TS

Exercices de probabilités simples

On rédigera chaque exercice avec précision.
Pour les calculs de combinaisons, on n'hésitera pas à utiliser la calculatrice dès que les calculs sont un peu pénibles.

1 On considère un dé tétraédrique dont les faces sont numérotées de 1 à 4 tel que la probabilité d'obtenir chaque face est inversement proportionnelle au numéro qu'elle porte.
Déterminer la loi de probabilité en tableau.
Donner les résultats en fractions irréductibles.

2 Dans une loterie, deux cent billets numérotés de 1 à 200 sont vendus.
Les billets gagnants sont ceux dont le numéro se termine par 7.
On achète un billet au hasard.
Calculer la probabilité de l'événement A : « le billet est gagnant ».
Donner le résultat en fraction irréductible.

3 Une urne contient trois boules rouges et cinq boules noires. On tire simultanément deux boules au hasard.
1°) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2°) Calculer la probabilité de l'événement A : « obtenir deux boules noires ».
Donner le résultat en fraction irréductible.

N.B. : il faut différencier les boules.

4 Une boîte contient neuf jetons numérotés de 1 à 9. On tire simultanément deux jetons au hasard.
1°) Calculer le nombre de résultats possibles.
2°) On considère les événements
A : « obtenir deux jetons portant un numéro pair » et B : « obtenir deux jetons portant un multiple de 3 ».
Calculer la probabilité des événements A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$.
Donner les résultats en fractions irréductibles.

5 Un sac contient cinq cartons marqués avec les lettres M, A, R, I, E. On tire deux cartons simultanément au hasard.
1°) Calculer le nombre de résultats possibles.
2°) Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « obtenir deux voyelles » ;
B : « obtenir deux consonnes » ;
C : « obtenir une voyelle et une consonne ».
Donner les résultats en fractions irréductibles.

6 Une urne contient quatre boules rouges et quatre boules vertes. On tire simultanément deux boules au hasard.
1°) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2°) Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « obtenir deux boules de même couleur » ;
B : « obtenir deux boules de couleurs différentes ».
Donner les résultats en fractions irréductibles.

7 Un club de sport compte 80 adhérents en natation, 95 adhérents en athlétisme et 125 adhérents en gymnastique.
Chaque adhérent pratique un seul sport.
On choisit au hasard trois adhérents du club.
1°) Calculer le nombre de choix possibles.
2°) Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « les trois personnes pratiquent la natation » ;
B : « les trois personnes pratiquent le même sport ».
Donner une valeur arrondie au dixième de chaque résultat.

8 Une urne contient quatre boules rouges numérotées de 1 à 4 et trois boules noires numérotées de 1 à 3. On tire une boule au hasard. On considère les événements
A : « la boule est noire », B : « la boule est rouge » et C : « la boule porte un numéro pair ».
Calculer la probabilité des événements A, B, C, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$.
Donner les résultats en fractions irréductibles.

9 Lors d'un recrutement, un chef d'entreprise doit choisir cinq personnes parmi vingt et un candidats : treize femmes et huit hommes.
1°) Calculer le nombre de choix possibles de recrutement.
2°) Calculer la probabilité des événements suivants
A : « il choisit au moins une femme » ;
B : « il choisit cinq personnes de même sexe » ;
C : « il choisit au moins une personne de chaque sexe ».
Donner une valeur arrondie au dixième de chaque résultat.

10 Une urne contient cinq boules rouges, trois boules noires et deux boules vertes. On extrait simultanément trois boules au hasard.
1°) Calculer le nombre de tirages choix possibles.
2°) Calculer la probabilité des événements suivants
A : « obtenir trois boules rouges » ;
B : « obtenir au moins une boule rouge » ;
C : « obtenir un tirage unicolore ».
Donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

11 Dans un jeu de trente-deux cartes, on extrait simultanément quatre cartes au hasard. On obtient ainsi une « main » de quatre cartes.
1°) Combien y a-t-il de mains possibles ?
2°) Calculer la probabilité des événements suivants
A : « les cartes sont des cœurs » ;
B : « il y a au moins un roi » ;
C : « il y a exactement un roi » ;
D : « il n'y a pas le roi de pique ».

Donner chaque résultat sous forme décimale en arrondissant éventuellement au millième.

12 Une urne contient six jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 6.
On en tire deux au hasard simultanément.
Calculer la probabilité des événements A : « obtenir deux numéros consécutifs » et B : « obtenir deux numéros dont la somme est égale à 7 ».
Donner chaque résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$\boxed{\textbf{13}}$ Un jury de cours d'assises est composé de huit jurés tirés au sort parmi quarante personnes.
Parmi ces personnes, il y a M.X et Mme Y.
Calculer la probabilité des événements suivants
A : « M.X et Mme Y font partie du jury » ;
B : « au moins l'une des deux fait partie du jury » ;
C : « une seule des deux fait partie du jury ».
Donner une valeur arrondie au millième de chaque résultat.

