TS — Exercices sur les suites (2)

1 Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

Traduire sous la forme d'une phrase quantifiée la propriété « (u_n) converge vers 3 ».

2 On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$.

Traduire en termes de limites lorsque c'est possible les propositions suivantes :
1°) tout intervalle ouvert contenant 2 contient tous les termes de la suite pour n assez grand.
2°) l'intervalle $]-5{,}01\,;-4{,}99[$ contient tous les termes d'indice $n \geq 1000$.
3°) tout intervalle de la forme $]-\infty\,;A]$ (où A est un réel) contient tous les termes de la suite pour n assez grand.

3 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n\sqrt{n}$.

Déterminer un entier naturel N tel que si $n > N$, alors $u_n \in \left]10^6\,;+\infty\right[$.

4 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

Déterminer un entier naturel N tel que si $n > N$, alors $u_n \in \left]-10^{-3}\,;10^{-3}\right[$.

On pourra utiliser l'équivalence : $u_n \in \left]-10^{-3}\,;10^{-3}\right[\Leftrightarrow |u_n| < 10^{-3}$.

5 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 2 + \dfrac{1}{n^2}$.

Déterminer les entiers naturels n tels que $u_n \in [1{,}99\,;2{,}01]$.

On pourra utiliser l'équivalence : $u_n \in [1{,}99\,;2{,}01] \Leftrightarrow |u_n - 2| \leq 0{,}01$.

(Revoir la caractérisation d'un intervalle fermé borné par centre et rayon à l'aide de la valeur absolue).

6 Déterminer dans chaque cas la limite de la suite (u_n).

1°) (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{3^n}$ 2°) (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3^n + 4^n}{3^n}$.

7 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3^n + 4^n}{3^n + 2^n}$.

Déterminer la limite de la suite (u_n).

8 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \sin n$.

Déterminer la limite de la suite (u_n).

9 Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = 1 + \dfrac{2}{3} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Donner une expression simplifiée de S_n sous forme factorisée ; en déduire la limite de la suite (S_n).

10 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2n}\right)$.

Déterminer la limite de la suite (u_n).

11 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 tel que $0 < u_0 < 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = (u_n)^2$ pour tout entier naturel n.

1°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < 1$.
2°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3°) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge.
4°) On note l la limite de (u_n).
Justifier que $l < 1$ et que $l = l^2$. En déduire la valeur de l.

12 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ pour tout entier naturel n.

1°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$.
2°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3°) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge.
4°) On note l la limite de (u_n).
Justifier que $l = le^{-l}$. En déduire la valeur de l.

13 Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose : $u_n = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$ (ou $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{k(k+1)}$).

1°) Calculer u_1, u_2, u_3.

2°) Pour tout entier naturel $k \geq 1$, démontrer l'égalité $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

3°) On écrit l'égalité $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ pour $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et on fait la somme membre à membre comme dans le cadre ci-dessous :

$$\boxed{\begin{array}{rl} \dfrac{1}{1\times 2} & = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2\times 3} & = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{1}{n\times(n+1)} & = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \end{array}}$$

Recopier ce cadre et barrer en diagonale les termes qui s'annulent dans la somme (méthode par **« télescopage »** ou par **« dominos additifs »**).

En déduire que $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

4°) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

14 Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $u_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ (la somme commence pour k = 2).

1°) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

2°) Démontrer, que pour tout entier naturel $k \geq 2$, on a $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

3°) On écrit l'inégalité $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour $k \in \{2, 3, ..., n\}$ et on fait la somme membre à membre des inégalités obtenues comme dans le cadre ci-dessous (on applique la **règle d'addition des inégalités** : « On peut additionner membre à membre des inégalités de même sens ») :

$$\begin{array}{|c|}\hline \frac{1}{2^2} \leq \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3^2} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ \hline \end{array}$$

Recopier ce cadre et barrer en diagonale les termes qui s'annulent (principe des dominos additifs ou télescopage).

En déduire que $u_n \leq 1 - \frac{1}{n}$ et que (u_n) est majorée.

4°) Démontrer à l'aide des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente (on ne demande pas de déterminer la limite).

15 Soit (u_n) et (v_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ par la donnée de leurs premiers termes u_0 et v_0 $(u_0 < v_0)$ et les relations de récurrence $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

1°) Démontrer que la suite $(v_n - u_n)$ est géométrique ; donner sa limite.

