Exercices sur les fonctions continues

1 Soit I un intervalle ouvert et soit a un réel fixé dans I.
Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On suppose qu'il existe une fonction g définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, continue en a telle que $g(a)=0$ et pour tout $x\in \mathrm{I}$ $|f(x)|\leqslant g(x)$.
Démontrer que f est continue en a.

2 Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3+8}{x+2}$ se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$.
Donner le prolongement par continuité g de f.

3 Soit a et b deux réels.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\sin x - a\cos x$ si $x<0$, $f(x)=x+b$ si $0\leqslant x\leqslant 3$ et $f(x)=x^3-9$ si $x>3$.
Déterminer a et b tels que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

4 Soit f une fonction numérique continue définie sur un intervalle ouvert $]a\,;b[$ où a et b sont deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.
On suppose que f admet la même limite finie l en a et en b.
Démontrer que f n'est pas injective.

5 Soit a_0, a_1, a_2 ... a_n $n+1$ réels et P la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+x^{n+1}$.
Démontrer que si $a_0<0$, alors l'équation $P(x)=0$ admet au moins une solution positive.

6 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I telle que $\forall x\in\mathrm{I}\ \left[f(x)\right]^2=1$.
Déterminer f.

7 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0\,;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=f(1)=0$ et $\left(f(x)=f(y)=0 \Rightarrow f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=0\right)$.

1°) Démontrer que pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel $i\in\{0\,;1\,;2\,;\ldots;2^n\}$ on a $f\left(\dfrac{i}{2^n}\right)=0$.

2°) Si f est continue, démontrer qu'alors f est identiquement nulle sur I.

Indication : On pourra utiliser le résultat suivant après l'avoir démontré.
Pour tout réel x, on a : $x=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\mathrm{E}\left(2^n x\right)}{2^n}$.

8 Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I non vide.
Démontrer que si f ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors elle est constante sur I.

9 Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I non vide.
Démontrer que si $|f|$ est constante sur I, alors f est constante sur I.

10 Soit f et g deux fonctions continues de l'intervalle $\mathrm{I}=[0\,;1]$ dans lui-même telles que $f\circ g=g\circ f$.
Le but de l'exercice est de démontrer qu'il existe un réel $x_0\in\mathrm{I}$ tel que $f(x_0)=g(x_0)$.
Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que $\forall x\in\mathrm{I}\quad f(x)\neq g(x)$.
1°) Démontrer qu'alors soit $\forall x\in\mathrm{I}\quad f(x)>g(x)$ soit $\forall x\in\mathrm{I}\quad f(x)<g(x)$.
2°) On se place dans le premier cas c'est-à-dire que $\forall x\in\mathrm{I}\quad f(x)>g(x)$.
a) Démontrer qu'il existe un réel $m>0$ tel que $\forall x\in\mathrm{I}\quad f(x)\geqslant g(x)+m$.
b) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a $f^n\circ g=g\circ f^n$.
On rappelle la notation $f^n=f\circ f\circ\ldots\circ f$, avec n fois la fonction f.
c) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel $x\in\mathrm{I}$ on a : $f^n(x)\geqslant g^n(x)+m\times n$.
d) Conclure.

11 Soit f la fonction définie de l'intervalle $\mathrm{I}=[0\,;1]$ dans lui-même par $f(x)=x$ si $x\in\mathbb{Q}$ et $f(x)=1-x$ si $x\notin\mathbb{Q}$.
1°) Démontrer que f est bijective.
2°) Démontrer que f n'est monotone sur aucun intervalle inclus dans I.
3°) Démontrer que f est discontinue sauf en $\dfrac{1}{2}$.

12 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $f(x)=0$ si $x\notin\mathbb{Q}$ et $f(x)=\dfrac{1}{p+q}$ si $x=\dfrac{p}{q}$ avec $(p,q)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2$ tels que p et q soient premiers entre eux.
1°) Soit ε un réel strictement positif fixé.
Démontrer que l'ensemble $\mathrm{A}_\varepsilon=\left\{x\in\mathbb{R}_+^*\ /\ f(x)>\varepsilon\right\}$ est fini.
2°) Soit x_0 un réel strictement positif fixé.
Étudier la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0.
En quels points f est-elle continue ?

13 Le but de cet exercice est de démontrer que toute fonction $f:\ \mathrm{I}\to\mathbb{R}$, I étant un intervalle non vide non réduit à un singleton de $\mathbb{R}$, continue et injective est strictement monotone.

Pour cela, on raisonne par l'absurde.
$\exists(x_1\,;y_1)\in\mathrm{I}^2$ tel que $x_1<y_1$ et $f(x_1)\geqslant f(y_1)$
$\exists(x_2\,;y_2)\in\mathrm{I}^2$ tel que $x_2<y_2$ et $f(x_2)\leqslant f(y_2)$.
Considérer la fonction
$\varphi:[0\,;1]\to\mathbb{R}$
$\quad t\mapsto f\left((1-t)x_1+tx_2\right)-f\left((1-t)y_1+ty_2\right)$

14 **Questions préliminaires : quelques propriétés des bornes supérieures**

Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.

1°) Démontrer que si A et B sont majorées, alors $A \cup B$ est majorée et $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

2°) Démontrer que si $A \subset B$ et B majorée, alors $\sup A \leqslant \sup B$.

On considère une fonction f définie et majorée sur un intervalle $I = [a\,;b]$ $(a < b)$.

Pour tout réel $x \in I$, on pose $M(x) = \sup\limits_{t \in [a\,;x]} f(t)$.

(autrement dit, on a : $M(x) = \sup\{f(t), t \in [a\,;x]\}$).

Partie A

1°) Justifier la définition de $M(x)$ (c'est-à-dire l'existence de $M(x)$).

2°) Démontrer que M est croissante sur I et que $\forall x \in I \quad f(x) \leqslant M(x)$.

3°) **Étude de quelques cas particuliers**

Déterminer M

- lorsque f est croissante sur I ;
- lorsque f est décroissante sur I.

Partie B

Dans cette partie, on suppose de plus que f est continue en un réel $x_0 \in I$.

On se propose de démontrer que M est continue en x_0.

1°) $\boxed{\text{On suppose que } f(x_0) < M(x_0).}$

On se propose de démontrer que M est constante sur un voisinage de x_0.

Soit λ un réel tel que $f(x_0) < \lambda < M(x_0)$.

a) Démontrer qu'il existe deux réels α et β dans I tels que $\alpha < x_0 < \beta$ et $(\alpha \leqslant x \leqslant \beta \Rightarrow f(x) \leqslant \lambda)$.

b) Déterminer $M(\alpha)$.

(On pourra observer que $M(x_0) = \max\left(M(\alpha), \sup\limits_{[\alpha\,;x_0]} f\right)$).

c) Déterminer $M(\beta)$.

d) En déduire que M est constante sur l'intervalle $[\alpha\,;\beta]$.