$\boxed{\textbf{14}}$ On considère un hexagone régulier ABCDEF. Faire un figure (rappel : la construction d'un hexagone inscrit dans un cercle s'effectue de la même façon que pour une rosace en reportant 6 fois le rayon du cercle au compas).
On choisit au hasard trois de ces sommets simultanément.
Calculer la probabilité d'obtenir
1°) un triangle équilatéral
2°) un triangle isocèle non équilatéral
3°) un triangle rectangle
4°) un triangle isocèle
Donner chaque résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$\boxed{\textbf{15}}$ Dans un collège de trois cents élèves, une enquête a donné les résultats suivants :
- 200 élèves aiment la lecture
- 180 élèves aiment le sport
- 140 élèves aiment le sport et la lecture.
On choisit un élève au hasard.
Quelle est la probabilité
1°) qu'il n'aime que la lecture ?
2°) qu'il n'aime que le sport ?
3°) qu'il aime à la fois le sport et la lecture ?
Donner chaque résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

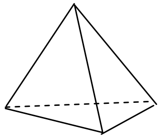
$\boxed{\textbf{16}}$ Dans une loterie, cent billets sont vendus et il y a sept billets gagnants.
Quelle est la probabilité de gagner au moins un lot si l'on achète deux billets ?
Donner la valeur arrondie au dixième.

$\boxed{\textbf{17}}$ Une urne contient six boules blanches et sept boules noires.
On tire simultanément trois boules au hasard.
1°) Quelle est la probabilité d'obtenir
a) trois boules blanches ?
b) trois boules noires ?
c) une boule blanche et deux boules noires ?
d) une boule noire et deux boules blanches ?
Donner chaque résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
2°) Calculer la somme des probabilités obtenues. Commenter.

Corrigés

1 Lancer d'un dé tétraédrique truqué

• Un **tétraèdre** est une pyramide à base triangulaire (comporte 4 faces).



• L'expression « la probabilité de chaque face est **inversement proportionnelle** au numéro qu'elle porte » signifie que la probabilité de chaque face est proportionnelle à l'inverse du numéro qu'elle porte.

On démarre ainsi :

Résultat	1	2	3	4	
Probabilité	$\frac{k}{1}$	$\frac{k}{2}$	$\frac{k}{3}$	$\frac{k}{4}$	Total = 1

On note k le coefficient de proportionnalité.

On sait que la somme des probabilités de tous les résultats est égale à 1.

On a donc : $\frac{k}{1}+\frac{k}{2}+\frac{k}{3}+\frac{k}{4}=1$ d'où $\frac{25k}{12}=1$ et par suite, $k=\frac{12}{25}$.

On obtient le tableau suivant :

Résultat	1	2	3	4	
Probabilité	$\frac{12}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	Total = 1

2 Il y a un nombre qui se termine par 7 par dizaine donc il y a 20 billets gagnants.

$P(\mathrm{A})=\frac{20}{200}=\frac{1}{10}$

Solution détaillée :

A : « le billet est gagnant »

Calculons la probabilité de A.

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité c'est-à-dire que l'expérience aléatoire peut être modélisée par une loi d'équiprobabilité P.

Le nombre de résultats possibles pour l'expérience aléatoire est égal à 200.
Le nombre de résultats possibles pour l'événement A est égal à 20 (car il y a 20 nombres entre 1 et 200 qui se terminent par 7, un par dizaine[*] : 7/17/27/37/47/57/67/77/87/97/107/117/127/137/147/157/167/177/187/197).

Évidemment, s'il y a 50 000 billets on n'écrirait pas la liste !
Donc d'après la formule de Laplace, on a : $P(\mathrm{A})=\frac{20}{200}=\frac{1}{10}$.

[*] L'argument « un par dizaine » est tout à fait rigoureux.

Autre façon : en utilisant les cardinaux

Rappel : le cardinal d'un ensemble est le nombre d'éléments de cet ensemble.

On note Ω l'univers des possibles de l'expérience aléatoire.
Ω est l'ensemble des billets.

card $\Omega = 200$
card A = 20

$P(\mathrm{A})=\frac{\text{card A}}{\text{card }\Omega}$

Autre rédaction (notée sur une feuille datée du 5 janv. 2010) :

L'achat a été effectué au hasard ; on peut adopter le modèle d'équiprobabilité, c'est-à-dire que l'on modélise par une loi d'équiprobabilité P.
Le nombre de résultats possibles pour l'expérience aléatoire est égal à 200.
Le nombre de résultats possibles pour A est égal à 20.

Donc $P(\mathrm{A})=\frac{20}{200}=\frac{1}{10}$.

3 1°) 28 ; 2°) $P(\mathrm{A})=\frac{5}{14}$

Version rédigée :

urne | 3 boules rouges
| 5 boules noires

On tire simultanément 2 boules au hasard.

Il faut différencier les boules mais ce n'est pas la peine de l'écrire.

1°) **Déterminons le nombre de tirages possibles.**

Nous sommes dans le cas d'un tirage simultané.

Le nombre de tirages possibles est égal au nombre de combinaisons de 2 éléments pris parmi 8.

$$\binom{8}{2}=\frac{8!}{2!\times 6!}=\frac{8\times 7}{1\times 2}=28$$

Il y a 28 tirages possibles.