2°) Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n).

3°) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4°) Démontrer que la suite $(u_n + v_n)$ est constante.

5°) En déduire la limite commune des suites (u_n) et (v_n) en fonction de u_0 et v_0.

16 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

17 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{\ln n}{n}$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

18 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^3$.

Déterminer un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \geq 2011$.

19 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$.

Soit A un réel strictement positif fixé.

On cherche un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \geq \text{A}$.

Parmi les propositions suivantes indiquer celle qui convient :

☐ $N = \text{E}\left(\sqrt{\text{A}}\right)$ ☐ $N = \text{E}\left(\sqrt{\text{A}}\right) + 1$ ☐ $N = \text{E}\left(\sqrt{\text{A}}\right) - 1$

20 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$.

Soit A un réel strictement positif fixé.

On cherche un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \geqslant \text{A}$.

Parmi les propositions suivantes indiquer celle qui convient :

☐ $N = \text{E}\left(\frac{\ln \text{A}}{\ln 2}\right)$ ☐ $N = \text{E}\left(\frac{\ln \text{A}}{\ln 2}\right) + 1$ ☐ $N = \text{E}\left(\frac{\ln \text{A}}{\ln 2}\right) - 1$

21 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

Déterminer un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \in \left]-10^{-3} ; 10^{-3}\right[$.

22 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

1°) Déterminer la limite de la suite (u_n).

2°) Déterminer un entier naturel N tel que si $n > N$, alors $u_n \in \left]-10^{-2} ; 10^{-2}\right[$.

23 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 7$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ pour tout entier naturel n.

1°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 2$.

2°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

3°) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge.

4°) On note l la limite de (u_n).

Justifier que $l \geq 2$ et que $l = \sqrt{l+2}$. En déduire la valeur de l.

Corrigés

$\boxed{1}$ On dit que la suite (u_n) converge vers 3 pour exprimer que tout intervalle ouvert I contenant 3 contient tous les termes u_n à partir d'un certain indice.

$\boxed{2}$ 1°) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ 2°) on ne peut rien dire 3°) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

$\boxed{3}$ $N = 10^4$

Solution détaillée :

$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad u_n = n\sqrt{n}$

$$\begin{aligned} u_n > 10^6 &\Leftrightarrow n\sqrt{n} > 10^6 \\ &\Leftrightarrow n^2 \times n > \left(10^6\right)^2 \\ &\Leftrightarrow n^3 > \left(10^6\right)^2 \\ &\Leftrightarrow n^3 > 10^{12} \\ &\Leftrightarrow n > \sqrt[3]{10^{12}} \\ &\Leftrightarrow n > 10^4 \end{aligned}$$

Donc si $n > 10^4$, alors $u_n \in \left]10^6\,;+\infty\right[$.

$\boxed{4}$ $N = 10^2$

Solution détaillée :

$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$

Rappel :

Soit a un réel strictement positif.

On a : $|\,X\,| < a \;\Leftrightarrow\; -a < X < a$.

$$\begin{aligned} -10^{-3} < u_n < 10^{-3} &\Leftrightarrow |\,u_n\,| < 10^{-3} \\ &\Leftrightarrow \left|\frac{1}{n\sqrt{n}}\right| < 10^{-3} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n\sqrt{n}} < 10^{-3} \\ &\Leftrightarrow n\sqrt{n} > 10^3 \\ &\Leftrightarrow n^3 > 10^6 \\ &\Leftrightarrow n > 10^2 \end{aligned}$$

Si $n > 10^2$, alors $u_n \in \left]-10^{-3}\,;10^{-3}\right[$.

$\boxed{5}$ Si $n \geq 10$, alors $u_n \in [1,99\,;\,2,01]$.

Solution détaillée :

$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = 2 + \dfrac{1}{n^2}$

$$\begin{aligned} 1,99 \leq u_n \leq 2,01 &\Leftrightarrow 2 - 0,01 \leq u_n \leq 2 + 0,01 \\ &\Leftrightarrow -0,01 \leq u_n - 2 \leq 0,01 \\ &\Leftrightarrow |\,u_n - 2\,| \leq 0,01 \\ &\Leftrightarrow \left|2 + \frac{1}{n^2} - 2\right| \leq 0,01 \\ &\Leftrightarrow \left|\frac{1}{n^2}\right| \leq 0,01 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n^2} \leq 0,01 \\ &\Leftrightarrow n^2 \geq \frac{1}{0,01} \\ &\Leftrightarrow n^2 \geq 100 \\ &\Leftrightarrow n \geq \sqrt{100} \\ &\Leftrightarrow n \geq 10 \end{aligned}$$