2°) $\boxed{\text{On suppose que } f(x_0) = M(x_0).}$

On se propose de démontrer que M est continue en x_0.

a) Démontrer la continuité à gauche en x_0. On pourra utiliser l'inégalité pour x réel tel que $a \leqslant x \leqslant x_0$

$f(x) \leqslant M(x) \leqslant M(x_0)$.

b) Démontrer la continuité à droite en x_0. On utilisera la continuité à droite en x_0 que l'on traduira sous forme de phrase quantifiée.

15 Soit f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle $I = [a\,;b]$ $(a < b)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour tout réel u, on pose $M(u) = \sup\limits_{t \in I}\left(f(t) + ug(t)\right)$ et $E(u) = \{x \in I \,/\, f(x) + ug(x) = M(u)\}$.

1°) Justifier la définition de $M(u)$.

2°) Démontrer que $E(u)$ est non vide.

3°) Soit u et v deux réels quelconques.

Soit x un réel quelconque dans $E(u)$ et y un réel quelconque dans $E(v)$.

Démontrer que l'on a : $(v-u)g(x) \leqslant M(v) - M(u) \leqslant (v-u)g(y)$.

En déduire que la fonction M est lipschitzienne sur I.

16 1°) On considère la suite (x_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $x_0 = a$ où a est un réel fixé et la relation de récurrence $x_{n+1} = \dfrac{x_n - 1}{2}$.

Exprimer x_n en fonction de n.

Indication : On pourra considérer la suite (y_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $y_n = x_n + 1$.

2°) Le but de cette question est de déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) pour tout réel x, on ait $f(2x+1) = f(x)$;

(ii) f est continue en – 1.

a) Soit a un réel fixé. On considère la suite (x_n) définie au 1°).

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $f(x_n) = f(a)$.

b) En déduire la valeur de $f(a)$.

Conclure.

17 Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0\,;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ et telle que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{7}{10}\right]$, on a : $f\left(x + \dfrac{3}{10}\right) \neq f(x)$.

1°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a au moins sept solutions dans l'intervalle [0 ; 1].

2°) Donner un contre-exemple de fonction f vérifiant les hypothèses ; on pourra se contenter d'une représentation graphique claire.

18 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et périodique de période 1 telle que, pour tout réel x, $f(nx)$ tend vers 0 lorsque n tend vers + ∞.

1°) Démontrer que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $f(k) = 0$.

2°) Démontrer que l'on a : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

Plus généralement, démontrer que, pour tout entier relatif p et pour tout entier naturel non nul q, on a l'égalité $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0$.

3°) En déduire que f est la fonction identiquement nulle.

On pourra utiliser le résultat suivant :

« Tout réel est la limite d'une suite de rationnels ».

19 Déterminer les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$.

Indication : Considérer la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x} f(x)$.

20 Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue bornée et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
Montrer que $g \circ f$ est uniformément continue sur D.

21 Déterminer une fonction f définie et discontinue sur un intervalle I telle que $f(\mathrm{I})$ soit un intervalle de $\mathbb{R}$.

22 Déterminer une fonction continue f et une fonction discontinue g telle que $f \circ g$ soit continue.

23 Soit f une fonction continue sur un intervalle I non vide et non réduit à un singleton. Démontrer que, si f ne s'annule pas sur I, alors f a un signe constant sur I.

24 Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle D. On suppose que f et g sont continues en un réel $x_0 \in D$ tel que $f(x_0) < g(x_0)$. Démontrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 inclus dans D tel que pour tout $x \in \mathrm{I}$, on ait : $f(x) < g(x)$.

25 Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathrm{I} = [a\,;b]$ $(a < b)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout couple $(x\,;y)$ de réels distincts dans I on ait : $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.
1°) Démontrer que f est continue.
2°) Démontrer que f admet un unique point fixe dans I.
Indication : Pour l'existence, considérer la fonction $x \mapsto |f(x) - x|$.

26 Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que f soit croissante sur I et $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante sur I.
Démontrer que f est continue sur I.

27 Soit a, b, c trois réels tels que $a < c < b$. Soit f une fonction définie sur $[a\,;b]$ telle que f soit uniformément continue sur $[a\,;c]$ et sur $[c\,;b]$.
Démontrer que f est uniformément continue sur $[a\,;b]$.

28 Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I et lipschitziennes sur cet intervalle.
1°) Démontrer que $f + g$ est lipschitzienne.
2°) On suppose que $\mathrm{I} = [a\,;b]$ $(a < b)$.
Démontrer que fg est lipschitzienne.

29 Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I continues en un réel $x_0 \in \mathrm{I}$ telles que $f(x_0) < g(x_0)$.
Démontrer qu'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que pour tout $x \in \mathrm{I} \cap \mathrm{J}$ on ait $f(x) < g(x)$.

30 Soit f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle $\mathrm{I} = [a\,;b]$ $(a < b)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel $x \in \mathrm{I}$ on ait : $f(x) < g(x)$.
Démontrer qu'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout $x \in \mathrm{I}$ on a : $f(x) + k \leqslant g(x)$.

31 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ si $\mathrm{E}(x)$ est un nombre pair et $f(x) = x$ si $\mathrm{E}(x)$ est un nombre impair.
Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

32 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.
Démontrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

33 Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n + v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $e^{u_n} + e^{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$.
Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent et déterminer leurs limites.

34 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.
Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

35 Soit f une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Le but de l'exercice est de démontrer qu'il existe deux réels strictement positifs a et b tels que, pour tout réel x, on ait $|f(x)| \leqslant a|x| + b$.
1°) Justifier l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que $|x - y| \leqslant \alpha \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| \leqslant 1$.
2°) Soit x un réel non nul.
On pose $n_x = \mathrm{E}\left(\dfrac{|x|}{\alpha}\right)$.
Démontrer que $|f(x) - f(0)| \leqslant n_x + 1$.
(distinguer deux cas :
Pour $x > 0$, écrire
$f(0) - f(x) = f(0) - f(\alpha) + f(\alpha) - f(2\alpha) + \ldots + f((n_x - 1)\alpha) - f(n_x\alpha) + f(n_x\alpha) - f(x)$.)
3°) Conclure.

36
Partie A
Le but de cette partie est de déterminer les fonctions f définies et continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) + f(x-y) = 2[f(x) + f(y)]$.
1°) Calculer $f(0)$.
2°) Démontrer que f est paire.
3°) On pose $a = f(1)$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $f(n) = an^2$.
4°) Démontrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x, on a : $f(nx) = n^2 f(x)$.
En déduire $f\left(\dfrac{1}{p}\right)$ pour tout entier naturel p non nul et $f\left(\dfrac{n}{p}\right)$ pour tout entier naturel n et tout entier naturel p non nul.
En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on a : $f(x) = ax^2$.
5°) Conclure.
Indication : utiliser le résultat suivant :
« Tout réel est limite d'une suite de rationnels ».

