Exercices sur les anneaux et les corps

1 **Anneaux intègres**

Soit (A, +, ×) un anneau non réduit à {0}.
On rappelle que A est dit **sans diviseur de 0** si la relation $xy = 0$ entraîne $x = 0$ ou $y = 0$.
Un anneau commutatif et sans diviseur de 0 est appelé **anneau intègre**.
Démontrer que, dans un anneau intègre, tout élément non nul est régulier* pour la multiplication.

* On dit qu'un élément a de A est **régulier à droite** pour exprimer que pour tout couple (b, c) d'éléments de A, $ab = ac \Rightarrow b = c$.

On dit qu'un élément a de A est **régulier à gauche** pour exprimer que pour tout couple (b, c) d'éléments de A, $ba = ca \Rightarrow b = c$.

On dit qu'un élément a de A est **régulier s'il est régulier à droite et à gauche**.
On parle aussi d'élément **simplifiable à droite ou à gauche**.

2 Soit (A, +, ×) un anneau commutatif.
On pose : $\mathrm{E} = \{a \in \mathrm{A} \,/\, a^2 = a\}$.
Pour tout couple (a, b) d'éléments de E on pose : $a * b = a + b - 2ab$.
Démontrer que (E, $*$) est un groupe.

3 **Anneau des nombres duaux**

On définit dans $\mathbb{R}^2$ les lois de composition internes + et × en posant : $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$ et $(a, b) \times (a', b') = (a a', ab' + ba')$. On pose $\boldsymbol{D} = (\mathbb{R}^2, +, \times)$.

1°/ Démontrer que $\boldsymbol{D}$ est un anneau commutatif et unitaire (appelé **anneau des nombres duaux**).
2°) On pose $\varepsilon = (0, 1)$ (nombre dual).
a) Calculer les puissances ε^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Démontrer que pour tout nombre dual z de $\boldsymbol{D}$, il existe un couple (x, y) de réels tels que $z = (x, 0) + \varepsilon \times (y, 0)$.
En déduire le calcul de z^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3°) $\boldsymbol{D}$ est-il un corps ? Quels sont les éléments admettant un symétrique pour la loi × ?

4 1°) Démontrer que $\mathrm{K} = \{x + y\sqrt{2}, (x, y) \in \mathbb{Q}^2\}$.
2°) Déterminer tous les sous-corps de K.

Questions de cours

1 Définition d'un anneau. Définition et caractérisation d'un sous-anneau.

2 Définition d'un homomorphisme d'anneaux. Propriétés d'un homomorphisme d'anneaux.

3 Définition du noyau d'un homomorphisme d'anneaux. Propriété. Caractérisation de l'injectivité d'un homomorphisme d'anneau.

4 Éléments inversibles dans un anneau : définition d'un élément inversible ; l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau muni de la loi multiplicative est un groupe.

5 Formule du binôme de Newton dans un anneau. Cas particulier : développement de $(1_\mathrm{A} + x)^n$.
Autres identités dans un anneau.

6 Définition d'un corps ; définition d'un sous-corps. Illustrer à l'aide d'exemples.

7 On rappelle la définition d'un homomorphisme de corps.

Soit (K, +, •) et (K', +, •) deux corps (attention, on note de la même façon les lois additives et multiplicatives de chacun des deux corps).
Soit f une application de K dans K'.
On dit que f est un homomorphisme de corps lorsque f vérifie la condition suivante pour tout couple (x, y) d'éléments de K on a : $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(x \bullet y) = f(x) \bullet f(y)$.
1°) On note 1_K et $1_{\mathrm{K}'}$ les éléments neutres respectifs de K et K' pour leur loi multiplicative.
Vérifier que si f n'est pas l'application identiquement nulle, alors $f(1_\mathrm{K}) = 1_{\mathrm{K}'}$.
2°) Démontrer que tout homomorphisme de corps non nul est injectif.

8 **Règles de calcul dans un anneau**

Soit (A, +, ×) un anneau.
Démontrer que :
- Pour tout triplet (a, b, c) d'éléments de A, $a(b - c) = ab - ac$
  $(b - c)a = ba - ca$
- Pour tout élément x de A, $0_\mathrm{A}\, x = x 0_\mathrm{A} = 0_\mathrm{A}$.
- Pour tout couple (x, y) d'éléments de A, $x(-y) = -(xy) = (-x)y$.

9 Anneau produit. Anneau fonctionnel.

10 Soit a, b, c trois éléments d'un anneau intègre.
Compléter l'implication : $ab = ac \Rightarrow$ …. .

11 Intersection d'une famille de sous-anneaux. Sous-anneau engendré par une partie Ω de A.

12 Soit Ω un ensemble quelconque et A un anneau.
Démontrer que l'ensemble $\boldsymbol{F}$ (Ω, A) des fonctions de Ω dans A peut être muni d'une structure d'anneau.
Préciser alors les éléments neutres.
Cet anneau est-il intègre ?