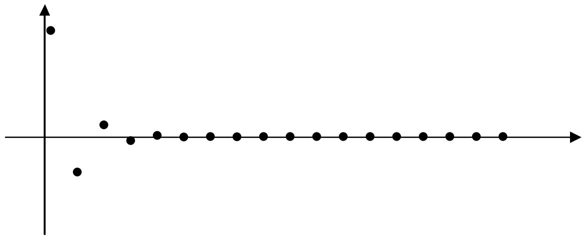
Conclusion : Les entiers naturels n tels que $u_n \in [1,99\,;\,2,01]$ sont tous les entiers naturels supérieurs ou égaux à 10.

$\boxed{6}$ 1°) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (il faut préciser pourquoi)

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{3^n} = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

Or $-1 < -\dfrac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

On peut observer que la suite (u_n) a un comportement oscillant : les termes d'indice pair sont tous positifs et les termes d'indice impair sont tous négatifs. On a la représentation graphique suivante.



2°) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{3^n+4^n}{3^n} = \dfrac{3^n}{3^n} + \dfrac{4^n}{3^n} = 1 + \left(\dfrac{4}{3}\right)^n$

Or $\dfrac{4}{3} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4}{3}\right)^n = +\infty$.

Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

$\boxed{7}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (FI, réécriture et limite de suites géométriques)

Solution détaillée :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{3^n+4^n}{3^n+2^n} = \frac{3^n\left(1+\dfrac{4^n}{3^n}\right)}{3^n\left(1+\dfrac{2^n}{3^n}\right)} = \frac{1+\left(\dfrac{4}{3}\right)^n}{1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty}\left[1+\left(\dfrac{4}{3}\right)^n\right] = +\infty \quad \text{car } \dfrac{4}{3} > 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left[1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right] = 1 \quad \text{car } -1 < \dfrac{2}{3} < 1 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Méthode :
On met en facteur les termes prépondérants au numérateur et au dénominateur (pour les suites, on lève les FI de la même manière que pour les fonctions).

$\boxed{8}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (théorème des gendarmes)

Solution détaillée :

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \sin n$

On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq \sin n \leq 1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad -\left(\dfrac{3}{4}\right)^n \leq u_n \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

Or $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right] = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$\boxed{9}$ $S_n = \dfrac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{2}{3}} = 3\left[1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$ (formule sommatoire pour les suites géométriques ; bien observer cette formule factorisée) ; $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 3$ car $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$.

Solution détaillée :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad S_n = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$$
$$= \frac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{2}{3}}$$
$$= 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

Or $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 3$.

$\boxed{10}$ La limite de la suite (u_n) est égale à $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (composée suite-fonction).

Solution détaillée :

$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2n}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2n}\right)}_{X} = \dfrac{\pi}{4} \\ \lim\limits_{X\to\frac{\pi}{4}} \sin X = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée suite-fonction, } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La suite (u_n) converge vers $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\boxed{11}$ Étude d'une suite récurrente

$$\begin{cases} 0 < u_0 < 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = (u_n)^2 \end{cases}$$

1°) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $0 < u_n < 1$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

$u_0 = \dfrac{1}{4}$ par hypothèse de définition de la suite donc $0 < u_0 < 1$.

D'où $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $0 < u_k < 1$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $0 < u_{k+1} < 1$.

On a : $0 < u_k < 1$ (par hypothèse de récurrence)

Donc $0^2 < (u_k)^2 < 1^2$ car la fonction « carré » est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Par suite, $0 < u_{k+1} < 1$.

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k, alors $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

2°) Déterminons le sens de variation de la suite (u_n).

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = (u_n)^2 - u_n$$
$$= u_n(u_n - 1)$$

Or $0 < u_n < 1$ d'après la question 1°).

Donc $-1 < u_n - 1 < 0$.

Comme $u_n - 1 < 0$ et $u_n > 0$, on peut dire que $u_n(u_n - 1) < 0$ soit $u_{n+1} - u_n < 0$.

On en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$.

Conclusion : La suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

3°) Déduisons-en que la suite (u_n) converge.

