TS

Exercices sur les nombres complexes (4) : nombres complexes et transformations

Dans les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{15}$, le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Dans les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{7}$, on demande d'exprimer l'affixe *z*' du point M', image d'un point M d'affixe *z* par la transformation considérée.

$\boxed{1}$ $t_{\overrightarrow{AB}}$ avec A(5 – 3i) et B(3 – 5i) $\boxed{2}$ $t_{\vec{w}}$ avec $\vec{w}\left(-1+\frac{1}{2}\text{i}\right)$ $\boxed{3}$ $h_{(\Omega,\,2)}$ avec Ω (1 + i)

$\boxed{4}$ $h_{\left(\Omega,\,\frac{1}{3}\right)}$ avec Ω (1 + 3i) $\boxed{5}$ $R_{\left(\Omega,\,\frac{\pi}{2}\right)}$ avec Ω (i) $\boxed{6}$ $R_{\left(\Omega,\,-\frac{\pi}{2}\right)}$ avec Ω (i) $\boxed{7}$ S_{A} avec A(1 – 4i)

$\boxed{8}$ On considère les points $\text{A}\left(5-3\text{i}\right)$ et $\text{B}\left(3-5\,\text{i}\right)$.
Déterminer l'image B' du point B par $R_{\left(\text{A},\,-\frac{\pi}{4}\right)}$.

$\boxed{9}$ On considère la transformation *f* du plan *P* dans lui-même qui à tout point M d'affixe *z* fait correspondre le point M' d'affixe $z'=\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}z$.
1°) Déterminer la nature de *f*.
2°) Calculer les affixes des points A' et B' images respectives par *f* des points $\text{A}\left(-1+\text{i}\sqrt{3}\right)$ et $\text{B}\left(-1-\text{i}\sqrt{3}\right)$.

$\boxed{10}$ On considère la transformation *f* du plan *P* dans lui-même qui à tout point M d'affixe *z* fait correspondre le point M' d'affixe $z'=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\text{i}\right)z$.
Déterminer la nature de *f*.

$\boxed{11}$ On donne les points A(i) et B(2).
On se propose de calculer l'affixe du point C tel que ABC soit un triangle isocèle rectangle direct en A.
Rappel : Lorsque l'on dit qu'un triangle ABC est direct, on tient compte de l'ordre des points A, B, C pour désigner le triangle ; cela signifie, que sur le cercle circonscrit au triangle, lorsque l'on parcourt le cercle en partant de A puis en allant vers B, le trajet s'effectue dans le sens direct, c'est-à-dire trigonométrique ou anti-horaire (contraire de celui des aiguilles d'une montre).
Démontrer que $\text{C}=R_{\left(\text{A},\,\frac{\pi}{2}\right)}\left(\text{B}\right)$; en déduire l'affixe de C.

$\boxed{12}$ On donne les points A(1 + i) et B(4).
On se propose de calculer l'affixe du point C tel que ABC soit un triangle équilatéral de sens direct.
Démontrer que $\text{C}=R_{\left(\text{A},\,\frac{\pi}{3}\right)}\left(\text{B}\right)$; en déduire l'affixe de C.

$\boxed{13}$ On donne les points A(1 + i) et B(7 + 4i).
On se propose de calculer l'affixe du point C tel que ABC soit un triangle isocèle rectangle direct en C.
Démontrer que $\text{B}=R_{\left(\text{C},\,\frac{\pi}{2}\right)}\left(\text{A}\right)$; en déduire l'affixe de C.

$\boxed{14}$ On considère la transformation *f* du plan *P* dans lui-même qui à tout point M d'affixe *z* fait correspondre le point M' d'affixe $z'+3-4\text{i}=-2\left(z+3-4\text{i}\right)$.
1°) Déterminer la nature de *f*.
2°) Déterminer l'image par *f* du cercle $\mathcal{C}$ de centre A(– 2 + i) et de rayon 1. Faire une figure.

$\boxed{15}$ On considère la transformation *f* du plan *P* dans lui-même qui à tout point M d'affixe *z* fait correspondre le point M' d'affixe $z'=-\text{i}\,z+2\text{i}$.
1°) Démontrer que *f* admet un unique point invariant Ω (c'est-à-dire tel que *f* (Ω) = Ω).
2°) Exprimer $z'-z_{\Omega}$ en fonction de $z-z_{\Omega}$.
3°) En déduire la nature de *f*.