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer les fonctions g définies et continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$\forall (x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \quad g(x+y)\times g(x-y) = \left[g(x)g(y)\right]^2 \quad (1)$.

1°) Déterminer les valeurs possibles de $g(0)$.

2°) Si $g(0)=0$, démontrer que g est la fonction nulle.

3°) S'il existe un réel $x_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $g(x_0)=0$, démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $g\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)=0$.

En déduire que g est la fonction nulle.

4°) Si g vérifie (1) et g est pas la fonction nulle, démontrer que soit $g(x)>0$ pour tout réel x soit $g(x)<0$ pour tout réel x.

5°) Conclure.

37 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout couple $(x\,;y)$ de réels on ait :

$f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} \quad (1)$.

1°) Démontrer que, s'il existe un réel c tel que $f(c)=1$ ou $f(c)=-1$, alors la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

On suppose dans toute la suite du problème que f est non constante.

2°) En écrivant $x=\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}$, démontrer que quel que soit le réel x, on a : $-1<f(x)<1$ et établir que $f(0)=0$; en déduire que f est impaire.

3°) Démontrer par récurrence que, pour tout réel x et pour tout entier strictement positif n, on a :

$\dfrac{1+f(nx)}{1-f(nx)} = \left[\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\right]^n$.

On pose $\dfrac{1+f(1)}{1-f(1)}=a$.

Calculer pour $n\in\mathbb{N}$ puis pour $n\in\mathbb{Z}$ la valeur de $f(n)$ en fonction de a.

Calculer $f(x)$ en fonction de a pour $x=\dfrac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$.

4°) Déterminer les fonctions f définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues vérifiant (1).

Indication : On pourra utiliser le résultat suivant : « Tout réel est la limite d'une suite de rationnels. »

38 Soit f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle $\mathrm{I}=[a\,;b]$ $(a<b)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel $x\in\mathrm{I}$, il existe un réel $x'\in\mathrm{I}$ tel que l'on ait : $f(x)=g(x')$.

Démontrer qu'il existe un réel $c\in\mathrm{I}$ tel que $f(c)=g(c)$.

Indications : Raisonner par l'absurde, remarquer que $f-g$ a alors un signe constant sur I et se souvenir qu'une fonction continue sur un segment possède un minimum et un maximum.

39 **Lemme de Croft**

Soit $f:\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

On suppose que pour tout entier naturel p non nul, $f\left(\dfrac{n}{p}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ (n est un entier naturel).

Le but de l'exercice est de démontrer que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.

Soit ε un réel strictement positif fixé.

1°) Justifier qu'il existe un réel $\alpha>0$ tel que pour tout couple $(x\,;y)$ de réels positifs ou nuls, si $|x-y|\leqslant\alpha$, alors $|f(x)-f(y)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$.

2°) Démontrer qu'il existe un entier naturel p non nul tel que $\dfrac{1}{p}\leqslant\alpha$.

Pour tout réel x, on pose $y=\dfrac{\mathrm{E}(px)}{p}$.

Justifier que $|x-y|\leqslant\alpha$.

3°) Justifier qu'il existe un entier naturel N tel que si $n\geqslant N$, alors $\left|f\left(\dfrac{n}{p}\right)\right|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$.

4°) Démontrer que si $x\geqslant\dfrac{N}{p}$, alors $|f(x)|\leqslant\varepsilon$.

Conclure.

40 Soit $f:\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

On suppose que pour tout entier réel $x>0$, $f(nx)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

Démontrer que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.

Indication :

Soit ε un réel strictement positif fixé.

Justifier qu'il existe un réel $\alpha>0$ tel que pour tout couple $(x\,;y)$ de réels positifs ou nuls, si $|x-y|\leqslant\alpha$, alors $|f(x)-f(y)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Poser $n_x=\mathrm{E}\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$.

Exploiter l'écriture $f(x)=f(x)-f(n_x\alpha)+f(n_x\alpha)$ (faire un schéma).

41 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x$ si $x\in\mathbb{Q}$ et $f(x)=-x$ si $x\notin\mathbb{Q}$.

Étudier la continuité de f.

42 1°) Soit a et b deux réels.

a) Démontrer que $\sup(a\,;b)=\dfrac{a+b+|b-a|}{2}$.

b) Donner une expression analogue pour $\inf(a\,;b)$.

2°) Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle non vide non réduit à un point.

Démontrer que les fonctions $\sup(a\,;b)$, $\inf(a\,;b)$, f^+ et f^- sont continues sur I.

43 Étudier la continuité de la fonction f définie par $f(x)=(-1)^{\mathrm{E}(x)}\times\sin(\pi x)$.

44 1°) Que peut-on dire d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on ait $f(x)\in\mathbb{Q}$?

Que peut-on dire d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on ait $f(x)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$?

2°) a) Existe-t-il une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que, $f(\mathbb{Q})\subset\mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$?

b) Existe-t-il une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que, $f(\mathbb{Q})\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\subset\mathbb{Q}$?

Indication : On pourra considérer la fonction g définie par $g(x)=f(x)-x$.

45 **Continuité uniforme et propriété de Lipschitz**

1°) Rappeler la définition de l'uniforme continuité sur A.
Démontrer que si f est lipchitzienne sur A, alors elle est uniformément continue sur A.

2°) Étude d'un exemple
Dans cette question, $f(x)=\sqrt{x}$.

a) Démontrer que, pour tout couple $(x\,;y)$ de réels positifs ou nuls, on a : $\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|\leqslant\sqrt{|x-y|}$.

En déduire que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) Soit x et y deux réels strictement positifs tels que $y=2x$.

Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$.

En déduire que f n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Que peut-on en conclure ?

46 Démontrer que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$ par deux méthodes différentes :

- **1ère méthode :** en utilisant un théorème d'analyse
- **2e méthode :** en utilisant un théorème d'algèbre sur la factorisation des polynômes en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

47 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=[1\,;2]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue et strictement positive sur I.

Démontrer qu'il existe deux constantes k_1 et k_2 telles que $0<k_1\leqslant k_2$ et pour tout réel $x\in\mathrm{I}$ on ait :
$k_1x\leqslant f(x)\leqslant k_2x$.

48 On pose $\mathrm{I}=[0\,;1]$. Soit $f:\ \mathrm{I}\to\mathrm{I}$ continue.

Démontrer qu'il existe au moins un réel $a\in\mathrm{I}$ tel que $f(a)=a^2$.

49 Soit f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle $\mathrm{I}=[a\,;b]$ $(a<b)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $f(a)\geqslant g(a)$ et $f(b)\leqslant g(b)$.

Démontrer qu'il existe au moins un réel $c\in\mathrm{I}$ tel que $f(c)=g(c)$.

50 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.

Démontrer que f admet un point fixe dans I $\Leftrightarrow$ $f\circ f$ admet un point fixe dans I.