Dans la question 1°), on a démontré que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n < 1$ donc la suite (u_n) est minorée par 0.

Dans la question 2°), on a démontré que la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

Or toute suite décroissante minorée converge (théorème du cours).

On en déduit que la suite (u_n) converge.

4°) $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Justifions que $l < 1$ et que $l = l^2$.

On sait que la limite l est un minorant des termes de la suite.

Donc $l \leqslant u_0$.

Or $u_0 < 1$ donc $l < 1$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} =$

- l car $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ (la suite (u_n) converge vers l) et les termes de la suite (u_{n+1}) sont les mêmes que ceux de la suite (u_n) à l'exception du premier terme)
- l^2 (car $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = (u_n)^2$)

Par unicité de la limite d'une suite (il ne peut y avoir qu'une seule limite), on a : $l = l^2$ (1).

Déduisons-en la valeur de l.

(1) $\Leftrightarrow l - l^2 = 0$
$\Leftrightarrow l\,(1 - l) = 0$
$\Leftrightarrow l = 0$ ou $1 - l = 0$
$\Leftrightarrow l = 0$ ou $l = 1$

Or $l < 1$.

Donc $l = 0$.

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

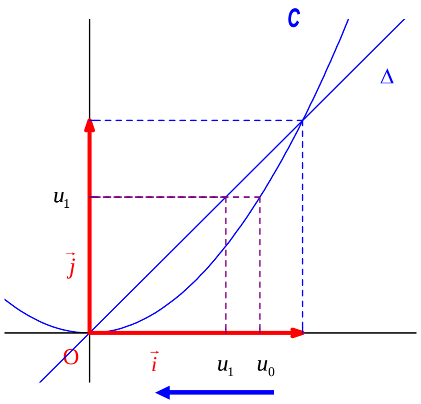
On peut donc dire (u_n) converge vers 0.

Complément :

1. On peut représenter les termes de la suite récurrente (procédé habituel).
On visualise graphiquement la convergence de (u_n) vers 0.

On a tracé la courbe **C** d'équation $y = x^2$ et la droite Δ d'équation $y = x$.

Représentation graphique



On peut ainsi facilement observer le comportement de la suite (u_n) (monotonie et convergence).

2. On peut démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n = (u_0)^{(2^n)}$.

Pour démontrer cette formule explicite, on peut procéder par récurrence.

$\boxed{12}$ Étude d'une suite récurrente

1°) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P\,(n)$: « $u_n > 0$ ».

Initialisation :

Vérifions que P (0) est vraie.

$u_0 > 0$ par hypothèse donc P (0) est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $u_k > 0$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} > 0$.

On a : $u_k > 0$.

De plus, on a : $\mathrm{e}^{-u_k} > 0$.

Donc $u_{k+1} > 0$.

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que P(0) est vraie et que si P(k) est vraie pour un entier naturel k, alors P(k + 1) est vraie.
Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase P(n) est vraie pour tout entier naturel n.

2°) Méthode pour étudier le sens de variation de la suite : on étudie le signe de la différence.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = u_n \mathrm{e}^{-u_n} - u_n = u_n\left(\mathrm{e}^{-u_n} - 1\right)$

On étudie le signe de chacun des deux facteurs du produit.

1^er^ facteur : d'après la question 1°) on sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$.

2^e^ facteur : on procède par inégalités successives.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad -u_n < 0$ d'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{e}^{-u_n} < \mathrm{e}^0$ soit $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{e}^{-u_n} < 1$ d'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{e}^{-u_n} - 1 < 0$.

On obtient donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n < 0$.

Par conséquent, la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

3°) D'après la question 1°), la suite (u_n) est minorée par 0.

D'après la question 2°), la suite (u_n) est strictement décroissante.

Or toute suite décroissante et minorée converge.

Donc la suite (u_n) converge.

Attention, on ne peut pas dire à ce stade-là qu'elle converge vers 0.

C'est le but de la question 4°) de trouver la limite de la suite (u_n).

4°) On sait que l est la limite de la suite (u_n).

A partir de là, on va exprimer de deux manières différentes la limite de u_{n+1} ce qui va nous permettre de trouver une égalité vérifiée par l.

D'une part, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$ de manière évidente (car la suite (u_n) converge vers l donc la suite (u_{n+1}) converge vers la même limite puisqu'elle a les mêmes termes mais décalée de 1).