Pour les exercices $\boxed{16}$ et $\boxed{17}$, on rappelle que le sens direct est le sens contraire de celui des aiguilles d'une montre à aiguilles.

$\boxed{16}$ Dans le plan orienté *P*, on considère un triangle ABC quelconque direct (pour la figure, on prendra (AB) « horizontale », C « au-dessus » de (AB), tous les angles du triangle ABC aigus). On note O le milieu de [BC]. A l'extérieur du triangle ABC, on construit les carrés ACDE et ABGF ; on note H le point tel que AEHF soit un parallélogramme.
On munit le plan d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (O étant le milieu de [BC] ainsi qu'il a été défini précédemment). On ne placera pas le repère sur la figure.
On note *a* et *b* les affixes respectives des points A et B dans ce repère.
L'origine O du repère étant le milieu de [BC], le point C a pour affixe – *b*.
1°) Exprimer z_{E} en fonction de *a* et *b*.
Exprimer z_{F} en fonction de *a* et *b*.
Exprimer z_{H} en fonction de *a* et *b*.
Exprimer z_{D} en fonction de *a* et *b*.
2°) Calculer les affixes de $\overrightarrow{\text{EF}}$ et $\overrightarrow{\text{OA}}$; en déduire que EF = 2 OA et que (EF) ⊥ (OA).
3°) Démontrer que BD = CH et que (BD) ⊥ (CH).

$\boxed{17}$ Dans le plan orienté, on considère deux points O et A fixés distincts, le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [OA], un point M variable appartenant au cercle $\mathcal{C}$ et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct MAPN et OMKL.

Pour la figure, prendre (OA) « horizontale » et M sur le demi-cercle au-dessus de la droite (OA).
Prendre 4 cm pour unité de longueur.

On munit le plan d'un repère orthonormé direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1 (on peut donc dire que O est l'origine du repère). On ne placera pas le repère sur la figure.
On note *k*, *l*, *m*, *n*, *p* les affixes respectives des points K, L, M, N et P.
1°) Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle $\mathcal{C}$, on a : $\left|m-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.
2°) Exprimer *l*, *p*, *n*, *k* en fonction de *m*.
3°)
a) Démontrer que le milieu Ω du segment [PL] est un point indépendant de la position du point M sur le cercle $\mathcal{C}$.
b) Démontrer que le point Ω appartient au cercle $\mathcal{C}$ et préciser sa position sur ce cercle.
4°)
a) Calculer la distance KN et démontrer que cette distance est constante.
b) Quelle est la nature du triangle ΩNK ?
5°) Démontrer que le point N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M, dont on déterminera le centre et le rayon.

Réponses

$\boxed{1}$ $z' = z - 2 - 2\mathrm{i}$ $\boxed{2}$ $z' = z - 1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ $\boxed{3}$ $z' = 2z - \mathrm{i} - 1$ $\boxed{4}$ $z' = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} + 2\mathrm{i}$ $\boxed{5}$ $z' = \mathrm{i}z + 1 + \mathrm{i}$

$\boxed{6}$ $z' = -\mathrm{i}z - 1 + \mathrm{i}$ $\boxed{7}$ $z' = -z + 2 - 8\mathrm{i}$ (une symétrie centrale est une homothétie de rapport -1 ou une rotation d'angle π ; la première solution est meilleure.)

$\boxed{8}$ On utilise : $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$z_{B'} = 5 - 2\sqrt{2} - 3\,\mathrm{i}$

$\boxed{9}$ 1°) f est <u>la</u> rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$: $f = R_{\left(O,\, \frac{2\pi}{3}\right)}$.

2°) Pour les calculs d'affixes, on utilise l'écriture algébrique $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_{A'} = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ (on remarque que l'image du point A est le point B)

$z_{B'} = 2$

$\boxed{10}$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

$f = R_{\left(O,\, -\frac{3\pi}{4}\right)}$

$\boxed{11}$ Pour la figure, on place le point C à l'équerre et au compas.

ABC est isocèle rectangle direct en A donc $\begin{cases} AB = AC \\ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \end{cases}$. Par suite, $C = R_{\left(A,\, \frac{\pi}{2}\right)}(B)$.