2°) **Calculons la probabilité de l'événement A : « obtenir deux boules noires ».**

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité c'est-à-dire que l'on peut modéliser l'expérience aléatoire par une loi d'équiprobabilité *P*.

Le nombre de résultats possibles pour A est $\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!\times 3!}=\frac{5\times 4}{2\times 1}=10$.

D'après la formule de Laplace, on a : $P(\mathrm{A})=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$.

$\boxed{4}$ 1°) $\binom{9}{2}=\frac{9!}{2!\times 7!}=36$

2°) (NB : 3 est un multiple de 3) $P(\mathrm{A})=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$; $P(\mathrm{B})=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

L'événement A ∩ B est l'événement impossible ($\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\varnothing$) donc $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0$.

$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

Version rédigée :

Une boîte contient neuf jetons numérotés de 1 à 9.

On tire simultanément 2 jetons au hasard.

1°) Calculons le nombre de résultats possibles.

Nous sommes dans le cas d'un tirage simultané.

Le nombre de tirages possibles est égal au nombre de combinaisons de 2 éléments pris parmi 9.

$\binom{9}{2}=\frac{9!}{2!\times 7!}=36$

Il y a 36 résultats possibles.

2°) **Calculs de probabilités.**

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité c'est-à-dire que l'on peut modéliser l'expérience aléatoire par une loi d'équiprobabilité *P*.

• A : « obtenir deux nombres pairs »

Le nombre de résultats possibles pour A est $\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!\times 2!}=\frac{4\times 3}{2\times 1}=6$.

D'après la formule de Laplace, on a : $P(\mathrm{A})=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

• B : « obtenir deux multiples de 3 »

Il y a 3 multiples de 3 compris entre 1 et 9 au sens large : 3, 6, 9 (1 n'est pas un multiple de 3 !).

Le nombre de résultats possibles pour B est $\binom{3}{2}=\frac{3!}{2!\times 1!}=3$.

D'après la formule de Laplace, on a : $P(\mathrm{B})=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

• A ∩ B : « obtenir deux nombres pairs et multiples de 3 »

Il y a un seul nombre pair et multiple de 3 compris entre 1 et 9 au sens large donc comme on tire deux jetons simultanément, il est impossible d'obtenir deux nombres pairs et multiples de 3.
L'événement A ∩ B est l'événement impossible ($\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\varnothing$; les événements A et B sont incompatibles) donc $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0$.

• A ∪ B : « obtenir deux nombres pairs ou obtenir deux multiples de 3 »

$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-0=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

$\boxed{5}$ 1°) 10 ; 2°) $P(\mathrm{A})=\frac{3}{10}$; $P(\mathrm{B})=\frac{1}{10}$; $P(\mathrm{C})=\frac{3}{5}$

Version rédigée :

1°) **Calculons le nombre de résultats possibles.**

Il y a $\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!\times 3!}=10$ tirages possibles.

2°) **Calculs de probabilités.**

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité c'est-à-dire que l'on peut modéliser l'expérience aléatoire par une loi d'équiprobabilité P^*.

* une seule fois au début de la rédaction

• A : « obtenir deux voyelles »

Le nombre de résultats possibles pour A est $\binom{3}{2}=\frac{3!}{2!\times 1!}=3$.

D'après la formule de Laplace, on a : $P(\mathrm{A})=\frac{3}{10}$.

• B : « obtenir deux consonnes »

Le nombre de résultats possibles pour B est $\binom{2}{2}=1$.

D'après la formule de Laplace, on a : $P(\mathrm{B})=\frac{1}{10}$.

• C : « obtenir une voyelle et une consonne »

Le nombre de résultats possibles pour l'événement C est égal à $\dbinom{3}{1}\times\dbinom{2}{1}=3\times2=6$.

On tire une voyelle **puis** une consonne

$$\boxed{\dbinom{3}{1}\times\dbinom{2}{1}=\dfrac{3!}{1!\times2!}\times\dfrac{2!}{1!\times1!}=6}$$

D'après la formule de Laplace, on a : $P(\text{C})=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$.

On peut aussi raisonner par cas contraires.

$$\begin{aligned}P(\text{C})&=P\left(\overline{\text{A}\cup\text{B}}\right)\\&=1-P(\text{A}\cup\text{B})\\&=1-\left[P(\text{A})+P(\text{B})\right]\quad\text{(car les événements A et B sont incompatibles)}\\&=\dfrac{3}{5}\end{aligned}$$

6

1°) **Calculons le nombre de résultats possibles.**

Le nombre de résultats est égal à $\dbinom{8}{2}=\dfrac{8!}{2!\times6!}=\dfrac{7\times8}{2}=28$.

2°) **Calculs de probabilités.**

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité c'est-à-dire que l'on peut modéliser l'expérience aléatoire par une loi d'équiprobabilité *P*.

• A : « obtenir deux boules de la même couleur »

Le nombre de résultats possibles pour A est $\dbinom{4}{2}+\dbinom{4}{2}=12$.