D'autre part, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(u_n \mathrm{e}^{-u_n}\right) = l\mathrm{e}^{-l}$ (car la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(u_n\right) = f\left(l\right) = l\mathrm{e}^{-l}$)

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \begin{cases} l \\ l\mathrm{e}^{-l} \quad (\text{car } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}) \end{cases}$$

Par unicité de la limite d'une suite, $l = l\mathrm{e}^{-l}$ (1).

(1) $\Leftrightarrow l - l\mathrm{e}^{-l} = 0$

$\Leftrightarrow l\left(1 - \mathrm{e}^{-l}\right) = 0$

$\Leftrightarrow l = 0$ ou $1 = \mathrm{e}^{-l}$

$\Leftrightarrow l = 0$ ou $\ln 1 = -l$

$\Leftrightarrow l = 0$ ou $0 = -l$

$\Leftrightarrow l = 0$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

(u_n) converge vers 0.

$\boxed{13}$ $u_n = \dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}$ $\quad (n \geqslant 1)$

u_n est définie par une sommation : u_n n'est pas la somme des termes d'une SA ni une SG (ni une suite arithmético-géométrique). Il n'y a pas de formule sommatoire.

1°) $u_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times(1+1)} = \frac{1}{2}$

$u_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=2} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times(1+1)} + \frac{1}{2\times(2+1)} = \frac{2}{3}$

$u_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=3} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times(1+1)} + \frac{1}{2\times(2+1)} + \frac{1}{3\times(3+1)} = \frac{3}{4}.$

Remarque :

$u_2 = u_1 + \dfrac{1}{2\times(2+1)} = \dfrac{2}{3}$; $u_3 = u_2 + \dfrac{1}{3\times(3+1)} = \dfrac{3}{4}$ etc.

Attention à ne pas commettre la faute qui consiste à écrire : $u_3 = u_1 + u_2 + \dfrac{1}{3\times4}.$

erreur

2°) Pour tout entier naturel $k \geq 1$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \dfrac{\cancel{k+1}}{k\cancel{(k+1)}} - \dfrac{\cancel{k}}{\cancel{k}(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}.$

3°)

Cas particulier pour $n = 2$

$\dfrac{1}{1\times2} = \dfrac{1}{1} - \cancel{\dfrac{1}{2}}$

$\dfrac{1}{2\times3} = \cancel{\dfrac{1}{2}} - \dfrac{1}{3}$

$u_2 = \dfrac{1}{1} - \cancel{\dfrac{1}{2}} + \cancel{\dfrac{1}{2}} - \dfrac{1}{3}$

Dans le cas général,

$\dfrac{1}{1\times2} = \dfrac{1}{1} - \cancel{\dfrac{1}{2}}$	$k=1$
$\dfrac{1}{2\times3} = \cancel{\dfrac{1}{2}} - \cancel{\dfrac{1}{3}}$	$k=2$
....	....
$\dfrac{1}{n\times(n+1)} = \cancel{\dfrac{1}{n}} - \dfrac{1}{n+1}$	$k=n$

Quand on additionne membre à membre toutes ces inégalités, tous les membres de gauche forment une somme qui est égale à la somme qui définit u_n (grâce à l'expression de u_n).
Ce ne sont pas de égalités séparées mais des égalités qu'on va toutes additionner membre à membre.
Les pointillés sont là pour signifier que l'on n'a pas écrit toutes les égalités (on ne peut pas puisque l'on n'a pas la valeur de n).
Pour écrire une somme en extension, on est obligé d'utiliser des pointillés.
Si on continue, on observe un principe d'annulation des termes d'une égalité avec la suivante (le 2^e terme d'une égalité s'annule toujours avec le 1^er du suivant). Ce qui permet de bien comprendre le principe des dominos additifs.
Quand on additionne les membres de droite, il y a des termes qui s'annulent deux à deux.
On ne rédige pas vraiment.

On écrit : $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

On obtient ainsi une formule sommatoire (on a défini u_n de manière explicite en fonction de n).

4°) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. On peut donc dire que la suite (u_n) converge vers 1.

Commentaire :

On a une espèce de passage de l'infini au fini au sens où l'on a une somme infinie de termes qui converge vers une limite finie.