$z_C = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(2 - \mathrm{i}) + \mathrm{i} = \ldots = 1 + 3\mathrm{i}$

$\boxed{12}$ ABC est équilatéral direct donc $\begin{cases} AB = AC \\ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi) \end{cases}$. Par suite, $C = R_{\left(A,\, \frac{\pi}{3}\right)}(B)$.

$z_C = \frac{\sqrt{3}+5}{2} + \mathrm{i}\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{13}$ ABC est isocèle rectangle direct en C donc $\begin{cases} CA = CB \\ \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \end{cases}$. Par suite, $B = R_{\left(C,\, \frac{\pi}{2}\right)}(A)$.

$z_C = \frac{5 + 11\,\mathrm{i}}{2}$

$\boxed{14}$ 1°) $f = h_{(\Omega,\, -2)}$ avec $\Omega(-3 + 4\mathrm{i})$

2°) On sait que l'image d'un cercle par une homothétie est un cercle dont le centre est l'image du centre du cercle de départ et dont le rayon est égal au rayon du cercle de départ multiplié par la valeur absolue du rapport de l'homothétie.

On cherche d'abord l'affixe du point A', image de A par *f*.

$z_{A'} = \ldots = 5 - 10\mathrm{i}$

$\mathcal{C}$ a pour rayon 1 donc $\mathcal{C}$ ' a pour rayon $1 \times |-2| = 2$.

$\mathcal{C}$ ' est le cercle de centre $A'(-5 + 10\,\mathrm{i})$ et de rayon 2.

$\boxed{15}$ 1°) $\Omega(1 + \mathrm{i})$

M est invariant par $f \Leftrightarrow M' = M$

$\Leftrightarrow z' = z$

$\Leftrightarrow -\mathrm{i}z + 2\mathrm{i} = z$

$\Leftrightarrow (1+\mathrm{i})z = 2\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow z = \frac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow z = 1 + \mathrm{i}$

f admet un seul point invariant : le point $\Omega(1 + \mathrm{i})$.

2°) On a : $z_\Omega = -\mathrm{i}z_\Omega + 2\mathrm{i}$ (1) puisque Ω est invariant par *f*. D'autre part, on a : $z' = -\mathrm{i}\,z + 2\mathrm{i}$ (2). En effectuant membre à membre la différence des égalités (1) et (2), on obtient : $z' - z_\Omega = -\mathrm{i}\left(z - z_\Omega\right)$.

3°) $z' - z_\Omega = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\left(z - z_\Omega\right)$

$f = R_{\left(\Omega,\, -\frac{\pi}{2}\right)}$

$\boxed{16}$ Faire une figure soignée.
Ecrire les hypothèses au début de l'exercice.
Compléter les hypothèses au fur et à mesure de la résolution de l'exercice avec les affixes des points calculées.
Faire figurer les mesures principales des angles orientés $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}\right)$ sur la figure.

1°) Pour déterminer les affixes des points E, F, H, D, on utilise les transformations (ici, rotations et translations).

ACDE est un carré <u>direct</u> donc on a : $\begin{cases} AC = AE \\ \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \end{cases}$; par suite, le point E est l'image du point C dans la rotation de centre A est d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$E = R_{\left(A,\, \frac{\pi}{2}\right)}(C)$ donc $z_E = -\mathrm{i}b + a(1 - \mathrm{i})$

Rappel : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$.

Attention, *a* et *b* sont des nombres complexes ; on n'écrit pas z_E sous forme algébrique.

ABGF est un carré <u>indirect</u> donc on a : $\begin{cases} AB = AF \\ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}\right) = -\dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi) \end{cases}$; par suite, le point F est l'image du point B dans la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

$F = R_{\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)}(B)$ donc $z_F = -\mathrm{i}b + a(1+\mathrm{i})$.