51 Soit $x_1, x_2, ..., x_n$ n réels compris dans l'intervalle $[0\,;1]$ $(n\geqslant 2)$.

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}|x-x_k|$.

1°) Calculer $f(0)+f(1)$.

2°) Démontrer qu'il existe un réel $c\in[0\,;1]$ tel que $f(c)=\dfrac{1}{2}$.

52 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout couple $(x\,;y)$ de réels, on ait :

$|f(x)-f(y)|\leqslant k|\sin x-\sin y|$ où k est un réel positif.

1°) Démontrer que f est périodique.

2°) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

53 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont les restrictions à $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont constantes.

On suppose de plus que f est continue en 0.
Que peut-on dire de f ?

54 Soit $f:\ \mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que $f(0)=0$.

On suppose qu'il existe $C>0$ et $\varepsilon>0$ tels que $\varepsilon<\dfrac{1}{4C}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}^+$ $f(t)\leqslant C\left(\varepsilon+f(t)\right)^2$.

Démontrer qu'il existe une constante $K>0$ telle que pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, on ait $f(t)\leqslant K\varepsilon^2$.

On peut préciser la valeur de K en fonction de C.

55 Soit f une fonction continue strictement décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Démontrer qu'il n'existe pas de fonction g continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g\circ g=f$.

Indication : Raisonner par l'absurde.
Démontrer que nécessairement f est injective ; conclure.

56 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $\mathrm{I}=[a\,;b]$ $(a<b)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a)<ab$ et $f(b)>b^2$.

Démontrer qu'il existe un réel $c\in\mathrm{I}$ tel que $f(c)=bc$.

57 Soit f une fonction continue de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=0$ et $f(1)=1$.

Démontrer qu'il existe un réel $a\in]0\,;1[$ tel que $f(a)=\dfrac{1-a}{1+a}$.

58 Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans lui-même telle que pour tout couple $(x\,;y)$ de réels on ait :

$|f(x)-f(y)|\geqslant|x-y|$.

Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

59 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout couple $(x\,;y)$ de réels on ait :

$\left| f(x)-f(y) \right| \leqslant 3\left| \sin x - \sin y \right|$.

1°) Démontrer que f est périodique.

2°) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

60 Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

Démontrer qu'il existe un unique réel c appartenant à l'intervalle $]a\,;b[$ tel que

$\sqrt{\dfrac{b-c}{c-a}}-\sqrt{\dfrac{c-a}{b-c}}=\sqrt{(b-c)(c-a)}$.

61 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Démontrer qu'il existe un réel $c\in\left]0\,;\dfrac{1}{2}\right[$ tel que $\sqrt[n]{1-c}-\sqrt[n]{c}=c^n$.

62 On considère une fonction continue de $\mathrm{I}=[a,b]$ ($a<b$) dans $\mathbb{R}$. Soit x_1, x_2, … x_n n réels $(n\in\mathbb{N}^*)$ quelconques dans I. On pose $f(x)=\dfrac{\sum_{k=1}^{n} f(x_i)}{n}$.

Démontrer qu'il existe un réel c dans I tel que $f(c)=m$.

63 Trouver tous les entiers naturels n tels qu'il existe une fonction continue $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui prend chaque valeur exactement n fois.

64 Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I (non vide et non réduit à un singleton).

Démontrer que la fonction $h=\sup(f,g)$ est continue sur I.

Indication : Exprimer h en fonction de f et g.

65 Soit A une partie non vide quelconque de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur A, lipschitzienne de rapport K.

Soit g la fonction définie par $g(x)=\inf\limits_{y\in A}\left\{ f(y)+K\left| x-y \right| \right\}$.

1°) Démontrer que g est définie sur $\mathbb{R}$.

2°) Démontrer que g est lispchitzienne.

66 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs positives ou nulles telle que $\dfrac{f(x)}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\mathrm{L}$ avec $\mathrm{L}<1$.

Démontrer que l'équation $f(x)=x$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}_+$.

67 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs positives ou nulles telle que $\dfrac{f(x)}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\mathrm{L}$ avec L < 1.

Démontrer que l'équation $f(x)=x$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}_+$.

Idem ex. précédent

68 On recherche l'ensemble E de toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues en 0 telles que pour tout couple $(x\,;y)$ de réels on ait $f\left(\dfrac{x+y}{3}\right)=\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.

1°) Donner un élément de E.

2°) Soit f une fonction de E. On considère la fonction $g: x\mapsto f(x)-f(0)$.

a) Démontrer que $g\in E$.

b) Démontrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n on a $g(x)=g\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n x\right)$.

3°) Déterminer E.

69 1°) Démontrer que si une fonction continue sur un intervalle ne s'annule pas alors elle a un signe constant.

2°) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Démontrer que s'il existe un réel x_1 tel que $(f\circ f)(x_1)=x_1$, alors il existe un réel x_0 tel que $f(x_0)=x_0$.

Indication : Raisonner par l'absurde.

70 1°) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ ($a<b$) à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit x_1, x_2, …, x_n n éléments de $[a,b]$ (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1).

Démontrer qu'il existe un réel x_0 appartenant à $[a,b]$ tel que $f(x_0)=\dfrac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}$.

2°) Écrire en langage naturel un algorithme qui demande un entier naturel n non nul à l'utilisateur et donne la partie entière de $x_0\in[1\,;n]$ tel que $\mathrm{e}^{x_0}+x_0=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{e}^k+k\right)$.

71 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=0$ si $x\notin\mathbb{Q}$ et $f(x)=\dfrac{1}{p+q}$ si $x=\dfrac{p}{q}$ avec $(p,q)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2$ tels que $p\wedge q=1$.

> Rappel de la définition d'une limite.
>
> Soit $f: D\to\mathbb{R}$ une fonction et $\ell\in\mathbb{R}$.
>
> Soit $a\in\overline{D}\cap\mathbb{R}$.
>
> On dit que f tend vers ℓ en a lorsque $\forall\varepsilon>0\ \exists\alpha>0$ tel que $\left(0<\left|x-a\right|\leqslant\alpha\ \Rightarrow 0<\left|f(x)-\ell\right|\leqslant\varepsilon\right)$.

1°) Soit ε un réel strictement positif fixé.

Démontrer que l'ensemble $\mathrm{A}_\varepsilon=\left\{x\in\mathbb{R}_+^*\,/\,f(x)>\varepsilon\right\}$ est fini. On notera $\mathrm{A}_\varepsilon=\left\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N\right\}$.

2°) Soit x_0 un réel strictement positif fixé et ε un réel strictement positif fixé.

On note $\alpha=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\left|\xi_i-x_0\right|$.

Démontrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad\left(0<\left|x-x_0\right|\leqslant\alpha\ \Rightarrow\ f(x)\leqslant\varepsilon\right)$.

En déduire $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x)$. En quels réels f est-elle continue ?

$\boxed{72}$ Soit g une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{E}(x) + g\left(x - \mathrm{E}(x)\right)$.