D'après la formule de Laplace, on a : $P(\text{A})=\dfrac{12}{28}=\dfrac{3}{7}$.

• B : « obtenir deux boules de couleurs différentes »

$\text{B}=\overline{\text{A}}$ donc $P(\text{B})=P\left(\overline{\text{A}}\right)=1-P(\text{A})=1-\dfrac{3}{7}=\dfrac{4}{7}$.

7

1°) Le nombre de résultats possibles est égal au nombre de combinaisons de 3 éléments pris parmi 300 :

$\dbinom{300}{3}=\dfrac{300!}{3!\times297!}=\dfrac{300\times299\times298}{1\times2\times3}=4\ 455\ 100$

Remarque pour le calcul de $\dbinom{300}{3}$ avec la calculatrice :

On peut utiliser la touche nCr.

Sinon, il faut écrire $\dbinom{300}{3}$ sous la forme donnée ci-dessus en simplifiant les deux plus grandes factorielles.

En effet, le calcul de 300 ! dépasse les capacités de la calculatrice (la calculatrice dit qu'elle est « overflow » ou affiche « MATH ERROR »).

2°) Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité c'est-à-dire que l'on peut modéliser l'expérience aléatoire par une loi d'équiprobabilité *P*.

• A : « les trois personnes pratiquent la natation »

Le nombre de résultats possibles pour A est $\dbinom{80}{3}=82\ 160$

D'après la formule de Laplace, on a : $P(\text{A})=\dfrac{82\ 160}{4\ 455\ 100}=\dfrac{4\ 108}{222\ 755}=0{,}018\ldots$

(attention à bien écrire les trois petits points car on a utilisé le signe =).

• B : « les trois personnes pratiquent le même sport »

Le nombre de résultats possibles pour B est $\dbinom{80}{3}+\dbinom{95}{3}+\dbinom{125}{3}=538325$.

$P(\text{B})=\dfrac{538\ 325}{4\ 455\ 100}=\dfrac{21\ 533}{178\ 204}=0{,}12\ldots$

8 Écrire l'univers Ω en numérotant les boules ; $P(\text{A})=\dfrac{3}{7}$; $P(\text{B})=\dfrac{4}{7}$; $P(\text{C})=\dfrac{3}{7}$; $P(\text{A}\cap\text{B})=0$ (A et B sont incompatibles) ; $P(\text{A}\cap\text{C})=\dfrac{1}{7}$; $P(\text{B}\cap\text{C})=\dfrac{2}{7}$; $P(\text{A}\cup\text{B})=1$; $P(\text{B}\cup\text{C})=\dfrac{5}{7}$; $P(\text{A}\cap\text{C})=\dfrac{5}{7}$.

Version rédigée :

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité c'est-à-dire que l'on peut modéliser l'expérience aléatoire par une loi d'équiprobabilité *P*.
Le nombre de résultats possibles pour l'expérience aléatoire est 7.
Le nombre de résultats possibles pour A est 3.
Le nombre de résultats possibles pour B est 4.
Le nombre de résultats possibles pour C est 3.
On applique la formule de Laplace

A : « la boule tirée est noire »

$P(\text{A})=\dfrac{3}{7}$

B : « la boule tirée est rouge »

$P(\text{B})=\frac{4}{7}$

C : « la boule tirée porte un numéro pair »

$P(\text{C})=\frac{3}{7}$

Il n'y a pas de formule pour l'intersection de deux événements ; c'est juste de la déduction.

$P(\text{A}\cap\text{B})=0$ (car A et B sont incompatibles)

$P(\text{A}\cap\text{C})=\frac{1}{7}$

$P(\text{B}\cap\text{C})=\frac{2}{7}$

$P(\text{A}\cup\text{B})=P(\text{A})+P(\text{B})-P(\text{A}\cap\text{B})=1$

$P(\text{B}\cup\text{C})=P(\text{B})+P(\text{C})-P(\text{B}\cap\text{C})=\frac{5}{7}$

$P(\text{A}\cup\text{C})=P(\text{A})+P(\text{C})-P(\text{A}\cap\text{C})=\frac{5}{7}$

$\boxed{9}$ 1°) Le nombre de résultats possibles est égal à $\binom{21}{5}=20349$.

2°) P(A) ≈ 0,937 ; P(B) ≈ 0,066 ; P(C) ≈ 0,934 (on notera que l'événement C est l'événement contraire de B)
Valeurs arrondies au millième dans chaque cas.

Solution détaillée :

21 candidats | 13 femmes ; 8 hommes

On choisit 5 candidats au hasard.

1°) Le nombre de résultats possibles est égal à $\binom{21}{5}=20349$.

2°) **Calculs de probabilités**

A : « il choisit au moins une femme »

Pour calculer la probabilité de A, on a plusieurs moyens pour calculer le nombre de résultats possibles pour A.

1ère méthode : On procède par cas contraire.

Le nombre de cas possibles pour A est égal à : $\binom{21}{5}-\binom{8}{5}=20349-56=20293$.

