TS

Équations différentielles (2)

Plan du chapitre :

Dans ce chapitre, on va s'intéresser aux équations différentielles de la forme $y'+ay=b(x)$ où a est un réel et b une fonction.

I. Recherche d'une solution particulière d'une forme donnée

1°) Exemple

On considère l'équation différentielle $y'+2y=2x+3$ (E).

Déterminer deux réels *m* et *p* tels que la fonction affine *u* définie par $u(x)=mx+p$ soit une solution de (E).

u est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad u'(x)=m$

On raisonne par chaîne d'équivalences.

u est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad u'(x)+2u(x)=2x+3$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad m+2(mx+p)=2x+3$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad \boxed{2m}\,x+\boxed{m+2p}=\boxed{2}\,x+\boxed{3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m=2 & (\text{coefficient de } x) \\ m+2p=3 & (\text{coefficient constant}) \end{cases}$ On applique le principe d'égalités de deux fonctions polynômes (identification des coefficients de deux polynômes).

$\Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ p=1 \end{cases}$

Conclusion : La fonction affine *u* définie par $u(x)=x+1$ est une solution particulière de (E).

On pourrait dire que u est une solution tout court.

Attention, on n'a pas résolu l'équation différentielle (E).
Résoudre une équation différentielle c'est déterminer toutes fonctions solutions de cette équation différentielle.

2°) Point-méthode : méthodes pour solutions particulières

- Vérifier qu'une fonction donnée est une solution particulière d'une équation différentielle (cf. chapitre « Équations différentielles (1) »).

- Déterminer une solution particulière de forme donnée (méthode par identification des coefficients).

II. Résolution d'une équation différentielle à second membre variable

1°) Propriété (admise sans démonstration)

On considère une équation différentielle de la forme $y'+ay=b(x)$ (E) où a est une constante et b une fonction.
On dit qu'il s'agit d'une équation différentielle avec second membre.

- On lui associe l'équation différentielle $y'+ay=0$ (E_0) appelée équation différentielle homogène associée à (E).

Comme (E_0) peut aussi s'écrire $y'=-ay$, les solutions de (E_0) sont les fonctions $x\mapsto k\mathrm{e}^{-ax}$ $(k\in\mathbb{R})$.

- On suppose que l'on connaît une fonction u solution particulière de (E).

On peut affirmer que les solutions de (E) sont les fonctions $f : x\mapsto k\mathrm{e}^{-ax}+u(x)$ $(k\in\mathbb{R})$.

On peut retenir la propriété sous la forme suivante :

> Les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant une solution particulière de (E) à la solution générale de (E_0).

Résumé :

$y'+ay=b(x)$ (E)

$y'+ay=0$ (E_0)

solutions : $x\mapsto k\mathrm{e}^{-ax}$ $(k\in\mathbb{R})$

une solution particulière u de (E)

Les solutions de (E) sont les fonctions $f : x\mapsto k\mathrm{e}^{-ax}+u(x)$ $(k\in\mathbb{R})$.

La même propriété s'applique à des équations différentielles de la forme $ay'+by=c(x)$ (E)
où a et b sont des constantes, a étant non nulle,
et c une fonction.

2°) Exemple

On cherche à résoudre l'équation différentielle $\underbrace{y'+2y}_{\text{premier membre}} = \underbrace{2x+3}_{\text{second membre}}$ (E).

$y'+2y=0$ (E_0) équation homogène associée

• **Résolution de $(\mathbf{E_0})$**

(E_0) s'écrit : $y'=-2y$.
On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec $a=-2$.
Les solutions de (E_0) sont les fonctions $x \mapsto k\mathrm{e}^{-2x}$ $(k \in \mathbb{R})$.

• **Solution particulière de $(\mathbf{E})$**

D'après le **I. 1°)**, la fonction affine $u : x \mapsto x+1$ est une solution particulière de (E).

• **Solutions de $(\mathbf{E})$**

On applique la propriété.
Les solutions de (E) sont les fonctions $f : x \mapsto k\mathrm{e}^{-2x}+x+1$ $(k \in \mathbb{R})$.

Commentaires :

• On peut vérifier avec le site dcode (rubrique « équations différentielles »).

• On a une famille de solutions qui dépendent d'un paramètre *k*.

• On peut visualiser des solutions sur l'écran de la calculatrice pour différentes valeurs de *k*.

3°) Idée de démonstration

On reprend les notations du 1°).

(E) s'écrit $y'+ay=u'+au$.

Cette dernière équation différentielle est équivalente à $(y-u)'+a(y-u)=0$.

On en déduit que $y-u$ est solution de (E_0).