$\boxed{14}$ $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ $\quad (n \geqslant 2)$

1°) Sens de variation de la suite (u_n)

On procède par différence.

$$\forall n \geq 2 \quad u_{n+1} - u_n = \sum_{k=2}^{k=n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2} = \left(\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right) - \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Tous les termes de la 2^e somme se retrouve dans la 1^ère somme donc les termes s'annulent.

Or $\forall n \geq 2 \quad \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ d'où $\forall n \geq 2 \quad u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 2.

2°) Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$

Or $k-1 \leq k$ d'où $k(k-1) \leq k^2$.

Donc comme les deux membres sont strictement positifs, par passage à l'inverse, on obtient : $\frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2}$ d'où $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

3°)

$$\boxed{\begin{array}{c} \frac{1}{2^2} \leq \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{3^2} \leq \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{n^2} \leq \cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n} \end{array}}$$

Donc $u_n \leq 1 - \frac{1}{n}$.

Or $\forall n \geq 2 \quad -\frac{1}{n} < 0$ d'où $\forall n \geq 2 \quad u_n \leq 1$.

Donc (u_n) est majorée par 1.

4°) Théorème sur les suites croissantes majorées (à citer : « Toute suite croissante majorée converge »).

La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc elle converge vers une limite *l*.

On peut dire $l \leq 1$.

Remarque :

On peut démontrer par diverses méthodes que cette limite est égale à $\frac{\pi^2}{6} - 1$, résultat qui ne manque pas de surprendre au premier abord.

$\boxed{15}$ Étude de deux suites imbriquées

Il faut remarquer que $(u_n + v_n)$ et $(v_n - u_n)$ sont bien des suites.

1°)

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{2u_n + v_n}{3} = \frac{1}{3}(v_n - u_n)$

Donc la suite $(v_n - u_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n - u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (v_0 - u_0)$

Or $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

2°) La suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.

Détail de la démarche :

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n \\ &= \frac{v_n - u_n}{3} \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n (v_0 - u_0) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} (v_0 - u_0) \end{aligned}$$

Or $u_0 < v_0$ donc $v_0 - u_0 > 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n > 0$.

D'où (u_n) est croissante à partir de l'indice 0.

Même raisonnement pour (v_n) :

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} - v_n &= \frac{u_n + 2v_n}{3} - v_n \\ &= \frac{u_n - v_n}{3} \\ &= \frac{1}{3}(u_n - v_n) \\ &= -\frac{1}{3}(v_n - u_n) \\ &= -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n (v_0 - u_0) \\ &= -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} (v_0 - u_0) \end{aligned}$$

Or $u_0 < v_0$ donc $v_0 - u_0 > 0$

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} - v_n < 0$.

D'où (v_n) est décroissante à partir de l'indice 0.

3°) (u_n) est croissante.

(v_n) est décroissante.

$\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4°) Démontrons que la suite $(u_n + v_n)$ est constante.

Méthode : Pour démontrer qu'une suite (w_n) est constante, on démontre que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1} = w_n$.

On démontre que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} + \frac{v_n + 2u_n}{3}$$
$$= \frac{3u_n + 3v_n}{3}$$
$$= u_n + v_n$$

5°) Comme la suite $(u_n + v_n)$ est constante, $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n + v_n = u_0 + v_0$.

On sait que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
Par conséquent, elles convergent vers la même limite.

Soit l la limite commune aux deux suites.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 2l$.

Or la suite $(u_n + v_n)$ est constante (tous les termes sont égaux à $u_0 + v_0$) donc $2l = u_0 + v_0$ d'où $l = \dfrac{u_0 + v_0}{2}$.

La limite commune des suites (u_n) et (v_n) est égale à $\dfrac{u_0 + v_0}{2}$.

16 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (technique de la quantité conjuguée).

Solution détaillée :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$
$$= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \times \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \times 1}$$
$$= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right) = +\infty$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Étude d'une solution erronée :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$
$$= \sqrt{n} \times \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{n}$$
$$= \sqrt{n} \times \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right) = 0 \end{array}\right\}$$ donc on rencontre une forme indéterminée du type « $0 \times \infty$ ».

Si on met n en facteur, on « retombe » sur une F.I. du type « $0 \times \infty$ ».

Remarque :

On peut écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$ mais le + ne présente pas d'intérêt.

17 $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \dfrac{\ln n}{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (limite de référence croissance comparée pour les fonctions : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

18 $\sqrt[3]{2011} = 12,6222...$ (petits points indispensables, on écrit le début de l'écriture décimale de $\sqrt[3]{2011}$; toutes les décimales écrites sont justes).