D'après la formule de Laplace, on a $P(\text{A})=\frac{20\ 293}{20\ 349}=0,99724802\ldots$

On peut aussi écrire (c'est même peut-être plus clair) :

$P(\text{A})=1-P(\overline{\text{A}})$

$$=1-\frac{\binom{8}{5}}{\binom{21}{5}}$$

2e méthode : on procède par disjonction de cas. On calcule le nombre de choix possibles :
- comprenant exactement 1 femme et 4 hommes ;
- comprenant exactement 2 femmes et 3 hommes ;
- comprenant exactement 3 femmes et 2 hommes ;
- comprenant exactement 4 femmes et 1 homme ;
- comprenant exactement 5 femmes (et aucun homme).

On additionne les résultats trouvés (on obtient bien sûr le même résultat qu'avec la 1ère méthode mais c'est beaucoup plus long).

En revanche le nombre de résultats possibles pour A n'est pas égal à : $\binom{13}{1}\times\binom{20}{4}$ (ce calcul ne correspond à rien).

13 car il y a 13 femmes

B : « il choisit 5 personnes de même sexe »

Le nombre de cas possibles pour B est égal à : $\binom{13}{5}+\binom{8}{5}=1343$.

D'après la formule de Laplace, on a $P(\text{B})=\frac{1\ 343}{20\ 349}=0,066\ldots$

C : « il choisit au moins une personne de chaque sexe »

$\text{C}=\overline{\text{B}}$ donc $P(\text{C})=1-P(\text{B})=0,934\ldots$

$\boxed{10}$ 1°) 120 ; 2°) $P(\text{A})=\frac{1}{12}$; $P(\text{B})=\frac{11}{12}$; $P(\text{C})=\frac{11}{120}$.

Solution détaillée :

1°) On prend trois boules **simultanément** dans l'urne donc il n'y a pas d'ordre. On calcule le nombre de résultats possibles grâce aux combinaisons.

Il y a $\binom{10}{3}=120$ tirages possibles.

2°) **Calculs de probabilités.**

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité c'est-à-dire que l'expérience aléatoire peut être modélisée par une loi d'équiprobabilité P.

• A : « obtenir trois boules rouges »

Le nombre de résultats possibles pour A est égal à $\binom{5}{3}=10$ (puisqu'il y a 5 boules rouges).

$P(\text{A})=\dfrac{10}{120}=\dfrac{1}{12}$

• B : « obtenir au moins une boule rouge »

On raisonne par cas contraire.

Le nombre de résultats possibles pour B est égal à $\binom{10}{3}-\binom{5}{3}=110$

On prend trois boules parmi celles qui ne sont pas rouges

$P(\text{B})=\dfrac{110}{120}=\dfrac{11}{12}$

On peut aussi dire que l'événement contraire de B est l'événement $\overline{\text{B}}$: « obtenir aucune boule rouge ».

Donc : $P(\text{B})=1-P\left(\overline{\text{B}}\right)=1-\dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}=\dfrac{11}{12}$

• C : « obtenir un tirage unicolore »

Le nombre de résultats possibles pour C est égal à $\binom{5}{3}+\binom{3}{3}=10+1=11$.

En effet, un tirage unicolore est constitué soit de 3 boules rouges soit de 3 boules noires (il n'y a que deux boules vertes, donc comme on tire trois boules, un tirage unicolore ne peut être constitué de 3 boules vertes).

$P(\text{C})=\dfrac{11}{120}$

$\boxed{11}$ 1°) 35 960 ; 2°) $P(\text{A})\approx 0{,}002$; $P(\text{B})\approx 0{,}43$; $P(\text{B})\approx 0{,}36$; $P(\text{C})\approx 0{,}36$; $P(\text{D})\approx 0{,}875$

Solution détaillée :

Jeu de 32 cartes.
On tire simultanément 4 cartes.

1°) Il y a $\binom{32}{4}=35\,960$ mains possibles.

2°) **Calculs de probabilités.**

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité c'est-à-dire que l'expérience aléatoire peut être modélisée par une loi d'équiprobabilité *P*.

• A : « les cartes sont des cœurs »

Le nombre de résultats possibles pour A est égal à $\binom{8}{4}=70$.

$P(\text{A})=\dfrac{70}{35\,960}=0{,}002...$

• B : « il y a au moins un roi »

Le nombre de résultats possibles pour B est égal à $\binom{32}{4}-\binom{28}{4}=15\,485$.

$P(\text{B})=\dfrac{15\,485}{35\,960}=0{,}43...$

• C : « il y a exactement un roi »

Le nombre de résultats possibles pour C est égal à $\binom{4}{1}\times\binom{28}{3}=13\,104$.

$P(\text{C})=\dfrac{13\,104}{35\,960}=0{,}36...$

• D : « il n'y a pas le roi de pique »

Le nombre de résultats possibles pour D est égal à $\binom{31}{4}=31\,465$.

$P(\text{D})=\dfrac{31\,465}{35\,960}=0{,}875...$

$\boxed{12}$ Pour chacune des deux probabilités, on effectue le décompte directement.

On note J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6 les jetons de l'urne.

