1ère L Option

Opérations algébriques sur les dérivées
Calculs de dérivées

I. Dérivée d'une somme

1°) Propriété (formule admise sans démonstration)

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

La fonction $u+v$ est dérivable sur I
et la dérivée est donnée par la formule $(u+v)'=u'+v'$.

(La dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées).

2°) Exemples

• **Exemple 1**

$\boxed{f : x \mapsto x^2 + x}$

Calculer la dérivée de *f*.

Méthode :

On décompose.

On pose

$u(x)=x^2$
$v(x)=x$

(u et v sont deux fonctions de référence).

(On passe en « mode dérivée »)
$u'(x)=2x$
$v'(x)=1$

On écrit $f=u+v$.
On pose la formule $f'=u'+v'$.
On remplace avec les expressions précédentes.

$\boxed{f'(x)=2x+1}$

(le ' indique que l'on fait la dérivée ; on dit que l'on a « dérivé » la fonction)

On peut schématiser ainsi le calcul :

$$u+v \longrightarrow u'+v'$$
$$x^2 \longrightarrow 2x$$
$$x \longrightarrow 1$$

$$f(x)=x^2+x \longrightarrow f'(x)=2x+1$$

2 expressions $\neq$

On remarquera bien que les deux expressions sont différentes.

• **Exemple 2** $\boxed{f : x \mapsto x^3 + 1}$

On pose

$u(x)=x^3$
$v(x)=1$

$u'(x)=3x^2$
$v'(x)=0$

$f=u+v$.
$f'=u'+v'$.

$\boxed{f'(x)=3x^2}$

II. Dérivée du produit d'une fonction par un réel

1°) Propriété (formule admise sans démonstration)

u est une fonction dérivable sur un intervalle I et k est un réel.
La fonction ku est dérivable sur I
et la dérivée est donnée par la formule $(ku)'=ku'$.

(Pour dériver, on garde la constante ; on dérive la fonction).

La constante ne bouge pas.

2°) Exemples

• **Exemple 1**

$\boxed{f : x \mapsto 5x^2}$

Calculer la dérivée de *f*.

Méthode :

On décompose (« on divise en 2 »).

On pose

$u(x) = x^2$
$k = 5$

(u est une fonction de référence).

(On passe en « mode dérivée »)
$u'(x) = 2x$

On écrit $f = ku$.
On pose la formule $f' = ku'$.
On remplace avec les expressions précédentes (on multiplie).

$\boxed{f'(x) = 10x}$

- **Exemple 2** $\boxed{f : x \mapsto \frac{x^3}{2}}$

Réécriture :

$f(x) = \frac{1}{2}x^3$

$f'(x) = \frac{1}{2}3x^2 = \frac{3x^2}{2}$

- **Exemple 3** $\boxed{f : x \mapsto \frac{2}{x}}$

Réécriture :

$f(x) = 2 \times \frac{1}{x}$

$f'(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}$

III. Dérivée d'un produit

1°) Propriété (admise sans démonstration)

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
La fonction uv est dérivable sur I
et la dérivée est donnée par la formule $(uv)' = u'v + uv'$.

2°) Mise en garde

Attention, la formule est plus compliquée ; la dérivée d'un produit n'est pas égale au produit des dérivées.

« C'est comme les identités remarquables »

Pas d'exemple

IV. Dérivée de l'inverse d'une fonction

Propriété (admise sans démonstration)

u est une fonction dérivable sur un intervalle I, qui ne s'annule pas sur I.
La fonction $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I
et la dérivée est donnée par la formule $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

(attention, la formule est complexe)

Pas d'exemple

V. Dérivée d'un quotient

1°) Propriété (admise sans démonstration)

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que v ne s'annule pas sur I.
La fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I
et la dérivée est donnée par la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

(attention, la formule est complexe)

2°) Commentaires

Le – du haut ; l'ordre des facteurs.

VI. Tableau récapitulatif

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel.

Fonction	Dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$k\times u$	$k\times u'$
$u\times v$	$u'v+uv'$
$\frac{1}{u}\ (u\neq 0)$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}\ (v\neq 0)$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

On combinera ce tableau avec le tableau des dérivées des fonctions de référence.

VII. Dérivation des fonctions polynômes et rationnelles

1°) Fonctions polynômes

● Définition d'une fonction polynôme

On appelle **fonction polynôme du second degré** toute fonction f dont l'expression peut s'écrire $f(x)=ax^2+bx+c$ où a, b, c sont trois réels tels que $a\neq 0$.
On appelle **fonction polynôme du troisième degré** toute fonction f dont l'expression peut s'écrire $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ où a, b, c, d sont trois réels tels que $a\neq 0$.

On définit de même des fonctions polynômes de degré 4, 5, 6 etc.

● Exemples

$f(x)=3x^2+4x-5$
$f(x)=2x^3-3x^2-x+1$

2°) Fonctions rationnelles

● Définition d'une fonction rationnelle

Une **fonction rationnelle** est le quotient de deux fonctions polynômes.

● Ensemble de définition d'une fonction rationnelle

L'ensemble de définition d'une fonction rationnelle est égal à $\mathbb{R}$ privé de l'ensemble des valeurs qui annulent le dénominateur.

● Exemples

$f:x\mapsto\frac{3x+1}{x-2}$

$\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$f:x\mapsto\frac{x^2-2x+3}{x^2-1}$

$\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{1;-1\}$

3°) Règle de dérivabilité des fonctions polynômes et rationnelles

● Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

● Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

VIII. Rédaction et présentation définitives des calculs

1°) Exemple 1

$\boxed{f(x)=2x^3-4x^2+10x-1}$

$\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme)

$f'(x)=2\times 3x^2-4\times 2x+10\times 1+0$

(on dérive chaque monôme)

$\boxed{f'(x)=6x^2-8x+10}$

2°) Exemple 2

$\boxed{f(x)=\frac{2x-1}{x+4}}$

$\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$

Version au propre	Brouillon
f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-4\}$ $f'(x)=\dfrac{2(x+4)-(2x-1)\times 1}{(x+4)^2}$ Utiliser des parenthèses (« parenthèses de sécurité ») $\boxed{f'(x)=\dfrac{9}{(x+4)^2}}$ On ne développe pas le dénominateur.	On pose $u(x)=2x-1$ $v(x)=x+4$ $u'(x)=2$ $v'(x)=1$ $f=\dfrac{u}{v}$ $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ $f'(x)=\dfrac{2(x+4)-(2x-1)\times 1}{(x+4)^2}=\dfrac{9}{(x+4)^2}$