Rappel : $e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = -\mathrm{i}$

On a : $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AF}$ d'où : $z_H = a - 2\mathrm{i}b$.
On a : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}$ d'où $z_D = -\mathrm{i}a - b(1+\mathrm{i})$.
2°) $z_{\overrightarrow{EF}} = 2\mathrm{i}a$; $z_{\overrightarrow{OA}} = a$; $FE = |\,2\mathrm{i}a\,| = 2|\,a\,| = 2 \times OA$

(rappel : a est un nombre complexe, les barres de module sont indispensables et ne peuvent être enlevées)

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{EF}\right) = \arg \frac{z_{\overrightarrow{EF}}}{z_{\overrightarrow{OA}}} = \arg \frac{2\mathrm{i}a}{a} = \arg(2\mathrm{i}) = \arg 2 + \arg \mathrm{i} = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

3°) $z_{\overrightarrow{BD}} = z_D - z_B = -\mathrm{i}a - b(1+\mathrm{i}) - b = -2b - \mathrm{i}(a+b)$
$z_{\overrightarrow{CH}} = z_H - z_C = a - 2\mathrm{i}b - (-b) = (a+b) - 2\mathrm{i}b$

On remarque que : $z_{\overrightarrow{CH}} = \mathrm{i}\, z_{\overrightarrow{BD}}$.

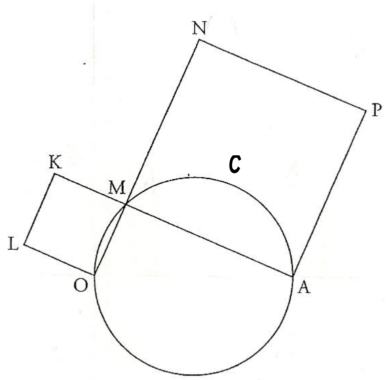
$$CH = |\,z_{\overrightarrow{CH}}\,| = |\,\mathrm{i}\, z_{\overrightarrow{BD}}\,| = |\,\mathrm{i}\,|\,|\,z_{\overrightarrow{BD}}\,| = 1 \times BD = BD$$

$$\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CH}\right) = \arg \frac{z_{\overrightarrow{CH}}}{z_{\overrightarrow{BD}}} = \arg \frac{\mathrm{i} z_{\overrightarrow{BD}}}{z_{\overrightarrow{BD}}} = \arg(\mathrm{i}) = \arg \mathrm{i} = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

N.B. : on peut aussi retrouver certains résultats de cet exercice en utilisant le produit scalaire.

$\boxed{17}$ Il s'agit d'un exercice sur le calcul littéral et les nombres complexes.

Pour la figure, il est dit de prendre M appartenant au demi-cercle « au-dessus » de la droite (OA).
Dans ce cas, les carrés AMNP et OMKL sont extérieurs au triangle OAM.
Il est important de noter que les points N, P, K, L n'appartiennent pas au cercle $\mathcal{C}$.



Le repère n'apparaît pas sur la figure (à part le point le point O qui est l'origine du repère).
1°) Démontrons que : « $\forall M \in \mathcal{C} \quad \left|\, m - \dfrac{1}{2} \,\right| = \dfrac{1}{2}$ ».

On note B le milieu de [OA]. Le point B a pour affixe $z_B = \dfrac{z_O + z_A}{2} = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

$OA = |\,z_A\,| = |\,1\,| = 1$

Le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre B et pour rayon $\dfrac{1}{2}$.

$M \in \mathcal{C}$ donc $BM = \dfrac{1}{2}$ d'où $\left|\, m - \dfrac{1}{2} \,\right| = \dfrac{1}{2}$.

2°) OMKL est un carré direct donc :
$\begin{cases} OM = OL \\ \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OL}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi) \end{cases}$; par suite, le point L est l'image du point M dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

$L = R_{\left(O, \frac{\pi}{2}\right)}(M)$ donc $z_L = \mathrm{i}(z_M - z_O) + z_O$ d'où $l = \mathrm{i}m$.

On a : $P = R_{\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)}(M)$ donc $z_P = e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z_M - z_A) + z_A$ d'où $p = -\mathrm{i}m + 1 + \mathrm{i}$.

On a : $N = R_{\left(M, \frac{\pi}{2}\right)}(A)$ donc $n = (1-\mathrm{i})m + \mathrm{i}$.

On a : $K = R_{\left(M, -\frac{\pi}{2}\right)}(O)$ donc $k = (1+\mathrm{i})m$.

N.B. : Les affixes des points L, P, N, K sont données sous forme littérale ; il ne s'agit pas de formes algébriques car $m \in \mathbb{C}$.