Le nombre de résultats possibles pour l'expérience aléatoire est égal à : $\binom{6}{2}=\dfrac{6\times 5}{2}=15$

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité c'est-à-dire que l'expérience aléatoire peut être modélisée par une loi d'équiprobabilité *P*.

• A : « obtenir deux numéros consécutifs »

Il y a 5 tirages possibles pour A : $\{J_1 ; J_2\}$, $\{J_2 ; J_3\}$, $\{J_3 ; J_4\}$, $\{J_4 ; J_5\}$, $\{J_5 ; J_6\}$.

On observera l'écriture entre accolades des résultats.
Il s'agit de liste non ordonnées ou de sous-ensembles de l'univers de possibles Ω associé à l'expérience aléatoire.

$$P(\text{A})=\frac{5}{15}$$
$$=\frac{1}{3}$$

• B : « obtenir deux numéros dont la somme est égale à 7 »

Il y a 3 tirages possibles pour B : $\{J_1 ; J_6\}$, $\{J_2 ; J_5\}$, $\{J_3 ; J_4\}$.

$$P(\mathrm{B}) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Remarque :

Pour les numéros consécutifs, on calcule les cas possibles directement ; cette situation est aisément généralisable à *n* jetons).

$\boxed{\textbf{13}}$ 8 jurés tirés au hasard parmi 40.

Le nombre de résultats possibles est égal à $\dbinom{40}{8} = 76\ 904\ 685$.

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité c'est-à-dire que l'expérience aléatoire peut être modélisée par une loi d'équiprobabilité *P*.

• A : « M. X et Mme Y font partie du jury »

Le nombre de résultats possibles pour A est égal à $\dbinom{38}{6} = 2\ 760\ 681$.

(Pour réaliser un jury comprenant M. X et Mme Y, on choisit 6 personnes parmi les 38 restantes auxquelles ont rajoute M. X et Mme Y).

$$P(\mathrm{A}) = \frac{2\ 760\ 681}{76\ 901\ 685} = 0{,}035...$$

$P(\mathrm{A}) \approx 0{,}036$ (valeur arrondie au millième)

• B : « au moins l'une des deux personnes (M. X ou Mme Y) fait partie du jury »

Pour l'événement B : « au moins l'une des deux fait partie du jury », on procède par événement contraire.
Le contraire de l'événement B est « ni M.X ni Mme Y ne font partie du jury ».

Le nombre de résultats possibles pour $\overline{\mathrm{B}}$ est égal à $\dbinom{38}{8} = 48\ 903\ 492$.

On peut aussi déterminer directement le nombre de résultats possibles pour B mais le calcul est un peu compliqué. Il faut dénombrer les cas où
- M.X fait partie du jury mais pas Mme Y ;
- Mme Y fait partie du jury mais pas M.X ;
- M.X et Mme Y font partie du jury

Seul un dénombrement fait ainsi par disjonctions de cas, permet d'obtenir le nombre de résultats possibles pour B.

Le nombre de résultats possibles pour B est égal à $76\ 904\ 685 - 48\ 903\ 492 = 28\ 001\ 193$.

$$P(\mathrm{B}) = \frac{28\ 001\ 193}{76\ 901\ 685} = 0{,}36...$$

$P(\mathrm{B}) \approx 0{,}36$ (valeur arrondie au millième)

• C : « une seule des deux personnes (M. X ou Mme Y) fait partie du jury »

On a : $\mathrm{C} = \mathrm{B} \setminus \mathrm{A}$ avec $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ (on raisonne ici avec les ensembles).
Donc $P(\mathrm{C}) = P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A})$.

$P(\mathrm{C}) \approx 0{,}33$ (valeur arrondie au millième)

Autre méthode possible pour le calcul de *P*(C) :

On raisonne par **disjonction de cas**.

- Nombre de cas où M. X fait partie du jury et Mme Y ne fait pas partie du jury

- Nombre de cas où M. X ne fait pas partie du jury et Mme Y fait partie du jury.

$\boxed{\textbf{14}}$ $P(\mathrm{E}_1) = \dfrac{1}{10}$; $P(\mathrm{E}_2) = \dfrac{3}{10}$; $P(\mathrm{E}_3) = \dfrac{3}{5}$; $P(\mathrm{E}_4) = \dfrac{2}{5}$

Solution détaillée :

Il faut absolument faire une ou plusieurs figures propres assez grandes en utilisant le compas.
Pour calculer les probabilités demandées, on regarde chaque fois la figure.

