TS

Exercices sur les équations différentielles (2)

$\boxed{1}$ On considère l'équation différentielle $y'+2y=x^2 \quad (\text{E})$.

Déterminer trois réels *a*, *b*, *c* tels que la fonction *u* définie par $u(x)=ax^2+bx+c$ soit une solution particulière de (E).

$\boxed{2}$ On considère l'équation différentielle $y'+y=x \quad (\text{E})$.

1°) Déterminer deux réels *m* et *p* tels que la fonction affine *u* définie par $u(x)=mx+p$ soit une solution particulière de (E).

2°) Résoudre l'équation différentielle homogène associée (E_0).

3°) Soit *v* une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer l'équivalence suivante : « *v* est solution de $(\text{E}) \Leftrightarrow v-u$ est solution de (E_0) ».

En déduire les solutions de (E).

$\boxed{3}$ On considère l'équation différentielle $y'-2y=8x^2-8x \quad (\text{E})$.

1°) Vérifier que la fonction *u* définie par $u(x)=-4x^2$ est une solution particulière de (E).

2°) Résoudre l'équation différentielle homogène associée (E_0).

3°) Soit *v* une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer l'équivalence suivante : « *v* est solution de $(\text{E}) \Leftrightarrow v-u$ est solution de (E_0) ».

En déduire les solutions de (E).

$\boxed{4}$ On considère l'équation différentielle $y'+3y=4\text{e}^{-2x} \quad (\text{E})$.

1°) Déterminer un réel λ tel que la fonction *u* définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=\lambda\text{e}^{-2x}$ soit une solution particulière de (E).

2°) Résoudre l'équation différentielle homogène associée (E_0).

3°) Soit *v* une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer l'équivalence suivante : « *v* est solution de $(\text{E}) \Leftrightarrow v-u$ est solution de (E_0) ».

En déduire les solutions de (E).

Réponses

$\boxed{1}$ Attention à la rédaction. $a=\frac{1}{2}$; $b=-\frac{1}{2}$; $c=\frac{1}{4}$.

$\boxed{2}$ 1°) $u(x)=x-1$; 3°) $v(x)=k\text{e}^{-x}+x-1 \quad (k\in\mathbb{R})$

$\boxed{3}$ 3°) $v(x)=k\text{e}^{2x}-4x^2 \quad (k\in\mathbb{R})$

$\boxed{4}$ 1°) $\lambda=4$; 3°) $v(x)=k\text{e}^{-3x}+4\text{e}^{-2x} \quad (k\in\mathbb{R})$

Remarque sur les exercices $\boxed{2}$ à $\boxed{4}$:
Il n'y a pas besoin d'apprendre la méthode en terminale ; la méthode sera redétaillée à chaque fois.

Solutions détaillées

$\boxed{1}$ $y'+2y=x^2 \quad (\text{E})$

Déterminons trois réels *a*, *b*, *c* tels que la fonction *u* définie par $u(x)=ax^2+bx+c$ soit une solution particulière de (E).

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad u'(x)=2ax+b$

u est solution de $(\text{E}) \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad u'(x)+2u(x)=x^2$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad (2ax+b)+2(ax^2+bx+c)=x^2$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad 2ax^2+(2a+2b)x+b+2c=x^2$

(on a développé et regroupé les termes semblables)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a=1 \\ 2a+2b=0 \\ b+2c=0 \end{cases}$ (car $x^2=1x^2+0x+0$; on identifie les coefficients*)

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \\ c=\frac{1}{4} \end{cases}$

* Théorème d'égalité de deux polynômes :

Des polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et leurs coefficients des termes de même degré sont égaux.

Conclusion : La fonction *u* définie par $u(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ est une solution particulière de (E).

$\boxed{2}$ $y'+y=x$ $\quad(\mathrm{E})$

Le but de l'exercice est de résoudre (E) (c'est un point à bien comprendre).

1°) Déterminons deux réels m et p tels que la fonction affine u définie par $u(x)=mx+p$ soit une solution particulière de (E).

u est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad u'(x)=m$

u est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad u'(x)+u(x)=x$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad m+(mx+p)=x$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad \boxed{m}\,x+\boxed{m+p}=\boxed{1}\,x+\boxed{0}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m=1 & (\text{coefficient de } x) \\ m+p=0 & (\text{coefficient constant}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ p=-1 \end{cases}$

Conclusion : La fonction affine u définie par $u(x)=x-1$ est une solution particulière de (E).

Remarque : Quand on commence la recherche avec les équivalences, on ne met pas le mot « particulière » mais on le met dans la conclusion.

On applique le principe d'égalité de deux polynômes : « Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les coefficients des monômes de même degré sont égaux. »

2°) Cette question est indépendante de la précédente.

Résolvons l'équation différentielle homogène associée (E_0).

L'équation homogène associée (E_0) s'écrit $y'+y=0$ soit $y'=-y$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec $a=-1$ (chapitre « Équations différentielles (1) ».

Les solutions de (E_0) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\mathrm{e}^{-x}$ $\quad(k\in\mathbb{R})$.

3°) v est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrons que v est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $v-u$ est solution de (E_0).

Commentaire : C'est la partie la plus abstraite.

$v-u$ est solution de (E_0) $\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad (v-u)'(x)+(v-u)(x)=0$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v'(x)-u'(x)+v(x)-u(x)=0$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v'(x)+v(x)=\underbrace{u'(x)+u(x)}$

u est solution particulière de (E)

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v'(x)+v(x)=x$

$\Leftrightarrow v$ est solution de (E)

Déduisons-en les solutions de (E).