On choisit $N = 13$.

Solution détaillée :

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n = n^3$

Déterminons un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \geq 2011$.

$$u_n \geq 2011 \Leftrightarrow n^3 > 2011$$
$$\Leftrightarrow n > \sqrt[3]{2\,011}$$

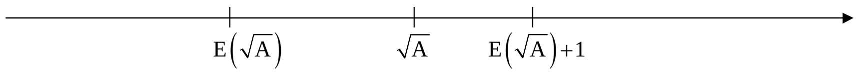
D'après la calculatrice, on a : $\sqrt[3]{2011} = 12,6222...$ (petits points indispensables, on écrit le début de l'écriture décimale de $\sqrt[3]{2011}$; toutes les décimales écrites sont justes).

On choisit $N = 13$.

Donc si $n \geqslant 13$, alors $u_n \geq 2011$.

19 $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n = n^2$

$$u_n \geq \text{A} \Leftrightarrow n^2 \geq \text{A}$$
$$\Leftrightarrow n \geq \sqrt{\text{A}}$$



On pose $N = \text{E}\left(\sqrt{\text{A}}\right) + 1$.

Si $n \geq \text{N}$, alors $u_n \geq \text{A}$.

On peut aussi écrire : $N = \text{E}\left(\sqrt{\text{A}} + 1\right)$ (en effet, pour tout réel x, on a : $\text{E}(x+1) = \text{E}(x) + 1$).

Exemple :

Prenons A = 1000.

D'après la calculatrice, on a : $\sqrt{1000} = 31,622776...$
Donc N = 32.

20 $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n$
A > 0 fixé

$$u_n \geq \text{A} \Leftrightarrow 2^n \geq \text{A}$$
$$\Leftrightarrow \ln 2^n \geq \ln \text{A}$$
$$\Leftrightarrow n \ln 2 \geq \ln \text{A}$$
$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln \text{A}}{\ln 2}$$ (pas de changement de sens dans l'inégalité car ln 2 > 0)

On pose $N = \text{E}\left(\frac{\ln \text{A}}{\ln 2}\right) + 1$.

Si $n \geqslant N$, alors $u_n \geq \text{A}$.

21 $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

Cherchons un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \in \left]-10^{-3}\,;10^{-3}\right[$.

$$u_n \in \left]-10^{-3}\,;10^{-3}\right[\Leftrightarrow |u_n| < 10^{-3}$$
$$\Leftrightarrow \left|\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right| < 10^{-3}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n < 10^{-3}$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{3}\right)^n < \ln 10^{-3}$$
$$\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{1}{3}\right) < -3\ln 10$$
$$\Leftrightarrow -n\ln 3 < -3\ln 10$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{-3\ln 10}{-\ln 3}$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{-3\ln 10}{-\ln 3}$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{3\ln 10}{\ln 3}$$

D'après la calculatrice, $\frac{3\ln 10}{\ln 3} = 6,28770...$

Si $n \geqslant 7$, alors $u_n \in \left]-10^{-3}\,;10^{-3}\right[$.

$\boxed{22}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

1°) Déterminons la limite de la suite (u_n).

On applique le théorème des gendarmes.
On procède ainsi car la suite $\left((-1)^n\right)$ n'a pas de limite.

La suite $\left((-1)^n\right)$ est bornée entre – 1 et 1.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \qquad -1 \leq (-1)^n \leq 1$

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad -\dfrac{1}{n} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

La suite (u_n) converge vers 0.

2°) Déterminons un entier naturel N tel que si $n > N$, alors $u_n \in \left]-10^{-2}\,;10^{-2}\right[$.

$$
\begin{aligned}
u_n \in \left]-10^{-2}\,;10^{-2}\right[\;&\Leftrightarrow\; |\,u_n\,| < 10^{-2}\\
&\Leftrightarrow\; \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < 10^{-2}\\
&\Leftrightarrow\; \frac{1}{n} < 10^{-2}\\
&\Leftrightarrow\; n > \frac{1}{10^{-2}}\\
&\Leftrightarrow\; n > 10^2\\
&\Leftrightarrow\; n > 100
\end{aligned}
$$

On peut donc prendre $N = 100$.

Si $n > 100$, alors $u_n \in \left]-10^{-2}\,;10^{-2}\right[$.