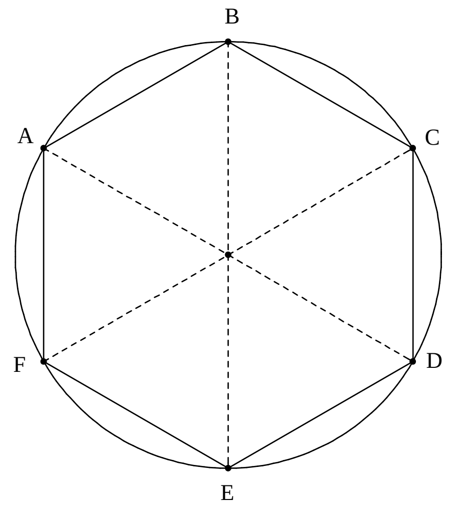
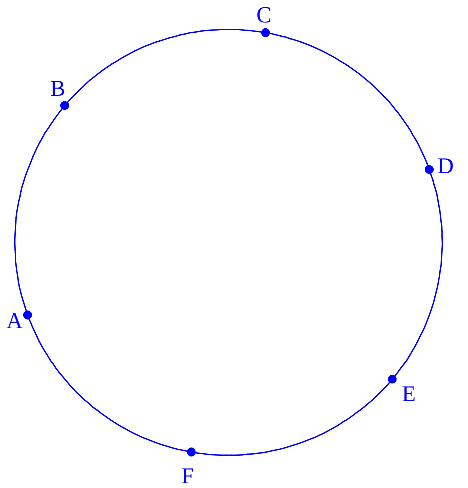


Figure d'un ancien élève avec les traces de compas que je n'ai pas reproduite ici (le samedi 10-8-2013).



Il y a $\binom{6}{3} = 20$ résultats possibles pour l'expérience aléatoire.

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité c'est-à-dire que l'expérience aléatoire peut être modélisée par une loi d'équiprobabilité *P*.

• Calculons la probabilité de l'événement S_1 : « obtenir un triangle équilatéral ».

On peut former deux triangles équilatéraux à partir des sommets de l'hexagone ABCDEF : il s'agit des triangles ACE et BDF (on peut le démontrer facilement en utilisant les rotations).

Avec les points marqués sur le cercle, on peut former deux triangles équilatéraux seulement.

Ainsi, le nombre de résultats possibles pour l'événement S_1 est égal à 2.

$$P(S_1) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

• Calculons la probabilité de l'événement S_2 : « obtenir un triangle isocèle non équilatéral ».

On peut former six triangles isocèles non équilatéraux à partir des sommets de l'hexagone ABCDEF. Il y en a un par sommet. On les obtient en joignant un sommet de l'hexagone aux deux sommets qui l'encadrent.
Il s'agit des triangles ABF, BCA, CDB, DEC, EFD, FAE (on peut le démontrer facilement).
Ainsi, le nombre de résultats possibles pour l'événement S_2 est égal à 6.

$$P(S_2) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

• Calculons la probabilité de l'événement S_3 : « obtenir un triangle rectangle ».

On peut former douze triangles rectangles à partir des sommets de l'hexagone ABCDEF. Il y en a deux par sommet. Il s'agit des triangles ABE, ADF, BDA, BCF, CDA, CEB, DEB, DFC, EFC, EAD, CFA, FBE (on peut le démontrer facilement en utilisant la propriété d'un triangle inscrit dans un cercle :
« Un triangle inscrit dans un cercle dont un côté est un diamètre est rectangle »).

Ainsi, le nombre de résultats possibles pour l'événement E_3 est égal à 6.

$$P(S_3) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

• Calculons la probabilité de l'événement S_4 : « obtenir un triangle isocèle ».

L'événement S_4 est la réunion des événements S_1 et S_2.
$S_4 = S_1 \cup S_2$
De plus, S_1 et S_2 sont incompatibles car ils n'ont pas de résultats en commun ($S_1 \cap S_2 = \varnothing$)
donc $P(S_4) = P(S_1) + P(S_2) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$.

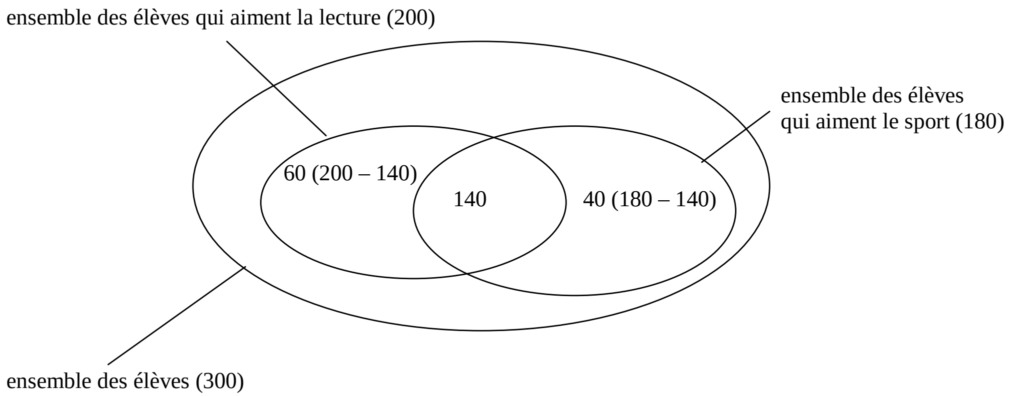
N.B. : En termes d'inclusion, l'ensemble des triangles équilatéraux est inclus dans l'ensemble des triangles isocèles : $\mathcal{T}_{\text{équ}} \subset \mathcal{T}_{\text{is}}$.

Ainsi, on a une inclusion : l'événement S_1 est inclus dans l'événement S_4.