1°) Démontrer que pour tout réel x et tout entier relatif k on a $f(x+k) = f(x) + k$.

2°) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f est continue en 0.

En déduire une CNS pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{73}$ Étudier la continuité de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{E}(x) + \left[x - \mathrm{E}(x)\right]^2$ ($\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière du réel x).

$\boxed{74}$ 1°) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ uniformément continue. On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) telles que $u_n - v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[f(u_n) - f(v_n)\right]$.

2°) Application :

Déterminer si la fonction $x \mapsto \sin x^2$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{75}$ Peut-on prolonger par continuité sur $\mathbb{R}$ la fonction f définie par $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x} \times \sin\dfrac{\pi}{x-1}$?

$\boxed{76}$ Soit f une fonction strictement décroissante de $I = [0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(I) = I$.

Démontrer qu'il existe un unique réel $x \in I$ tel que $f(x) = x$.

$\boxed{77}$ On considère la fonction f de $I = [0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ ainsi définie pour $x \in I$:

si $x \in \mathbb{Q}$, alors $f(x) = \dfrac{1}{q}$ en posant $x = \dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels premiers entre eux ;

si $x \notin \mathbb{Q}$, alors $f(x) = 0$.

Soit a un réel appartenant à I.

1°) On suppose que $a \in \mathbb{Q}$. Étudier la continuité de f en a.

2°) On suppose que $a \notin \mathbb{Q}$. Pour tout entier naturel n non nul, on note F_n l'ensemble des rationnels de I qui peuvent s'écrire avec un dénominateur inférieur ou égal à n.

a) Démontrer que F_n est un ensemble fini.

b) On pose $\alpha_n = \min\limits_{r \in F_n} |a - r|$. Démontrer que $\alpha_n > 0$.

c) Soit x un réel quelconque dans I. Démontrer que si l'on a : $|x - a| < \alpha_n$, alors on a : $f(x) < \dfrac{1}{n}$.

d) La fonction f est-elle continue en a ?

3°) On déduit des questions précédentes que f n'est pas continue que I. Ce résultat était-il prévisible ?

$\boxed{78}$ **Problème des cordes universelles de Paul Levy**

Partie A

On considère une fonction f continue de l'intervalle $\mathrm{I} = [0\,;1]$ dans lui-même et vérifiant $f(0) = f(1)$. Soit n un entier naturel non nul. On suppose de démontrer qu'il existe un réel $x \in \left[0\,;1 - \dfrac{1}{n}\right]$ tel que $f(x) = f\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$.

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $J = \left[0\,;1 - \dfrac{1}{n}\right]$ par $g(x) = f(x) - f\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$. On raisonne par l'absurde en supposant que $\forall x \in \mathrm{J}\;\; g(x) \neq 0$.

1°) Expliquer pourquoi g un signe constant.

2°) Conclure en considérant $g(0)$, $g\left(\dfrac{1}{n}\right)$..., $g\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$.

3°) Une voiture a parcouru une distance de 120 km en une heure. Démontrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel elle a parcouru exactement 60 km.

Partie B

Soit a un réel tel que $0 < a < 1$ et $\dfrac{1}{a} \notin \mathbb{N}^*$.

On considère la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{a}x\right) - kx$ avec $k = \cos\dfrac{2\pi}{a} - 1$.

Vérifier que $f(0) = f(1)$.

Démontrer que $\forall x \in [0\,;1-a]\;\; f(x+a) \neq f(a)$.

$\boxed{79}$ Soit E une partie de $\mathbb{R}$ telle que :

(i) pour tout $x \in E$, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon\,; x+\varepsilon[\subset E$;

(ii) pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus E$, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon\,; x+\varepsilon[\subset \complement_{\mathbb{R}} E$.

1°) Démontrer que l'application caractéristique de E est continue sur $\mathbb{R}$.

2°) En déduire que $E = \varnothing$ ou $E = \mathbb{R}$.

$\boxed{80}$ 1°) Soit x un réel strictement positif. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$.

En déduire que (u_n) est bornée.

2°) On considère la fonction $f : x \mapsto \sup u_n$.

Exprimer $f(x)$ en fonction de x puis étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{81}$ Démontrer que l'équation $\sin x = \ln x$ admet une unique solution réelle.

82 Soient $a < b$ deux réels et $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ continue.

1°) On suppose que $f(a) = f(b)$. Soit J l'intervalle d'arrivée de *f*. Démontrer que tout élément de l'intérieur de J admet au moins deux antécédents de *f*.
2°) On dit que *f* admet un minimum (resp. maximum) local en un point *x* s'il existe un intervalle ouvert J contenant *x* tel que $f_{|\mathrm{J}}$ soit minimale (respectivement maximale) en *x*.

On suppose que $f(a) < f(b)$. Soit $y \in \left]f(a)\,;f(b)\right[$.

Démontrer que si *y* admet exactement deux antécédents par *f*, alors, en l'un d'entre eux, *f* admet un minimum ou un maximum local.

83 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et périodique de période $T > 0$.

1°) Démontrer que *f* est bornée.

2°) Démontrer qu'il existe un réel *c* tel que $f\left(\left[c\,;c+\dfrac{T}{2}\right]\right) = f(\mathbb{R})$.

84 Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) \times f(x-y) = f(x)^2 \times f(y)^2 \quad (\mathrm{E}).$$

Vérifier que la fonction identiquement nulle est solution.
Dans la suite, on considère une fonction *f* solution non identiquement nulle.

Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.

85 Le but de l'exercice est de démontrer qu'à tout instant il existe deux points antipodaux de la terre en lesquels la température est la même.
<u>Modélisation du problème</u> :

- On assimile la Terre à une sphère.
- On se place sur un méridien.
- On repère chaque point de ce méridien par un réel θ dans $[0\,;2\pi]$.
- On considère la fonction *f* qui à chaque réel θ de l'intervalle $[0\,;2\pi]$ associe la température au point associé à θ ; on supposera que *f* est continue.

1°) Que faut-il démontrer en utilisant la fonction *f* ?
2°) Résoudre le problème en introduisant une fonction *g* judicieusement choisie définie à partir de *f*.

86 Soit *f* une fonction continue de $\mathrm{I} = [a\,;b]$, $(a < b)$ dans I tel que $f \circ f = f$.

On pose $E = \{x \in \mathrm{I} \,/\, f(x) = x\}$.
1°) Démontrer que E est non vide.
2°) Démontrer que $f(\mathrm{I}) = E$.

3°) Démontrer que E est un segment de $\mathbb{R}$.

87 Soit *f* une fonction continue et périodique de période $\mathrm{T} > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Démontrer qu'il existe un réel *c* tel que $f\left(c+\dfrac{\mathrm{T}}{2}\right) = f(c)$.

