Énoncer et démontrer le théorème.

Application :
Faire la division euclidienne de – 27 par 5.

11 Division euclidienne dans K [X].

12 Polynômes irréductibles. Définition. Polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}$[X] et dans $\mathbb{R}$[X].

13 Démontrer que tout entier supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier inférieur ou égal à sa racine carrée.

14 Soit a et b deux entiers naturels quelconques et p un nombre premier.
Démontrer que si p divise ab, alors p divise a ou p divise b.

15 Détermination des diviseurs d'un nombre premier à l'aide de sa décomposition en facteurs premiers.
Application :
Déterminer tous les diviseurs de 560 (par leur décomposition en facteurs premiers).

16 Détermination du PGCD et du PPCM de deux entiers à l'aide de leurs décompositions en facteurs premiers.

17 Soit a et b deux entiers premiers entre eux. Démontrer que si a et b divisent un entier c, alors ab divise c.

18 Algorithme de recherche des coefficients de Bezout.