Remarque sur les notations : On évitera d'employer les lettres A, B, C, D, E, F pour désigner les événements dont on doit calculer les probabilités car elles désignent des sommets de l'hexagone régulier.

$\boxed{\textbf{15}}$ Faire une représentation sous forme de « patatoïdes » (diagramme de Venn).

Il y a des élèves qui n'aiment ni la lecture ni le sport (c'est implicite ; ce n'est pas dit clairement dans l'énoncé).



300 élèves
- 200 aiment la lecture
- 180 aiment le sport
- 140 aiment la lecture et le sport

On choisit un élève au hasard.

Il faut définir des événements A, B, C.

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité.

Le nombre de résultats possibles pour l'expérience aléatoire est égal à 300.

1°) **A : « l'élève choisi n'aime que la lecture »**

Le nombre de résultats possibles pour A est 60.

D'après la formule de Laplace,

$$P(\mathrm{A})=\frac{60}{300}$$
$$=\frac{1}{5}$$

2°) **B : « l'élève choisi n'aime que le sport »**

Le nombre de résultats possibles pour B est 60.

D'après la formule de Laplace,

$$P(\mathrm{B})=\frac{40}{300}$$
$$=\frac{2}{15}$$

3°) **C : « l'élève choisi aime le sport et la lecture »**

Le nombre de résultats possibles pour C est 140.

D'après la formule de Laplace,

$$P(\mathrm{C})=\frac{140}{300}$$
$$=\frac{7}{15}$$

16 $P(\mathrm{A})=0{,}14...$

Solution détaillée :

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité c'est-à-dire que l'expérience aléatoire peut être modélisée par une loi d'équiprobabilité P.

Le nombre de résultats possibles pour l'expérience aléatoire est égal à $\binom{100}{2}=4950$.

A : « gagner au moins un lot »

1$^{\text{ère}}$ méthode :

On raisonne par **cas contraire**.

Le nombre de résultats possibles pour A est égal à : $\binom{100}{2}-\binom{93}{2}=672$.

car il y a 93 billets qui ne sont pas gagnants

(On pourrait écrire $\text{card A} = \text{card }\Omega - \text{card }\overline{\text{A}}$.)

$$P(\mathrm{A})=\frac{672}{4\,950}=0{,}14...$$

2$^{\text{e}}$ méthode :

On raisonne par **disjonction de cas.**

Le nombre de cas où l'on gagne exactement un lot est égal à : $\binom{7}{1}\times\binom{93}{1}$.

Le nombre de cas où l'on gagne exactement deux lots est égal à : $\binom{7}{2}$.

On achève facilement la démarche.

Remarques :

① On peut aussi calculer $P(\overline{\mathrm{A}})=\dfrac{\binom{93}{2}}{\binom{100}{2}}$.

Donc $P(\mathrm{A})=1-P(\overline{\mathrm{A}})=1-\dfrac{\binom{93}{2}}{\binom{100}{2}}=0{,}14...$

Cette seconde façon de faire est en fait meilleure que la première.

② Il faut toujours commencer par définir le (ou les) événement(s) dont on doit calculer la probabilité.
Ici, il ya un seul événement que l'on note A.

17 1°) $P(\mathrm{A})=\frac{10}{143}$; $P(\mathrm{B})=\frac{35}{286}$; $P(\mathrm{C})=\frac{63}{143}$; $P(\mathrm{D})=\frac{105}{286}$; 2°) $P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})+P(\mathrm{C})+P(\mathrm{D})=1$.

Solution détaillée :

1°) Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité c'est-à-dire que l'expérience aléatoire peut être modélisée par une loi d'équiprobabilité P.

Le nombre de résultats possibles pour l'expérience aléatoire est égal à $\binom{13}{3}=286$.

• A : « obtenir trois boules blanches »

Le nombre de résultats possibles pour A est égal à $\binom{6}{3}=20$.

$$P(\mathrm{A})=\frac{20}{286}=\frac{10}{143}$$

• B : « obtenir trois boules noires »

Le nombre de résultats possibles pour B est égal à $\binom{7}{3}=35$.

$P(\text{B})=\dfrac{35}{286}$

• C : « obtenir une boule blanche et deux boules noires »

Le nombre de résultats possibles pour C est égal à $\dbinom{6}{1}\times\dbinom{7}{2}=126$.

$P(\text{C})=\dfrac{126}{286}=\dfrac{63}{143}$

• D : « obtenir une boule noire et deux boules blanches »

Le nombre de résultats possibles pour D est égal à $\dbinom{7}{1}\times\dbinom{6}{2}=105$.

$P(\text{D})=\dfrac{105}{286}$

2°) On trouve : $P(\text{A})+P(\text{B})+P(\text{C})+P(\text{D})=1$.

On pouvait s'attendre à ce résultat sans faire de calcul car les événements A, B, C, D forment une **partition** de l'univers Ω des possibles (en effet, ils sont tous non vides et sont deux à deux disjoints) donc la somme des probabilités de ces événements est égale à 1.

Dans la rédaction, « D'après la formule de Laplace » est facultatif.