Application :
À tout point M d'un cercle, on fait correspondre une grandeur physique (par exemple la température en M) qui varie continûment sur le cercle.
Démontrer qu'il existe forcément sur le cercle deux points diamétralement opposés où la grandeur physique prend la même valeur.
En déduire par exemple qu'il existe à chaque instant sur la terre deux points antipodaux où la température est la même, et deux points antipodaux où la pression est la même.

Autre application :
Soit $\mathscr{C}$ une courbe fermée continue entourant O telle que toute droite passant pas O coupe la courbe en deux points exactement. Montrer qu'il existe une droite passant par O où les deux points d'intersection sont à même distance de O.

Corrigé

$\boxed{2}$ Le prolongement par continuité de f est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2-4x+4$.

On voit d'ailleurs sur cette expression que la fonction g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{6}$ $\left[f(x)\right]^2=1 \Leftrightarrow f(x)=1$ ou $f(x)=-1$

Posons $\mathrm{A}=\left\{x\in \mathrm{I}\,/\, f(x)=1\right\}$ et $\mathrm{B}=\left\{x\in \mathrm{I}\,/\, f(x)=-1\right\}$ et démontrons que l'un au moins des deux ensembles est vide.

Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que les deux ensembles soient non vides.

Il existe alors $x_0\in \mathrm{I}$ tel que $f(x_0)=1$ et $y_0\in \mathrm{I}$ tel que $f(y_0)=-1$.
On applique ensuite le TVI ce qui fournit une contradiction.

Par suite, f est constante égale à 1 ou – 1.

$\boxed{7}$ Démonstration par récurrence.
H_0 est vraie par hypothèse.

Supposons que H_n et démontrons qu'alors H_{n+1} est vraie.
Soit i un entier tel que $0\leqslant i\leqslant 2^{n+1}$.

Si i est pair, alors $i=2i'$ avec $i'\leqslant 2^n$; $\dfrac{i}{2^{n+1}}=\dfrac{i'}{2^n}$ donc $f\left(\dfrac{i}{2^{n+1}}\right)=f\left(\dfrac{i'}{2^n}\right)=0$.

Si i est impair : $i=2i'+1$; on a : $i'\leqslant 2^n$ alors $\dfrac{i}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2i'+1}{2^n}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{i'}{2^n}+\dfrac{i'+1}{2^n}\right)$.

On a : $f\left(\dfrac{i'}{2^n}\right)=f\left(\dfrac{i'+1}{2^n}\right)=0$. Donc $f\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{i'}{2^n}+\dfrac{i'+1}{2^n}\right)\right)=0$ donc $f\left(\dfrac{i}{2^{n+1}}\right)=0$.

2°) On suppose que f est continue.

Autre méthode :

Soit $x\in[0\,;1]$. On pose $x=\overline{0,a_1a_2a_3...}$ son développement illimité en base 2 $(a_i=0$ ou $a_i=1)$.

On peut écrire encore : $x=\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{a_i}{2^i}$ c'est-à-dire $x=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2^i}$.

On a : $f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2^i}\right)=f\left(\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}2^{n-i}a_i}{2^n}\right)=0$ puisque $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}2^{n-i}a_i\leqslant 2^n$.

Comme f est continue, $f\left(\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2^i}\right)=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2^i}\right)=0$.

f est donc nulle.

$\boxed{11}$

1°) $f\circ f=\mathrm{id}_\mathrm{I}$

2°) $\left|f(x)-f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$

$\boxed{11}$ 3°) Soit $x\in[0\,;1]$ différent de $\dfrac{1}{2}$.

• Il existe deux suites (u_n) et (v_n) d'éléments de I qui tendent vers x telles que $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\in\mathbb{Q}$ et $v_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

$f(u_n)=u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}x$ et $f(v_n)=1-v_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}1-x$

$x\neq 1-x$

Il n'y a pas de limite en x.

• En $\dfrac{1}{2}$, $\left|f(x)-\dfrac{1}{2}\right|=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$

Autre version du $\boxed{11}$:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x$ si $x\in\mathbb{Q}$ et $f(x)=1-x$ si $x\notin\mathbb{Q}$.

1°) Démontrer que f est involutive.

2°) Étudier la continuité de f en un réel $x_0\neq\dfrac{1}{2}$.

3°) Démontrer que pour tout réel x, on a : $\left|f(x)-\dfrac{1}{2}\right|=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$. En déduire la continuité de f en $\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{12}$ **Noté sur une feuille le 14-12-2012** (ancienne feuille)

Attention (panneau) dans la déf. de la lim.
mettre $0<|x-a|\leqslant\alpha$

strict à cause du 2°) (j'ai dû me tromper, c'est plutôt la première inégalité qui est stricte)

$\boxed{14}$ **Partie B**

1°) c) $\max\left(\sup\limits_{[a,\,\alpha]}f,\ \sup\limits_{[\alpha,\,x_0]}f\right)=\mathrm{M}(x_0)$; or $\sup\limits_{[\alpha,\,x_0]}f\leqslant\lambda<\mathrm{M}(x_0)$ donc $\sup\limits_{[a,\,\alpha]}f=\mathrm{M}(x_0)$ soit $\mathrm{M}(\alpha)=\mathrm{M}(x_0)$.

Soit A et B deux parties majorées de $\mathbb{R}$. Démontrer que $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ est majorée et que $\sup(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\max\left\{\sup\mathrm{A},\sup\mathrm{B}\right\}$.

c) $\forall x\in[a\,;\beta]\quad f(x)\leqslant\mathrm{M}(x_0)$ d'où $\mathrm{M}(\beta)\leqslant\mathrm{M}(x_0)$.
Or $\mathrm{M}(x_0)\leqslant\mathrm{M}(\beta)$ donc $\mathrm{M}(\beta)=\mathrm{M}(x_0)$.

ou $\mathrm{M}(\beta)=\max\left(\sup\limits_{[a,\,x_0]}f,\ \sup\limits_{[x_0,\,\beta]}f\right)=\mathrm{M}(x_0)$

d) $\mathrm{M}(\alpha)=\mathrm{M}(\beta)=\mathrm{M}(x_0)$.

2°) a) $x \to x_0$

b) On traduit sous forme d'une phrase quantifiée que f est continue à droite en x_0.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \ / \ x \in [x_0, x_0+\alpha] \Rightarrow \left(f(x_0) - \varepsilon \leqslant \right) f(x) \leqslant \underbrace{f(x_0)}_{\mathrm{M}(x_0)} + \varepsilon$$

$$x \in [x_0, x_0+\alpha] \Rightarrow \mathrm{M}(x_0) \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}(x_0) + \varepsilon$$

$\boxed{16}$ 1°) $x_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (a+1) - 1$; $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -1$.

Énoncé du $\boxed{16}$ arrangé le 15-4-2020

Au départ je supposais que f était continue sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{22}$ Fonction cte $\circ$ E

$\boxed{26}$

$$f(x_0^-) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0^+)$$
$$g(x_0^-) \geqslant g(x_0) \geqslant g(x_0^+)$$
$$\frac{f(x_0^-)}{\cancel{x_0}} \geqslant \frac{f(x_0)}{\cancel{x_0}} \geqslant \frac{f(x_0^+)}{\cancel{x_0}}$$

Donc $f(x_0^+) = f(x_0) = f(x_0^-)$.