3°) $z_\Omega = \dfrac{z_P + z_L}{2} = \ldots = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$

$\Omega\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right)$; $B\Omega = |\,z_\Omega - z_B\,| = \left|\, \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} - \dfrac{1}{2} \,\right| = \left|\, \dfrac{\mathrm{i}}{2} \,\right| = \dfrac{1}{2}$ donc $\Omega \in \mathcal{C}$; pour préciser la position de Ω sur le cercle $\mathcal{C}$, on détermine une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B\Omega}\right)$.

$$\frac{z_{\overrightarrow{B\Omega}}}{z_{\overrightarrow{BA}}}=\frac{z_\Omega-z_B}{z_A-z_B}=\frac{\frac{1+i}{2}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{i}{2}}{\frac{1}{2}}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}\ (1)$$

On trouve : $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{B\Omega}\right)=\arg\dfrac{z_{\overrightarrow{B\Omega}}}{z_{\overrightarrow{BA}}}=\arg e^{i\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{2}\quad(2\pi)$.

Cette dernière égalité précise la position de Ω sur le cercle $\mathcal{C}$.

Ω est le « milieu » du demi-cercle de diamètre [OA] situé au-dessus de l'axe des abscisses.

4°) a) $KN=\left|z_N-z_K\right|=\left|(1-i)m+i-(1+i)m\right|=\left|i-2im\right|=2\left|i\right|\left|\frac{1}{2}-m\right|=2\times\left|m-\frac{1}{2}\right|=2\times\frac{1}{2}=1$

$|-Z|=|Z|$ On utilise le 1°)

N.B. : on peut très bien traiter cette question avec de la géométrie pure de la manière suivante.

1ère méthode : on démontre que la droite (LP) est un axe de symétrie de la figure formée par les deux carrés OMKL et AMNP.
On en déduit que $KN=OA=1$.

2e méthode : on démontre que les triangles OMA et MNK sont isométriques (avec un angle de même mesure compris entre côtés de même longueur).
On en déduit que $KN=OA=1$.

b) On calcule $\dfrac{z_{\overrightarrow{\Omega K}}}{z_{\overrightarrow{\Omega N}}}=\dfrac{k-z_\Omega}{n-z_\Omega}=\dfrac{(1+i)m-\frac{1+i}{2}}{(1-i)m+i-\frac{1+i}{2}}=\ldots=\dfrac{\left(m-\frac{1}{2}\right)+i\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\left(m-\frac{1}{2}\right)-i\left(m-\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{\left(m-\frac{1}{2}\right)(1+i)}{\left(m-\frac{1}{2}\right)(1-i)}=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{2}=i$.

On calcule le module et un argument du quotient $\dfrac{z_{\overrightarrow{\Omega K}}}{z_{\overrightarrow{\Omega N}}}$.

$\left|\dfrac{z_{\overrightarrow{\Omega K}}}{z_{\overrightarrow{\Omega N}}}\right|=|i|$ donc $\dfrac{\Omega N}{\Omega K}=1$ d'où $\Omega N=\Omega K$.

$\arg\dfrac{z_{\overrightarrow{\Omega K}}}{z_{\overrightarrow{\Omega N}}}=\arg i$ donc $\left(\overrightarrow{\Omega N},\overrightarrow{\Omega K}\right)=\dfrac{\pi}{2}\quad(2\pi)$

On en déduit que le triangle ΩNK est rectangle isocèle en Ω.

On peut aussi écrire que : $z_{\overrightarrow{\Omega K}}=i\,z_{\overrightarrow{\Omega N}}$; cette relation s'écrit aussi : $k-z_\Omega=e^{i\frac{\pi}{2}}\left(n-z_\Omega\right)$ et s'interprète comme $K=R_{\left(\Omega,\frac{\pi}{2}\right)}(N)$ ce qui permet d'écrire $\Omega N=\Omega K$ et $\left(\overrightarrow{\Omega N},\overrightarrow{\Omega K}\right)=\dfrac{\pi}{2}\quad(2\pi)$.

5°) **1ère méthode :** théorème de Pythagore dans le triangle ΩNK rectangle isocèle en Ω (on sait que $KN=1$).

2e méthode : $\Omega N=\left|\left(i+m(1-i)\right)-\left(\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right)\right|=\left|\left(m-\frac{1}{2}\right)(1-i)\right|=\left|m-\frac{1}{2}\right|\left|1-i\right|=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

question 1°)

Conclusion : $N\in\mathcal{C}'$ avec $\mathcal{C}'$: cercle de centre Ω et de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.