Rappel : Le but de l'exercice est de résoudre (E) d'où l'importance de cette dernière étape.

v est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $v-u$ est solution de (E_0)

$\Leftrightarrow$ $v-u$ est définie par $(v-u)(x)=k\mathrm{e}^{-x}$ $\quad(k\in\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v(x)-u(x)=k\mathrm{e}^{-x}$ $\quad(k\in\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v(x)=u(x)+k\mathrm{e}^{-x}$ $\quad(k\in\mathbb{R})$

u est la solution particulière de (E) trouvée précédemment

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v(x)=x-1+k\mathrm{e}^{-x}$ $\quad(k\in\mathbb{R})$

Conclusion : Les solutions de (E) sont les fonctions v définies sur $\mathbb{R}$ par $v(x)=x-1+k\mathrm{e}^{-x}$ $\quad(k\in\mathbb{R})$.

Remarque :

On a démontré dans la question 1°) que la fonction u définie par $u(x)=x-1$ est une solution particulière de (E).

On peut observer que la fonction u est la solution de (E) pour $k=0$.

$\boxed{3}$ $y'-2y=8x^2-8x$ $\quad(\mathrm{E})$

1°) Vérifions que la fonction u définie par $u(x)=-4x^2$ est une solution particulière de (E).

La fonction u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme fonction polynôme).

$\forall x\in\mathbb{R} \quad u'(x)=-8x$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad u'(x)-2u(x)=8x^2-8x$

Donc la fonction u est une solution particulière de (E).

2°) Résolvons l'équation différentielle homogène associée (E_0).

L'équation homogène associée (E_0) s'écrit $y'-2y=0$ soit $y'=2y$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec $a=2$.

Les solutions de (E_0) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\mathrm{e}^{2x}$ $\quad(k\in\mathbb{R})$.

3°) Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrons que v est solution de $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow v-u$ est solution de (E_0).

$v-u$ est solution de $(\mathrm{E}_0) \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad (v-u)'(x)-2(v-u)(x)=0$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v'(x)-u'(x)-2v(x)+2u(x)=0$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v'(x)-2v(x)=u'(x)-2u(x)$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v'(x)-2v(x)=8x^2-8x$

$\Leftrightarrow$ v est solution de (E)

Déduisons-en les solutions de (E).

v est solution de $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow v-u$ est solution de (E_0)

$\Leftrightarrow v-u$ est définie par $(v-u)(x)=k\mathrm{e}^{2x} \quad (k\in\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v(x)-u(x)=k\mathrm{e}^{2x} \quad (k\in\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v(x)=u(x)+k\mathrm{e}^{2x} \quad (k\in\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v(x)=-4x^2+k\mathrm{e}^{2x} \quad (k\in\mathbb{R})$

Conclusion : Les solutions de (E) sont les fonctions v définies sur $\mathbb{R}$ par $v(x)=k\mathrm{e}^{2x}-4x^2 \quad (k\in\mathbb{R})$.

$\boxed{4}$ $y'+3y=4\mathrm{e}^{-2x} \quad (\mathrm{E})$

1°) Déterminons un réel λ tel que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=\lambda\mathrm{e}^{-2x}$ soit une solution particulière de (E).

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ par un réel.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad u'(x)=-2\lambda\mathrm{e}^{-2x}$

u est solution de $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad u'(x)+3u(x)=4\mathrm{e}^{-2x}$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad -2\lambda\mathrm{e}^{-2x}+3\lambda\mathrm{e}^{-2x}=4\mathrm{e}^{-2x}$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad \lambda\mathrm{e}^{-2x}=4\mathrm{e}^{-2x}$

$\Leftrightarrow \lambda=4$

Conclusion : La fonction u définie par $u(x)=4\mathrm{e}^{-2x}$ est une solution particulière de (E).

2°) Résolvons l'équation différentielle homogène associée (E_0).

L'équation homogène associée (E_0) s'écrit : $y'+3y=0$ soit $y'=-3y$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec $a=-3$.

Les solutions de (E_0) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\mathrm{e}^{-3x} \quad (k\in\mathbb{R})$.

3°) v est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrons que v est solution de $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow v-u$ est solution de (E_0).

$v-u$ est solution de $(\mathrm{E}_0) \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad (v-u)'(x)+3(v-u)(x)=0$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v'(x)-u'(x)+3v(x)-3u(x)=0$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v'(x)+3v(x)=\underbrace{u'(x)+3u(x)}$

u est solution particulière de (E)

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v'(x)+3v(x)=4\mathrm{e}^{-2x}$

$\Leftrightarrow$ v est solution de (E)

Déduisons-en les solutions de (E).

v est solution de $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow v-u$ est solution de (E_0)

$\Leftrightarrow v-u$ est définie par $(v-u)(x)=k\mathrm{e}^{-3x} \quad (k\in\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v(x)-u(x)=k\mathrm{e}^{-3x} \quad (k\in\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v(x)=u(x)+k\mathrm{e}^{-3x} \quad (k\in\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v(x)=4\mathrm{e}^{-2x}+k\mathrm{e}^{-3x} \quad (k\in\mathbb{R})$

Conclusion : Les solutions de (E) sont les fonctions v définies sur $\mathbb{R}$ par $v(x)=4\mathrm{e}^{-2x}+k\mathrm{e}^{-3x} \quad (k\in\mathbb{R})$.

Remarque générale : rédaction en analyse

Parler d'une fonction.

« La fonction u définie par … est solution de (E). » et non « La fonction $u(x)$ définie par … est solution de (E) ».