$\boxed{31}$ continuité sur $\mathbb{R} \setminus \{k \in \mathbb{Z} / k \neq 0 \text{ et } k \neq 1\}$

$\boxed{33}$ $u_n + v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

et $\quad e^{u_n} + e^{v_n} = e^{\frac{u_n+v_n}{2}} \left(\underbrace{e^{\frac{u_n-v_n}{2}} + e^{\frac{v_n-u_n}{2}}} \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$.

$$e^{\frac{u_n+v_n}{2}}\, 2 \operatorname{ch} \frac{u_n - v_n}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$$

$\downarrow$

1

$$\operatorname{ch} \frac{|u_n - v_n|}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

Argch $\qquad u_n - v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Or $u_n + v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Au départ cet ex. figurait dans la série d'ex. sur les suites.

J'ai noté ensuite :

à mettre dans le chapitre sur la continuité

(caractérisation séquentielle)

$\boxed{37}$ Faire une figure.

$(g - f > \varepsilon$.

$g(x_0) = \max g$

$g(x_0) = f(y_0)$.

Donc il n'existe pas de réel.)

Version élève :
raisonnons par l'absurde.

Supposons qu'il n'existe pas de réel $c \in \mathrm{I}$ tel que $f(c) = g(c)$.

Donc $\forall x \in \mathrm{I} \quad f(x) < g(x)$ (1) ou l'inverse (TVI).

$\exists x_0 \in \mathrm{I}$ tel que $f(x_0) = \min\limits_{\mathrm{I}} f \quad (2)$

$\exists y_0 \in \mathrm{I}$ tel que $g(y_0) = \min\limits_{\mathrm{I}} g \quad (3)$

$(1) \Rightarrow f(y_0) < g(y_0)$

$(2) \Rightarrow f(x_0) \leqslant f(y_0)$

On en déduit que $f(x_0) < g(y_0)$.

D'après (3), on peut écrire : $\forall x \in \mathrm{I} \quad f(x_0) < g(x)$.

Par conséquent, il n'existe pas de réel $x \in \mathrm{I}$ tel que $f(x_0) = g(x)$.

Or $(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Leftrightarrow (\overline{\mathrm{B}} \Rightarrow \overline{\mathrm{A}})$.

Note : le même raisonnement marche avec le maximum.

$\boxed{36}$ **Partie A**

3°) Attention : il faut faire une récurrence forte.

$\boxed{38}$ 4°) Utiliser que : $|f(y)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

$\boxed{39}$ Il existe un entier naturel N tel que $\forall n \geqslant N \quad |f(n\alpha)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

On pose $A = N\alpha$.

$$x \geqslant A \Rightarrow \frac{x}{\alpha} \geqslant N \Rightarrow n_x \geqslant N$$

$$0 \leqslant \frac{x}{\alpha} - n_x < 1 \Rightarrow 0 \leqslant x - n_x \alpha < \alpha$$

$\boxed{44}$ 2°) a) Oui : $f(x)=x$; b) Non   On voit $g(x)=c$ avec $c\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

On a donc $f(x)=x+c$. On calcule $f(c)=2c$.

On a $2c\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

$\boxed{46}$ Deux méthodes

✶ **<u>1ère méthode</u> :** par TVI (l'image d'un intervalle)

$\lim\limits_{+\infty} P=\pm\infty$

$\lim\limits_{-\infty} P=$ le contraire

$P(\mathbb{R})=\left]-\infty\,;+\infty\right[$

…

Il y a aussi une preuve algébrique.

✶ **<u>2e méthode</u> :** en utilisant un théorème d'algèbre sur la factorisation des polynômes en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

$\boxed{47}$ La fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est continue sur $[1\,;2]$.

$\boxed{50}$

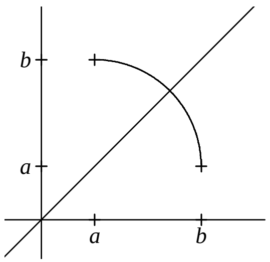
***f* admet un point fixe ⇒ *f* ○ *f* admet un point fixe**

évident

***f* ○ *f* admet un point fixe ⇒ *f* admet un point fixe**

$f\circ f$ admet un point fixe a.

$a \overset{f}{\mapsto} b \overset{f}{\mapsto} a$



On pose $g(x)=f(x)-x$.

On veut démontrer que g admet un point fixe.

$g(a)=b-a$ et $g(b)=a-b$.

Trois cas :

$$\left|\begin{array}{l} b>a \ \Rightarrow\ g(a)>0 \ \text{ et } g(b)<0 \\ a<b \ \Rightarrow\ g(a)<0 \ \text{ et } g(b)>0 \\ b=a \ \Rightarrow\ f \ \text{ admet un point fixe } a \end{array}\right.$$

Dans les deux premiers cas, on utilise le TVI et on trouve qu'il existe $c\in[a\,;b]$ tel que $g(c)=0 \Rightarrow$

$f(c)=c \Rightarrow$ point fixe.

f admet un point fixe ⇒ *f* ○ *f* admet un point fixe.   Evident

f ○ *f* admet un point fixe ⇒ *f* admet un point fixe

f ○ *f* admet un point fixe *a*.

$a \overset{f}{\mapsto} b \overset{f}{\mapsto} a$

On pose $g(x)=f(x)-x$.

On veut montrer que g admet un point fixe.

$g(a)=b-a$; $g(b)=a-b$

$$\text{Trois cas}\ \left|\begin{array}{l} b>a \Rightarrow g(a)>0 \text{ et } g(b)<0 \\ b<a \Rightarrow g(b)>0 \text{ et } g(a)<0 \\ b=a \Rightarrow f \ \text{ admet un point fixe } a \end{array}\right. .$$

Dans les deux premiers cas, on utilise le TVI et on trouve qu'il existe.

Version initiale du $\boxed{50}$:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue

Démontrer que *f* admet un point fixe ⇔ *f* ○ *f* admet un point fixe.

Au verso j'avais écrit :

$\Leftarrow\ g(x)=f(x)-x$

$f\circ f(x_1)=x_1$

$g(x_1)$

signe contraire

$g\left[f(x_1)\right]$

En rouge sur la même feuille, j'avais écrit :

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

1°) Démontrer que si *f* admet un point fixe, alors *f* ○ *f* admet un point fixe.

2°) Démontrer la réciproque lorsque *f* est continue.

51 1°) $f(0)+f(1)=1$

60 On se ramène à $\dfrac{1}{c-a}-\dfrac{1}{b-c}=1$. On utilise le théorème de la bijection.

Exercice assez peu intéressant car on peut même obtenir c grâce à une équation du second degré.

66 $\dfrac{f(x)}{x}=\mathrm{L}+\mathrm{o}(1)$

$f(x)=\mathrm{L}x+\mathrm{o}(x)$

Faux pour $\mathrm{L}=1$. Il doit manquer une hypothèse.
Un contre-exemple est fourni par la fonction $f(x)=x+\dfrac{1}{x+1}$. f est bien définie et positive.

On considère la fonction $g\ :x\mapsto f(x)-x$

74 2°) La fonction $x\mapsto \sin x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

On utilise $u_n=\sqrt{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$ et $v_n=\sqrt{n\pi}$.

80 2°) $f(x)=\dfrac{x^{\mathrm{E}(x)}}{\left[\mathrm{E}(x)\right]!}$

83 1°) Puisque f est périodique de période T, on a $f(\mathbb{R})=f([0,T])$.
Or f est continue, donc $f([0,T])$ est bornée et donc $f(\mathbb{R})$ aussi.
b) Plus précisément $f([0,T])$ est un segment de la forme $f([f(a),f(b)])$ où a et b sont deux éléments de $[0,T]$.
Pour fixer les idées, supposons $a\leqslant b$. On a $b\in[a,T]\subset[a,a+T]$.
Si $b\in\left[a,a+\dfrac{T}{2}\right]$, alors $f(a),f(b)\in f\left(\left[a,a+\dfrac{T}{2}\right]\right)$ et donc pour $x=a$, $f(\mathbb{R})=f\left(\left[x\,;x+\dfrac{T}{2}\right]\right)$.
Si $b\in\left[a+\dfrac{T}{2},a+T\right]$, alors $x=a+\dfrac{T}{2}$ convient.
Le raisonnement dans le cas $b\leqslant a$ est analogue.

85 2°) $g(\theta)=f(\theta)-f(\theta+\pi)$ sur $[0\,;\pi]$
$g(0)=-g(\pi)$ car $f(0)=f(2\pi)$
$g(0)$ et $g(2\pi)$ sont de signes contraires

soit $g(0)>0$ et $g(\pi)<0 \Rightarrow$ TVI
soit $g(0)<0$ et $g(\pi)>0 \Rightarrow$ TVI
soit $g(0)=0$ et $g(\pi)=0$ CQFD

Questions de cours

1 TVI (démonstration guidée par le principe de dichotomie).

2 Théorème de Heine (énoncé uniquement).

3 Image d'un segment par une fonction continue.

4 Définition de la continuité d'une fonction.
Définition de la continuité uniforme. Lien entre les deux notions.

5 Caractérisation séquentielle de la continuité.

6 Théorème de la bijection. Continuité de la bijection réciproque.

7 Traduire par une phrase quantifiée la phrase « f est uniformément continue sur D ».
Traduire par une phrase quantifiée la phrase « f n'est pas uniformément continue sur D ».

8 Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

$f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ continue.

Démontrer que *f* est bornée.

Considérer $E = \left\{ t \in \mathrm{I} \,/\, f_{|[a,t]} \text{ bornée} \right\}$.

1°) Démontrer que E est non vide.
2°) Démontrer que E est un intervalle.
Soit t_1 et t_2 deux réels dans E tels que $t_1 < t_2$.

Démontrer que $t_1 < t < t_2 \Rightarrow t \in E$.

On en déduit que $E = [a\,;c]$ et $E = [a\,;c[$.

3°) Démontrer que $c = b$ et que $E = [a\,;b]$.

Par continuité, on suppose que $E = [a\,;c[\ (c < b)$.
On écrit la continuité de *f* en *c*.

$$\forall \varepsilon = 1 \quad \exists \eta > 0 \quad |x - c| \leqslant \eta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(c)| \leqslant \varepsilon$$

Principe de démonstration du TVI (ancienne feuille manuscrite tapée le 11-12-2015)

<u>Démonstration 1</u>

$f(a) < f(b)$

$\mathrm{X} = \left\{ x \in [a\,;b] \,/\, f(x) < m \right\}$

$\exists c = \sup \mathrm{X}$

On veut démontrer que $f(c) = m$.

- $f(c) > m \Rightarrow c$ n'est pas le plus petit des majorants
- $f(c) < m \Rightarrow c$ n'est pas un majorant

<u>Démonstration 2</u> : suites dichotomiques

ROC TVI (1817-Bolzano)

$f : I \to \mathbb{R}$ continue
$f(I)$ est un intervalle.

Ingrédient : caractérisation des intervalles

Soit *u* et *v* deux éléments de $f(I)$ tels que $u < v$.
Soit *w* un réel tel que $u < w < v$.
Il existe deux réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1) = u$ et $f(x_2) = v$.

1^er^ cas : $x_1 < x_2$

On considère l'ensemble $E = \left\{ t \in I \,/\, t \leqslant x_2 \text{ et } f(t) \leqslant w \right\}$.

1°) Démontrer que $E \neq \varnothing$.

En déduire que *E* admet une borne supérieure *z*.
On va démontrer que $f(z) = w$.

2°) Démontrer que $f(z) \leqslant w$ par l'absurde.

3°) Démontrer que si $t \in]z, x_2]$, alors $t \notin E$.

En déduire que $f(t) > w$. Étudier $\lim\limits_{z^+} f$. Conclure que $f(z) \geqslant w$.

2^e^ cas : $x_1 > x_2$

Mme Pavageau

TS exercice 9 : propriété des valeurs intermédiaires, une démonstration

I. Soit $f(I)=\mathbb{R}$, une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

a et b sont deux réels de I tels que $a<b$ .On suppose $f(a)\leqslant f(b)$.

Soit k un réel tel que $f(a)\leqslant k\leqslant f(b)$.

On définit les suites (a_n) et (b_n) de la façon suivante :

$a_0=a$ et $b_0=b$ et, pour tout entier naturel n,

si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)\leqslant k$, alors $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1}=b_n$.

si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)>k$, alors $a_{n+1}=a_n$ et $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$.

1°) Démontrer que $a_0\leqslant a_1\leqslant b_1\leqslant b_0$ et $b_1-a_1=\dfrac{1}{2}(b_0-a_0)$.

2°) Démontrer que :

a) la suite (a_n) est croissante, la suite (b_n) est décroissante et $\forall n\in\mathbb{N}\quad a_n\leqslant b_n$ et $b_{n+1}-a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(b_n-a_n)$.

b) $\forall n\in\mathbb{N}\quad f(a_n)\leqslant k\leqslant f(b_n)$ et $b_n-a_n=\dfrac{1}{2^n}(b-a)$.

Que peut-on déduire de a) e b) ?

3°) Soit c la limite commune des suite (a_n) et (b_n). Quelle est la valeur de $f(c)$?

II. Application : On donne l'équation : $x^3+x=3$ (E)

1°) Montrer que l'équation (E) admet une unique solution α.

2°) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

$x^3+x=3$